UNIVERZITET U NOVOM SADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA

ANDREA ROŽNJIK

TESTOVI I REPREZENTATIVNI ISPITNI ZADACI IZ MATEMATIKE 3

SUBOTICA, 2023.

Autor
dr Andrea Rožnjik, docent, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica

Recenzenti
dr Hajnalka Peić, redovni profesor, Građevinski fakultet Subotica, Univerzitet u Novom Sadu
dr Nataša Krklec Jerinkić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Izdavač
Građevinski fakultet Subotica, Univerzitet u Novom Sadu
Za izdavača
dr Milan Trifković, redovni profesor,
glavni i odgovorni urednik za izdavačku delatnost Građevinskog fakulteta Subotica

ISBN: 978-86-80297-95-8

Odlukom Nastavno-naučnog veća Građevinskog fakulteta Subotica, broj 33-1/2023 od 22. 12. 2023. godine, odobreno za izdavanje kao univerzitetska zbirka zadataka.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51(075.8)(076)

РОЖЊИК, Андреа
Testovi i reprezentativni ispitni zadaci iz Matematike 3 [Elektronski izvor] / Andrea Rožnjik. - Subotica : Građevinski fakultet, 2023

Način pristupa (URL):
https://zbornik.gf.uns.ac.rs/eludzbenik/Testovi_i_reprezentativni_ispitni_zadaci_iz_Matematike3_Andrea_Roznjik.pdf. - Opis zasnovan na stanju na dan 28.12.2023. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-80297-95-8

а) Математика - Задаци

COBISS.SR-ID 134204169

Predgovor

Zbirka je nastala sa ciljem da studentima Građevinskog fakulteta Subotica, Univerziteta u Novom Sadu, koji slušaju predmet *Matematika 3*, olakša savladavanje gradiva predmeta putem testova i ispitnih zadataka. U zbirci su obuhvaćeni *dvostruki i trostruki integrali*, *brojni i funkcionalni redovi*, s posebnim osvrtom na *Furijeove redove*. Iz oblasti numeričke analize su obuhvaćeni: *teorija grešaka, interpolacija, numerička integracija i numeričko rešavanje jednačina*. Poslednju obrađenu oblast čine osnovni pojmovi vezani za *parcijalne diferencijalne jednačine*. Stoga, zbirka može da posluži svima koji žele da provere svoje znanje iz pređenih oblasti.

Za svaku obuhvaćenu oblast je navedeno po deset testova. Ti testovi imaju ulogu u proveri teorijskog znanja, te su sastavljeni od teorijskih pitanja i pitanja u kojima se proverava primena teorije na jednostavnim primerima. Pitanja su višestrukog izbora, tako da sadrže pet alternativa za odgovor. Od pet ponuđenih tvrđenja za odgovor, jedno ili više tvrđenja je tačno. Odgovor je tačan ukoliko su odabrana sva tačna tvrđenja. Ukoliko se odabere netačno tvrđenje, odgovor je netačan. Za svaki test su data rešenja, a iz svake oblasti, za polovinu testova su data i obrazloženja za rešenja. Kod svakog zadatka, simbol ▷ direktno vodi na rešenje tog zadatka, a kod svakog rešenja, broj zadatka je link ka postavci zadatka.

Na ispitu iz predmeta *Matematika 3* se ispituju sve navedene oblasti, osim parcijalnih diferencijalnih jednačina, tako da za te oblasti, zbirka sadrži i rešene reprezentativne ispitne zadatke.

Za praćenje sadržaja zbirke, potrebno je predznanje o polinomima, racionalnim funkcijama, matricama, determinantama, sistemima linearnih jednačina, brojnim nizovima, vektorskim prostorima, analitičkoj geometriji, krivama i površima drugog reda, realnim funkcijama jedne i više realnih promenljivih, diferencijalnom i integralnom računu realne funkcije jedne realne promenljive i običnim diferencijalnim jednačinama.

U prvom poglavlju zbirke su navedene definicije i teoreme koje su upotrebljene u izradi zadataka i obrazloženjima. Drugo i treće poglavlje su posvećeni testovima i njihovim rešenjima. Rešeni reprezentativni ispitni zadaci su prikazani u poslednjem poglavlju.

Zahvaljujem se recenzentima dr Hajnalki Peić, redovnom profesoru Građevinskog fakulteta Subotica, i dr Nataši Krklec Jerinkić, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na savetima i predlozima kojima su doprineli tome da sadržaj zbirke bude jasniji i precizniji.

Subotica, 2023. Andrea Rožnjik

Sadržaj

Glava 1

Pregled pratećih definicija i teorema

U ovom poglavlju su navedene oznake, definicije i teoreme koje su upotrebljene u fomulisanju odgovora na pitanja iz testova i rešenjima ispitnih zadataka. Detalji i dokazi teorema se mogu naći u navedenoj literaturi. Udžbenici [10,14,15] obuhvataju gradivo koje je potrebno za predznanje.

Skup prirodnih brojeva, skup celih brojeva, skup realnih brojeva i skup kompleksnih brojeva su redom označeni sa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Oznake $\mathbb{N}_0$ i $\mathbb{R}_+$ predstavljaju skup prirodnih brojeva sa nulom i skup pozitivnih realnih brojeva, redom. Skup uređenih realnih n-torki, gde je $n \in \mathbb{N}$, je obeležen sa $\mathbb{R}^n$. Operacija $\cap$ predstalja uniju, a $\cup$ presek skupova. e je Ojlerov broj, $e \approx 2.7182818$. Logaritam broja x sa osnovom e je $\ln x$, dok je $\log x$ logaritam broja x sa osnovom 10. Apsolutna vrednost broja x je označena sa $|x|$. Za prvi i drugi izvod realne funkcije f jedne realne promenljive x se redom koriste oznake $f'(\cdot)$ i $f''(\cdot)$, ali i $\frac{df}{dx}(\cdot)$ i $\frac{d^2f}{dx^2}(\cdot)$. Za parcijalne izvode realne funkcije f dve realne promenljive x i y se koriste oznake: $f'_x(\cdot,\cdot)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot)$ za prvi izvod po promenljivoj x, odnosno $f'_y(\cdot,\cdot)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot)$ za prvi izvod po promenljivoj y, $f''_{xx}(\cdot,\cdot)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot,\cdot)$ za drugi izvod po x i x, $f''_{xy}(\cdot,\cdot)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot,\cdot)$ za drugi izvod po x, pa po y i $f''_{yy}(\cdot,\cdot)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot,\cdot)$ za drugi izvod po y i y. Za determinantu reda n i matricu tipa $m \times n$ su, redom, upotrebljene oznake

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$n!$ predstavlja faktorijel prirodnog broja n,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n, \ \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

Pošto, za neprekidno diferencijabilne realne funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$, formula parcijalne integracije ima oblik

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

pri određivanju funkcije v računa se neodređeni integral. U zbirci će biti izostavljeno dodavanje proizvoljne konstante pri računanju tog neodređenog integrala jer će se koristiti funkcije v za koje je ta konstanta jednaka nuli.

1.1 Dvostruki i trostruki integrali

Definicija 1.1 *Neka je S proizvoljan skup (može biti i $S \subset \mathbb{R}$ i $S \subset \mathbb{R}^2$ i $S \subset \mathbb{R}^3$). Skup S je* OGRANIČEN *ako postoji pozitivna konstanta c sa osobinom da je rastojanje između proizvoljne dve tačke skupa S najviše c. Tačka skupa S je* RUBNA TAČKA *skupa S ako se u svakom krugu čiji je centar ona sama nalaze tačke koje pripadaju S, ali i tačke koje ne pripadaju skupu S. Skup svih rubnih tačaka skupa S čini* RUB *skupa S, u oznaci ∂S. Skup S je* ZATVOREN *ako je $\partial S \subset S$.* DIJAMETAR SKUPA *S predstavlja najveće rastojanje između proizvoljne dve tačke skupa S.*

Definicija 1.2 *Kriva koja je zadata funkcijom koja je neprekidno diferencijabilna na intervalu na kojem je definisana kriva je* GLATKA KRIVA. *Kriva je* PO DELOVIMA GLATKA *ako se može podeliti na konačan broj glatkih krivih.*

Definicija 1.3 *Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ograničena, a skup D ograničen i zatvoren, sa ∂D koji je po delovima glatka kriva. Neka je $\mathcal{P}_n = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ proizvoljna podela oblasti D, pravama koje su paralelne koordinatnim osama, na podoblasti $D_1, D_2, \dots, D_n$. Neka je za svaku podoblast D_i njena površina označena sa ΔD_i i proizvoljno izabrana tačka $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zbir zapremina cilindričnih tela sa osnovama D_i i visinama $f(\xi_i, \eta_i)$ za $i = 1, 2, \dots, n$ je*

$$I_n(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$$

i naziva se RIMANOVA INTEGRALNA SUMA *funkcije f za podelu $\mathcal{P}_n$. Dužina najdužeg dijametra među dijametrima podoblasti $D_1, D_2, \dots, D_n$ je* DIJAMETAR PODELE *$\mathcal{P}_n$, u oznaci $\lambda(\mathcal{P}_n)$.*

Definicija 1.4 *Neka su zadovoljene pretpostavke definicije 1.3. Ako za realan broj I i funkciju f za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svaku podelu $\mathcal{P}_n = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ sa osobinom da je $\lambda(\mathcal{P}_n) < \delta$ i svaki izbor tačaka $(\xi_1, \eta_1) \in D_1$, $(\xi_2, \eta_2) \in D_2$, ..., $(\xi_n, \eta_n) \in D_n$ važi*

$$|I - I_n(f, \mathcal{P}_n)| < \varepsilon,$$

tada je I GRANIČNA VREDNOST RIMANOVIH INTEGRALNIH SUMA *$I_n(f, \mathcal{P}_n)$ i piše se*

$$I = \lim_{\lambda(\mathcal{P}_n) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i.$$

Definicija 1.5 *Neka su zadovoljene pretpostavke definicije 1.3. Ako postoji (konačna) granična vrednost I Rimanovih integralnih suma $I_n(f, \mathcal{P}_n)$, tada se za funkciju f kaže da je* RIMAN-INTEGRABILNA *(ili* INTEGRABILNA*) nad oblašću D. Broj I se naziva (*RIMANOV*)* DVOSTRUKI INTEGRAL *funkcije f nad oblašću D i obeležava sa*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Funkcija f se naziva PODINTEGRALNA FUNKCIJA.

Teorema 1.6 (Osobine dvostrukog integrala) *Neka su funkcije f i g realne funkcije dve realne promenljive i integrabilne nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$.*

- ⋄ *Za proizvoljan realan broj α i funkcija αf je integrabilna nad oblašću D i važi da je*

$$\iint\limits_D \alpha f(x, y)\, dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy. \tag{1.1.1}$$

- ⋄ *Funkcija zbira $f + g$ je takođe integrabilna nad oblašću D i važi da je*

$$\iint\limits_D (f(x, y) + g(x, y))\, dxdy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy. \tag{1.1.2}$$

- ⋄ *Ako je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2$ je najviše kriva, tada važi da je*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dxdy. \tag{1.1.3}$$

- ⋄ *Ako je $f(x, y) \geq 0$ na D, tada je*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \geq 0. \tag{1.1.4}$$

- ⋄ *Ako je $f(x, y) \geq g(x, y)$ na D, tada je*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \geq \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy. \tag{1.1.5}$$

Teorema 1.7 *Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabilna nad D, a funkcije $g_1, g_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $g_1(x) \le g_2(x)$ za svako $x \in [a,b]$. Ako je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, tada je*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Teorema 1.8 *Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabilna nad D, a funkcije $h_1, h_2 : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $h_1(y) \le h_2(y)$ za svako $y \in [c,d]$. Ako je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$, tada je*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Teorema 1.9 *Ako funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pri čemu je $D = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$, za $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sa osobinom da je $a < b$ i $c < d$, tada se može obrnuti redosled integraljenja, odnosno*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Teorema 1.10 *Ako funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i proizvod je funkcija koje zavise samo od po jedne promenljive, odnosno $f(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, a $D = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$, za $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sa osobinom da je $a < b$ i $c < d$, tada se dvostruki integral funkcije f nad D može napisati kao proizvod dva određena integrala:*

$$\iint\limits_D X(x) \cdot Y(y)\,dxdy = \int_a^b X(x)dx \cdot \int_c^d Y(y)dy.$$

Teorema 1.11 (Smena promenljivih kod dvostrukog integrala) *Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna na D, pri čemu je ∂D po delovima glatka kriva. Neka je funkcija $\varphi : S \subset \mathbb{R}^2 \to D$ bijekcija takva da je*

$$\varphi(u,v) = (x,y) \ \text{ sa } \ x = \varphi_1(u,v), \ \ y = \varphi_2(u,v),$$

gde su φ_1 i φ_2 realne funkcije sa neprekidnim parcijalnim izvodima nad oblašću S, a ∂S je po delovima glatka kriva. Ako važi da je $\varphi(S) = D$ i J je Jakobijan (odnosno Jakobijeva determinanta) definisan sa

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

tada je

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_S f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))\,|J|\,dudv.$$

SMENA NA POLARNE KOORDINATE ρ i θ definisana je funkcijama:

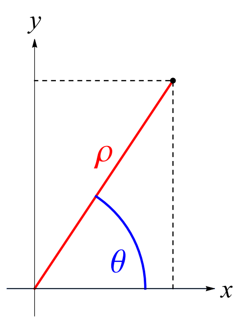
$$x = \rho\cos\theta, \ \ y = \rho\sin\theta,$$

pri čemu je

$$\rho \ge 0 \ \text{ i } \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Veza polarnih kooordinata i promenljivih x i y je ilustrovana na slici 1.1.1. U ovom slučaju Jakobijan je

$$J \ = \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho.$$



Slika 1.1.1

Primena dvostrukog integrala:

- Neka je D zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^2$ sa rubom koji je po delovima glatka kriva i neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna na D.
$$V = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$$
je ZAPREMINA cilindričnog tela koje je odozgo ograničeno s površi $z = f(x,y)$, odozdo s ravni $z = 0$, a sa strane pravom cilindričnom površi (paralelnom sa z-osom) koja u xOy ravni iseca oblast D.

- Neka je D zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^2$ sa rubom koji je po delovima glatka kriva.
$$P = \iint\limits_D dxdy$$
je POVRŠINA oblasti D.

- Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna, a oblast D zatvorena, ograničena i sa rubom koji je po delovima glatka kriva. Tada je
$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}\, dxdy \tag{1.1.6}$$
POVRŠINA POVRŠI $z = f(x,y)$ definisane za $(x,y) \in D$.

Definicija 1.12 *Površ koja je zadata funkcijom koja je neprekidno diferencijabilna na intervalu na kojem je definisana površ je* GLATKA POVRŠ. *Površ je* PO DELOVIMA GLATKA *ako se može podeliti na konačan broj glatkih površi.*

Definicija 1.13 *Neka je funkcija $f : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ograničena, a skup T ograničen i zatvoren, sa ∂T koji je po delovima glatka površ. Neka je $\mathcal{P}_n = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ proizvoljna podela oblasti T, ravnima koje su paralelne sa koordinatnim ravnima, na podoblasti $T_1, T_2, \dots, T_n$. Neka je za svaku podoblast T_i njena zapremina označena sa ΔT_i i proizvoljno izabrana tačka $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zbir*
$$I_n(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$$
je RIMANOVA INTEGRALNA SUMA *funkcije f za podelu $\mathcal{P}_n$. Dužina najdužeg dijametra među dijametrima podoblasti $T_1, T_2, \dots, T_n$ je* DIJAMETAR PODELE *$\mathcal{P}_n$, u oznaci $\lambda(\mathcal{P}_n)$.*

Definicija 1.14 *Neka su zadovoljene pretpostavke definicije 1.13. Ako za realan broj I i funkciju f za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svaku podelu $\mathcal{P}_n = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ sa osobinom da je $\lambda(\mathcal{P}_n) < \delta$ i svaki izbor tačaka $(\xi_1, \eta_1, \zeta_i) \in T_1$, $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \in T_2$, …, $(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \in T_n$ važi*
$$|I - I_n(f, \mathcal{P}_n)| < \varepsilon,$$
tada je I GRANIČNA VREDNOST RIMANOVIH INTEGRALNIH SUMA *$I_n(f, \mathcal{P}_n)$ i piše se*
$$I = \lim_{\lambda(\mathcal{P}_n) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i.$$

Definicija 1.15 *Neka su zadovoljene pretpostavke definicije 1.13. Ako postoji (konačna) granična vrednost I Rimanovih integralnih suma $I_n(f, \mathcal{P}_n)$, tada se za funkciju f kaže da je* RIMAN-INTEGRABILNA *(ili* INTEGRABILNA*) nad oblašću T. Broj I se naziva (*RIMANOV*)* TROSTRUKI INTEGRAL *funkcije f nad oblašću T i obeležava sa*
$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz.$$
Funkcija f se naziva PODINTEGRALNA FUNKCIJA.

Teorema 1.16 (Osobine trostrukog integrala) *Neka su funkcije f i g realne funkcije tri realne promenljive i integrabilne nad oblašću $T \subset \mathbb{R}^3$.*

- *Za proizvoljan realan broj α i funkcija αf je integrabilna nad oblašću T i važi da je*

$$\iiint_T \alpha f(x,y,z)\,dxdydz = \alpha \iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{1.1.7}$$

- *Funkcija zbira $f+g$ je takođe integrabilna nad oblašću T i važi da je*

$$\iiint_T (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_T g(x,y,z)\,dxdydz. \tag{1.1.8}$$

- *Ako je $T = T_1 \cup T_2$ i $T_1 \cap T_2$ je najviše površ, tada važi da je*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{T_2} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{1.1.9}$$

- *Ako je $f(x,y,z) \geq 0$ na T, tada je*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz \geq 0. \tag{1.1.10}$$

- *Ako je $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ na T, tada je*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz \geq \iiint_T g(x,y,z)\,dxdydz. \tag{1.1.11}$$

Teorema 1.17 *Neka je funkcija $f : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrabilna nad T, a funkcije $g_1, g_2 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$ za svako $(x,y) \in D_1$. Ako je $T = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_1,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$, tada je*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_1} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dxdy. = \iint_{D_1} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Teorema 1.18 *Neka je funkcija $f : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrabilna nad T, a funkcije $h_1, h_2 : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $h_1(x,z) \leq h_2(x,z)$ za svako $(x,z) \in D_2$. Ako je $T = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D_2,\ h_1(x,z) \leq y \leq h_2(x,z)\}$, tada je*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_2} \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\,dxdz = \iint_{D_2} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dxdz.$$

Teorema 1.19 *Neka je funkcija $f : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrabilna nad T, a funkcije $k_1, k_2 : D_3 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $k_1(y,z) \leq k_2(y,z)$ za svako $(y,z) \in D_3$. Ako je $T = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D_3,\ k_1(y,z) \leq x \leq k_2(y,z)\}$, tada je*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_3} \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,)dydz = \iint_{D_3} \left(\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dydz.$$

Teorema 1.20 *Ako funkcija $f : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i proizvod je funkcija koje zavise samo od po jedne promenljive, odnosno $f(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$, a $T = \big\{(x,y,z) \subset \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, g \leq z \leq h\big\}$, za $a,b,c,d,g,h \in \mathbb{R}$ sa osobinom da je $a < b$, $c < d$ i $g < h$, tada se trostruki integral funkcije f nad T može napisati kao proizvod tri određena integrala:*

$$\iiint_T X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)\,dxdydz = \int_a^b X(x)\,dx \cdot \int_c^d Y(y)\,dy \cdot \int_g^h Z(z)\,dz.$$

Teorema 1.21 (Smena promenljivih kod trostrukog integrala) *Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ neprekidna na T, pri čemu je ∂T po delovima glatka površ. Neka je funkcija $\varphi : S \subset \mathbb{R}^3 \to T$ bijekcija takva da je*

$$\varphi(u,v,w) = (x,y,z) \ \ \textit{sa} \ \ x = \varphi_1(u,v,w), \ \ y = \varphi_2(u,v,w), \ \ z = \varphi_3(u,v,w),$$

gde su φ_1, φ_2 i φ_3 realne funkcije sa neprekidnim parcijalnim izvodima nad oblašću S, a ∂S je po delovima glatka površ. Ako važi da je $\varphi(S) = T$ i J je Jakobijan (odnosno Jakobijeva determinanta) definisan sa

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

tada je

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_S f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w))\,|J|\,dudvdw.$$

SMENA NA CILINDRIČNE KOORDINATE ρ, θ i h definisana je funkcijama:

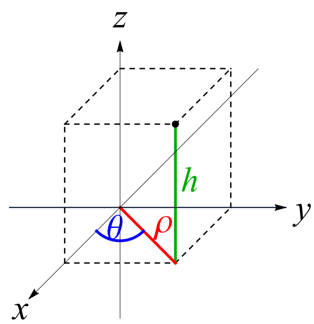
$$x = \rho\cos\theta, \ \ y = \rho\sin\theta, \ \ z = h,$$

pri čemu je

$$\rho \geq 0, \ \ \theta \in [0, 2\pi] \ \text{ i } \ h \in \mathbb{R}.$$

Veza cilindričnih kooordinata i promenljivih x, y i z je ilustrovana na slici 1.1.2. U ovom slučaju Jakobijan je

$$J \ = \ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,h)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} = \rho.$$



Slika 1.1.2

SMENA NA SFERNE KOORDINATE ρ, θ i φ definisana je funkcijama:

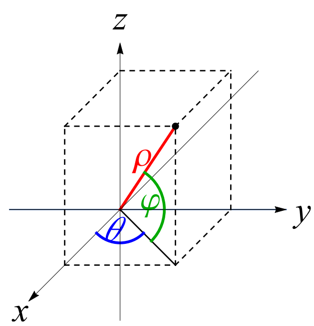
$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \ \ y = \rho\cos\varphi\sin\theta, \ \ z = \rho\sin\varphi,$$

pri čemu je

$$\rho \geq 0, \ \ \theta \in [0, 2\pi] \ \text{ i } \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Veza sfernih kooordinata i promenljivih x, y i z je ilustrovana na slici 1.1.3. U ovom slučaju Jakobijan je

$$J \ = \ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \rho^2\cos\varphi.$$



Slika 1.1.3

Primena trostrukog integrala:

Neka je T zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^3$ sa rubom koji je po delovima glatka površ.

$$V = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$$

je ZAPREMINA oblasti T.

1.2 Brojni i funkcionalni redovi

Definicija 1.22 *Neka je* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz realnih brojeva. Izraz*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots, \text{ ili kraće } \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

naziva se (BESKONAČNI) BROJNI RED. *Brojevi* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *su* ČLANOVI BROJNOG REDA, *a* a_n *je* n-TI ČLAN *ili* OPŠTI ČLAN *brojnog reda.*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

je n-TA PARCIJALNA SUMA, *a niz* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ NIZ PARCIJALNIH SUMA *reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicija 1.23 *Ako postoji (konačna) granična vrednost S niza parcijalnih suma* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *brojnog reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *tada se kaže da red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA *i da je S njegov* ZBIR, *što se obeležava sa* $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$. *Za red koji ne konvergira, kaže se da* DIVERGIRA.

Definicija 1.24 *Brojni red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je*

- ◇ RED S POZITIVNIM ČLANOVIMA *ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $a_n > 0$ *za svako* $n \geq n_0$*;*
- ◇ RED S NENEGATIVNIM ČLANOVIMA *ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $a_n \geq 0$ *za svako* $n \geq n_0$*;*
- ◇ ALTERNATIVNI RED *ako je* $a_n a_{n+1} < 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.25 (Potreban uslov za konvergenciju) *Ako brojni red konvergira, tada njegov opšti član teži ka nuli.*

Teorema 1.26 (Osobine brojnih redova)

- ◇ *Ako brojni redovi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergiraju i ako je* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *tada red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *konvergira i važi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$,
- ◇ *Ako brojni red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira i ako je* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, *tada red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konvergira i važi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$, *gde je* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ◇ *Ako brojni red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, tada i red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *divergira, gde je* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Teorema 1.27 (Košijev kriterijum) *Neka je brojni red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *takav da je* $a_n \geq 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \text{ gde } L \in [0, \infty].$$

- ◇ *Ako je* $L < 1$, *tada red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
- ◇ *Ako je* $L > 1$, *tada red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Teorema 1.28 (Dalamberov kriterijum) *Neka je brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *takav da je* $a_n > 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \ \ gde \ \ L \in [0, \infty].$$

- $\diamond$ *Ako je* $L < 1$, *tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
- $\diamond$ *Ako je* $L > 1$, *tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Teorema 1.29 (Rabeov kriterijum) *Neka je brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *takav da je* $a_n > 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *a*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L, \ \ gde \ \ L \in [-\infty, \infty].$$

- $\diamond$ *Ako je* $L < 1$, *tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*
- $\diamond$ *Ako je* $L > 1$, *tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

Teorema 1.30 (Integralni kriterijum) *Ako je funkcija* f *nenegativna, neprekidna i monotono nerastuća nad intervalom* $[n_0, \infty)$, *za neko* $n_0 \in \mathbb{N}$, *i važi da je* $f(n) = a_n$ *za* $n \in \mathbb{N}$ *i* $n \geq n_0$, *tada brojni red* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral* $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$.

Teorema 1.31 (Uporedni kriterijum) *Neka su* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *brojni redovi takvi da je* $0 \leq a_n \leq b_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$.

- $\diamond$ (Majorantni kriterijum) *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, tada konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $\diamond$ (Minorantni kriterijum) *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, tada divergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Teorema 1.32 (Lajbnicov kriterijum) *Ako je brojni niz* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nenegativan i monotono nerastući (*$b_{n+1} \leq b_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$*) i teži ka nuli, tada alternativni red* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ *konvergira.*

Definicija 1.33 *Brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ APSOLUTNO KONVERGIRA *ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergira. Ako brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, ali ne konvergira apsolutno, tada se kaže da taj red* USLOVNO KONVERGIRA.

Teorema 1.34 *Ako brojni red apsolutno konvergira, tada on konvergira.*

Definicija 1.35 FUNKCIONALNI NIZ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definisan na skupu* $A \subseteq \mathbb{R}$, *odnosno* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in A$, *je niz realnih funkcija*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

definisanih za svako $x \in A$.

Definicija 1.36 *Neka za funkcionalni niz* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, *za svaku tačku* $x_0 \in A$ *važi da brojni niz* $\{f_n(x_0)\}$ *konvergira. Tada je funkcija* f *definisana sa*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ za \ \ x \in A$$

GRANIČNA VREDNOST FUNKCIONALNOG NIZA $\{f_n\}$ *i kaže se da* FUNKCIONALNI NIZ $\{f_n\}$ *(*OBIČNO *ili* TAČKASTO*)* KONVERGIRA NA SKUPU A.

Definicija 1.37 *Neka su $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ realne funkcije takve da presek njihovih oblasti definisanosti, skup $A \subseteq \mathbb{R}$, nije prazan skup. Izraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \text{ odnosno } f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots, \text{ za } x \in A,$$

naziva se FUNKCIONALNI RED. *Funkcije $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ su* ČLANOVI FUNKCIONALNOG REDA, *a $f_n(x)$ je* n-TI ČLAN *ili* OPŠTI ČLAN *funkcionalnog reda.*

$$S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

je n-TA PARCIJALNA SUMA, *a niz $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in A$, je* NIZ PARCIJALNIH SUMA *funkcionalnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.*

Definicija 1.38 *Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definisan na skupu A je* KONVERGENTAN U TAČKI $x_0 \in A$ *ako je brojni niz $\{S_n(x_0)\}$ konvergentan. Funkcionalni red (*OBIČNO *ili* TAČKASTO*)* KONVERGIRA NA SKUPU $B \subset A$ *ako je on konvergentan u svakoj tački skupa B, odnosno ako postoji funkcija S koja je granična vrednost niza parcijalnih suma $\{S_n(x)\}$, $x \in B$. Skup B je* OBLAST KONVERGENCIJE *funkcionalnog reda, a funkcija S* ZBIR FUNKCIONALNOG REDA $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *$x \in B$, i piše se $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in B$.*

Definicija 1.39 *Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in A$,* APSOLUTNO KONVERGIRA NA SKUPU $B \subset A$ *ako funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, $x \in A$, konvergira na tom skupu.*

Definicija 1.40 *Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definisan na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$* UNIFORMNO KONVERGIRA NA SKUPU $B \subset A$ *ka funkciji $S : B \to \mathbb{R}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ (koje zavisi samo od ε) takvo da je*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \text{ za svako } n \geq n_0 \text{ i } x \in B.$$

Teorema 1.41 *Ako su funkcije $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ neprekidne na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, a funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je uniformno konvergentan na I, tada je i funkcija zbira funkcionalnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$, neprekidna na intervalu I.*

Napomena 1.42 *Ako funkcionalni red apsolutno konvergira na nekom skupu, tada on i tačkasto konvergira na tom skupu.*
Ako funkcionalni red uniformno konvergira na nekom skupu, tada on i tačkasto konvergira na tom skupu.

Teorema 1.43 (Vajerštrasov kriterijum) *Ako postoji konvergentan brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ takav da je*

$$|f_n(x)| \leq c_n \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \text{ i } x \in B,$$

tada funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na skupu B.

Definicija 1.44 *Funkcionalni redovi oblika*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \ x \in \mathbb{R}$$

gde su x_0 i koeficijenti c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, realne konstante, nazivaju se STEPENI REDOVI *sa centrom u x_0.*

Teorema 1.45 *Za svaki stepeni red* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$, *postoji realan broj* R, $0 \leq R \leq +\infty$, *takav da je zadovoljen jedan od uslova:*

- $R = 0$ *i stepeni red (apsolutno) konvergira za* $x = x_0$, *a divergira za svako* $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$*;*
- $R > 0$ *i stepeni red apsolutno konvergira za svako* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, *a divergira za svako* $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$*;*
- $R = +\infty$ *i stepeni red apsolutno konvergira za svako* $x \in \mathbb{R}$.

Broj R *naziva se* POLUPREČNIK KONVERGENCIJE *stepenog reda. Za* $R > 0$ *interval* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *naziva se* INTERVAL KONVERGENCIJE *stepenog reda.*

Teorema 1.46 *Za poluprečnik konvergencije stepenog reda* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *važi da je*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{i/ili} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

pod uslovom da navedene granične vrednosti postoje.

Teorema 1.47 *Stepeni red* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$, *sa pozitivnim poluprečnikom konvergencije* R *je uniformno konvergentan na intervalu* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *i funkcija zbira* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, *je neprekidna.*

1.3 Furijeovi redovi

Definicija 1.48 *Neka su funkcije* $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,3,\ldots$, *integrabilne. Niz funkcija (funkcionalni niz)* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [a,b]$, *je* ORTOGONALAN *ako važi da je*

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx = 0, \quad \text{za svako } m \neq n, \ m,n = 1,2,3,\ldots.$$

Ako važi da je

$$\int_a^b (f_n(x))^2\, dx = 1, \quad \text{za svako } n = 1,2,3,\ldots,$$

tada je niz funkcija $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [a,b]$, NORMIRAN. *Niz funkcija* $\{f_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je* ORTONORMIRAN *na intervalu* $[a,b]$ *kada je ortogonalan i normiran na* $[a,b]$.

Primer ortogonalnog niza funkcija na intervalu $[a, a+2\pi]$ za proizvoljno $a \in \mathbb{R}$:

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots, \tag{1.3.12}$$

a primer ortonormiranog niza funkcija:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots. \tag{1.3.13}$$

Teorema 1.49 *Ako su funkcije* $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,3,\ldots$, *integrabilne, a funkcionalni red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *je uniformno konvergentan na* $[a,b]$, *tada je*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Teorema 1.50 *Neka je $l > 0$ i funkcija $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ neprekidna i neparna, tada je*

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0.$$

Teorema 1.51 *Neka je $l > 0$ i funkcija $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ neprekidna i parna, tada je*

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\, dx = 2\int_{-l}^{0} f(x)\, dx.$$

Teorema 1.52 *Neka je funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna. Ako postoji tačka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) > 0$, tada je*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx > 0.$$

Definicija 1.53 *Funkcionalni red oblika*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right), \tag{1.3.14}$$

sa pozitivnom realnom konstantom l, realnom promenljivom x i realnim konstantama a_0, a_n i b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, je TRIGONOMETRIJSKI RED.

Teorema 1.54 *Neka je trigonometrijski red (1.3.14) uniformno konvergentan na intervalu $x \in [a, a + 2l]$, $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}_+$, a funkcija f njegova funkcija zbira, odnosno*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [a, a + 2l].$$

Tada su koeficijenti a_0, a_n i b_n, $n = 1, 2, \ldots$ definisani sa

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\, dx \tag{1.3.15}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{1.3.16}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.3.17}$$

i nazivaju se FURIJEOVIM KOEFICIJENTIMA *funkcije f, a (1.3.14) je* FURIJEOV RED *funkcije f.*

Teorema 1.55 *Ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična sa periodom $2l$, $l > 0$, i po delovima neprekidno diferencijabilna na intervalu $[-l, l]$, tada Furijeov red funkcije f konvergira u svakoj tački skupa $\mathbb{R}$. U tački x_0 u kojoj je funkcija f neprekidna, zbir Furijeovog reda je $f(x_0)$, dok je u tački prekida x_1 zbir Furijeovog reda $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_1 + 0} f(x)\right)$.*

Teorema 1.56 *Furijeov red parne funkcije je* RED KOSINUSA, *a Furijeov red neparne funkcije* RED SINUSA.

1.4 Numerička analiza

Definicija 1.57 *Neka je v^* približna vrednost broja ili izraza v.* GREŠKA *približne vrednosti v^* je*

$$\Delta(v^*) = v - v^*,$$

a njena APSOLUTNA GREŠKA *je*

$$\Delta_A(v^*) = |v - v^*|.$$

Svaki broj δ za koji važi da je

$$\Delta_A(v^*) \leq \delta$$

je GRANICA APSOLUTNE GREŠKE *približne vrednosti v^*.*

Definicija 1.58 *Neka je v^* približna vrednost broja ili izraza v i neka je $v \neq 0$.* RELATIVNA GREŠKA *približne vrednosti v^* je*

$$\Delta_R(v^*) = \frac{|v - v^*|}{|v|},$$

a svaki broj ρ za koji važi da je

$$\Delta_R(v^*) \leq \rho$$

je GRANICA RELATIVNE GREŠKE *približne vrednosti v^*.*

VAŽEĆE CIFRE ili ZNAČAJNE CIFRE broja su prva nenula cifra sleva i sve cifre iza nje.

Broj x zapisan u DECIMALNOM OBLIKU SA POKRETNOM DECIMALNOM TAČKOM, u dekadnom brojnom sistemu, je oblika

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot 0.a_1 a_2 \ldots a_t \cdot 10^e, \tag{1.4.18}$$

gde su a_i, $i = 1, \ldots, t$ cifre u posmatranom brojnom sistemu, pri čemu je $a_1 \neq 0$, i

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Prirodan broj t definiše PRECIZNOST, e je EKSPONENT, a broj $0.a_1 a_2 \ldots a_t$ je MANTISA.

ZAOKRUŽIVANJE S PRECIZNOŠĆU t je definisano sa

$$\operatorname{fl}(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cdot 0.a_1 a_2 \ldots a_t \cdot 10^e, & 0 \leq a_{t+1} < 5, \\ \operatorname{sgn}(x) \cdot (0.a_1 a_2 \ldots a_t + 10^{-t}) \cdot 10^e, & 5 \leq a_{t+1} < 10. \end{cases} \tag{1.4.19}$$

Neka je f realna funkcija sa jednom realnom promenljivom, x^* približna vrednost od x sa granicom apsolutne greške δ, a $f^* = f(x^*)$. Ako je funkcija f diferencijabilna na intervalu $[x^* - \delta, x^* + \delta]$, tada je

$$|f(x) - f(x^*)| \lessapprox \delta^0_{f^*}, \quad \delta^0_{f^*} = \left|f'(x^*)\right| \cdot \delta,$$

gde $\lessapprox$ predstavlja manju ili približno jednaku vrednost, a $\delta^0_{f^*}$ se naziva LINEARNA OCENA GRANICE APSOLUTNE GREŠKE PRIBLIŽNE VREDNOSTI FUNKCIJE.

1.4.1 Interpolacija

Neka funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i neka su date tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ iz intervala $[a, b]$ tako da važi da je

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Neka su vrednosti funkcije f u datim tačkama:

$$f(x_0) = y_0, \;\; f(x_1) = y_1, \;\; \ldots, \;\; f(x_n) = y_n.$$

Funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa osobinom da je

$$F(x_0) = y_0, \;\; F(x_1) = y_1, \;\; \ldots, \;\; F(x_n) = y_n. \tag{1.4.20}$$

je INTERPOLACIONA FUNKCIJA. Tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ su ČVOROVI INTERPOLACIJE, a uslovi (1.4.20) su USLOVI INTERPOLACIJE. U slučaju kada čvorovi interpolacije dele interval $[a, b]$ na jednake podintervale, reč je o EKVIDISTANTNIM ČVOROVIMA, odnosno o EKVIDISTANTNOJ PODELI, za koju važi

$$x_i = a + ih, \;\; i = 0, 1, \ldots, n, \;\; h = \frac{b - a}{n}.$$

LINEARNA INTERPOLACIJA je određivanje interpolacione funkcije F u obliku

$$F(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \ldots + a_n \phi_n(x),$$

gde su funkcije $\phi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ linearno nezavisne funkcije koje se nazivaju BAZNE FUNKCIJE.

U slučaju POLINOMNE INTERPOLACIJE

$$\phi_0(x) = 1,\ \ \phi_1(x) = x,\ \ \ldots,\ \ \phi_n(x) = x^n.$$

Kod TRIGONOMETRIJSKE INTERPOLACIJE

$$\phi_0(x) = 1,\ \ \phi_{2k-1}(x) = \sin kx,\ \ \phi_{2k}(x) = \cos kx,\ \ k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2},$$

gde je n paran broj. Kod EKSPONENCIJALNE INTERPOLACIJE

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i x},\ \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

pri čemu je $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Za

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\lambda_i + x},\quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

sa $a + \lambda_0 > 0$ i $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$, je u pitanju RACIONALNA INTERPOLACIJA.

Teorema 1.59 *Za date tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sa osobinom da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ i date vrednosti funkcije f: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$ postoji jedinstveni interpolacioni polinom.*

LAGRANŽOV INTERPOLACIONI POLINOM L_n je definisan sa

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \tag{1.4.21}$$

Teorema 1.60 *Neka funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka je $n + 1$ puta diferencijabilna. Ako je*

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

tada je

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}.$$

Definicija 1.61 *Za date tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sa osobinom da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ i date vrednosti funkcije f: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$, funkcija*

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & [x_0, x_1] \\ S_1(x), & [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x), & [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

gde su S_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, polinomi m-tog stepena, se naziva SPLAJN *stepena m. Ako važi da je*

$$S(x_i) = y_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

splajn S se naziva INTERPOLACIONI SPLAJN.

Teorema 1.62 *Za date tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sa osobinom da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ i date vrednosti funkcije f: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$ postoji jedinstveni* PRIRODNI KUBNI SPLAJN

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & [x_0, x_1] \\ S_1(x), & [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x), & [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

sa osobinama:

- ◇ *uslovi interpolacije: $S(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$,*
- ◇ *neprekidan splajn: $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$,*
- ◇ *neprekidan prvi izvod splajna: $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$,*
- ◇ *neprekidan drugi izvod splajna: $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$,*
- ◇ *konturni uslov: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.*

1.4.2 Numerička integracija

Neka je funkcija $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena na intervalu $[a,b]$,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

i neka je interval $[a,b]$ podeljen tačkama, ČVOROVIMA INTEGRACIJE, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sa osobinom da je

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

PRIMITIVNE KVADRATURNE FORMULE su postupci numeričke integracije u kojima se površina podintegralne funkcije aproksimira zbirom površina pravougaonika.

FORMULA LEVIH PRAVOUGAONIKA:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \tag{1.4.22}$$

FORMULA DESNIH PRVAOUGAONIKA:

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{1.4.23}$$

FORMULA SREDNJIH PRAVOUGAONIKA:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.4.24}$$

Teorema 1.63 *Neka je funkcija $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna. Ako je*

$$M_1 = \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|,$$

tada je

$$|I - L_n| \le \frac{M_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2,$$

$$|I - D_n| \le \frac{M_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2. \tag{1.4.25}$$

Teorema 1.64 *Neka je funkcija $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna. Ako je*

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|,$$

tada je

$$|I - P_n| \le \frac{M_2}{24}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^3. \tag{1.4.26}$$

Neka su čvorovi integracije ekvidistantno raspoređeni:

$$x_i = a + ih,\ \ i = 0,1,\ldots,n,\ \ \text{sa}\ \ h = \frac{b-a}{n},$$

i neka je

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

$$\frac{M_1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 = \frac{M_1}{2}nh^2 = \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \tag{1.4.27}$$

i

$$\frac{M_2}{24}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^3 = \frac{M_2}{24}nh^3 = \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}. \tag{1.4.28}$$

(SLOŽENA) TRAPEZNA FORMULA je definisana sa

$$T_n = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right). \tag{1.4.29}$$

Teorema 1.65 *Neka je funkcija $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna. Ako je*

$$M_2=\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|,$$

tada je

$$|I-T_n|\leq\frac{(b-a)h^2}{12}M_2=\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2. \tag{1.4.30}$$

Neka je n paran broj, odnosno $n=2m$. (SLOŽENA) SIMPSONOVA FORMULA je definisana sa

$$S_n=\frac{h}{3}\left(y_0+4\sum_{i=1}^{m}y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{m-1}y_{2i}+y_{2m}\right).$$

Teorema 1.66 *Neka je funkcija $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ četiri puta neprekidno diferencijabilna. Ako je*

$$M_4=\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|,$$

tada je

$$|I-S_n|\leq\frac{(b-a)h^4}{180}M_4=\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4. \tag{1.4.31}$$

1.4.3 Numerički postupci za rešavanje jednačina

Neka je f realna funkcija jedne realne promenljive. Posmatramo jednačinu

$$f(x)=0. \tag{1.4.32}$$

Svako $\xi\in\mathbb{R}$ za koje važi da je $f(\xi)=0$ naziva se REŠENJE ili KOREN jednačine (1.4.32).

Jednačina (1.4.32) je LINEARNA ako je funkcija f linearna. U suprotnom je NELINEARNA.

Ako je f polinom stepena n, tada se jednačina (1.4.32) naziva ALGEBARSKA JEDNAČINA stepena n. Jednačina koja nije algebarska naziva se TRANSCENDENTNA JEDNAČINA.

Numeričkim postupcima za rešavanje jednačina se približno rešava jednačina (1.4.32). ITERATIVNIM POSTUPKOM se generiše niz APROKSIMACIJA REŠENJA $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ na osnovu ITERATIVNOG PRAVILA sa zadatim POČETNIM APROKSIMACIJAMA. Aproksimacije x_k se računaju sve dok uslov, IZLAZNI KRITERIJUM,

$$|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon \tag{1.4.33}$$

ne bude zadovoljen, pa se za približno rešenje x^* uzima aproksimacija x_k.

LOKALIZACIJA REŠENJA jednačine podrazumeva određivanje intervala koji sadrži bar jedno rešenje posmatrane jednačine. GRAFIČKA LOKALIZACIJA se može sprovesti crtanjem grafika funkcije f. Rešenja jednačine (1.4.32) su apscise preseka grafika funkcije f i x-ose. Za $f(x)=g(x)-h(x)$ jednačina $f(x)=0$ je ekvivalentna jednačini $g(x)=h(x)$, tako da se grafička lokalizacija može sprovesti i crtanjem grafika funkcija g i h. Tada, su rešenja jednačine (1.4.32) apscise preseka grafika funkcija g i h.

Teorema 1.67 *Neka je realna funkcija f neprekidna na intervalu $[a,b]$. Ako je $f(a)f(b)<0$, tada u intervalu (a,b) postoji bar jedno rešenje jednačine $f(x)=0$.*

POSTUPAK POLOVLJENJA je primenljiv ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a,b]$ i zadovoljava uslov da je $f(a)f(b)<0$.

Algoritam

1. korak Odrediti toleranciju ε. Uzeti da je $x_0=a$, $x_1=b$, $A_1=a$, $B_1=b$ i $k=2$.

2. korak Odrediti $x_k=\dfrac{A_{k-1}+B_{k-1}}{2}$.

3. korak Izračunati $f(x_k)$. Ako je $f(x_k)=0$, traženo rešenje je x_k čime je kraj postupka, inače preći na sledeći korak.

4. korak Ako je $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, traženo približno rešenje je x_k, pa je kraj postupka. U suprotnom preći na sledeći korak.

5. korak Ako je $f(A_{k-1})f(x_k) < 0$, onda je $A_k = A_{k-1}$ i $B_k = x_k$, u suprotnom je $A_k = x_k$ i $B_k = B_{k-1}$. Povećati k za 1 i preći na 2. korak.

NJUTNOV POSTUPAK je primenljiv ako je funkcija f diferencijabilna.

Algoritam

1. korak Odrediti početnu aproksimaciju x_0 i toleranciju ε. Uzeti da je $k = 1$.

2. korak Izračunati $f(x_{k-1})$ i $f'(x_{k-1})$. Ako je $f'(x_{k-1}) = 0$, promeniti x_0 i poći od 1. koraka, a ako je $f'(x_{k-1}) \neq 0$ preći na sledeći korak.

3. korak Odrediti $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$.

4. korak Ako je $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, traženo približno rešenje je x_k, čime je kraj postupka, inače povećati k za 1 i preći na 2. korak.

POSTUPAK SEČICE je primenljiv ako je funkcija f neprekidna.

Algoritam

1. korak Odrediti početne aproksimacije x_0 i x_1 i toleranciju ε. Uzeti da je $k = 2$.

2. korak Ako je $k = 2$ izračunati $f(x_{k-2})$ i $f(x_{k-1})$, inače izračunati $f(x_{k-1})$.

3. korak Odrediti $x_k = x_{k-1} - \dfrac{x_{k-2} - x_{k-1}}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} f(x_{k-1})$.

4. korak Ako je $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, traženo rešenje je x_k, pa je kraj postupka, inače povećati k za 1, i preći na 2. korak.

1.5 Parcijalne diferencijalne jednačine

Definicija 1.68 *Funkcionalna jednačina koja sadrži realnu nezavisnu promenljivu, nepoznatu realnu funkciju i izvode nepoznate funkcije je* DIFERENCIJALNA JEDNAČINA. RED *diferencijalne jednačine je najviši red izvoda nepoznate funkcije koji se javlja u jednačini. Diferencijalna jednačina sa nepoznatom realnom funkcijom jedne realne promenljive je* OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA. *Diferencijalna jednačina sa nepoznatom realnom funkcijom dve realne promenljive je* PARCIJALNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA.

Definicija 1.69 REŠENJE *(ili* INTEGRAL*) diferencijalne jednačine reda n na skupu S je funkcija koja je n puta diferencijabilna na skupu S i identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu na posmatranom skupu.*

REŠITI (ili INTEGRALITI) DIFERENCIJALNU JEDNAČINU na skupu S znači odrediti sva njena rešenja na S.

Definicija 1.70 *Diferencijalna jednačina je* LINEARNA *ako je linearna po nepoznatoj funkciji i po njenim izvodima.*

Definicija 1.71 *Neka je y nepoznata realna funkcija jedne realne promenljive, $y = y(x)$, $n \in \mathbb{N}$, a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i f realne funkcije jedne realne promenljive. Linearna obična diferencijalna jednačina reda n*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{1.5.34}$$

gde su koeficijenti p_i, $i = 1, 2, ..., n$, i slobodan član f neprekidni na intervalu (a,b), je HOMOGENA *ako je $f(x) \equiv 0$ za svako $x \in (a,b)$, u suprotnom je* NEHOMOGENA.

Definicija 1.72 *Rešenje obične diferencijalne jednačine reda $n \in \mathbb{N}$ koje sadrži n proizvoljnih realnih konstanti je* OPŠTE REŠENJE. *Dodeljivanjem konkretne vrednosti bar jednoj konstanti u opštem rešenju, dobija se* PARTIKULARNO REŠENJE. *Rešenje obične diferencijalne jednačine koje ne može da se dobije iz opšteg rešenja, naziva se* SINGULARNO REŠENJE.

Posmatramo parcijalne diferencijalne jednačine prvog i drugog reda za koje važi da je nepoznata funkcija jednom, odnosno dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $S \subset \mathbb{R}^2$, što obezbeđuje da su odgovarajući mešoviti izvodi jednaki.

Definicija 1.73 *Neka je u nepoznata realna funkcija dve realne promenljive, $u = u(x,y)$, a a, b, c, d, e, f i g realne funkcije dve promenljive definisane na skupu $S \subset \mathbb{R}^2$. Linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda*

$$a(x,y)u'_x + b(x,y)u'_y + c(x,y)u = g(x,y),$$

gde su koeficijenti a, b i c i slobodan član g neprekidni na S je HOMOGENA *ako je $g(x,y) \equiv 0$ na S, u suprotnom je* NEHOMOGENA.

Definicija 1.74 *Neka je u nepoznata realna funkcija dve realne promenljive, $u = u(x,y)$, a a, b, c, d, e, f i g realne funkcije dve promenljive definisane na skupu $S \subset \mathbb{R}^2$. Linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda*

$$a(x,y)u''_{xx} + b(x,y)u''_{xy} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x + e(x,y)u'_y + f(x,y)u = g(x,y), \tag{1.5.35}$$

gde su koeficijenti a, b, c, d, e i f i slobodan član g neprekidni na S je HOMOGENA *ako je $g(x,y) \equiv 0$ na S, u suprotnom je* NEHOMOGENA.

Definicija 1.75 *Neka je F realna funkcija pet realnih promenljivih, a u nepoznata realna funkcija dve realne promenljive, $u = u(x,y)$.* REŠENJE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE *prvog reda*

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

koje sadrži jednu proizvoljnu neprekidno diferencijabilnu funkciju jedne realne promenljive je OPŠTE REŠENJE. *Rešenje koje sadrži dve proizvoljne konstante je* POTPUNO REŠENJE. *Dodeljivanjem konkretnog izraza proizvoljnoj funkciji u opštem rešenju ili konkretne vrednosti proizvoljnoj konstanti u potpunom rešenju, dobija se* PARTIKULARNO REŠENJE.

Definicija 1.76 *Neka je F realna funkcija osam realnih promenljivih, a u nepoznata realna funkcija dve realne promenljive, $u = u(x,y)$.* REŠENJE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE *drugog reda*

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

koje sadrži dve proizvoljne dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije jedne realne promenljive koje su nezavisne je OPŠTE REŠENJE. *Rešenje koje sadrži pet proizvoljnih konstanti je* POTPUNO REŠENJE. *Dodeljivanjem konkretnog izraza proizvoljnoj funkciji u opštem rešenju ili konkretne vrednosti proizvoljnoj konstanti u potpunom rešenju, dobija se* PARTIKULARNO REŠENJE.

POČETNI PROBLEM čini diferencijalna jednačina sa POČETNIM USLOVIMA – uslovi na vrednosti tražene funkcije i/ili njenih izvoda za jednu promenljivu fiksiranu na početnu tačku intervala za koji se posmatra.

KONTURNI (ili RUBNI ili GRANIČNI) PROBLEM čine diferencijalna jednačina i KONTURNI (ili RUBNI ili GRANIČNI) USLOVI – uslovi na vrednosti tražene funkcije i/ili njenih izvoda na rubu skupa nad kojim se posmatra diferencijalna jednačina.

MEŠOVITI PROBLEM čini parcijalna diferencijalna jednačina sa početnim i konturnim uslovima.

Početni, konturni i mešoviti problem za koji važe osobine:

- ◇ egzistencija – postoji rešenje problema,
- ◇ jedinstvenost – problem ima tačno jedno rešenje,
- ◇ stabilnost – rešenje neprekidno zavisi od datih podataka (uslova, koeficijenata, slobodnog člana), odnosno, male promene u datim podacima rezultuju male promene u rešenju.

je DOBRO (ili KOREKTNO) postavljen.

Za linearnu običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \;\; y = y(x),$$

najopštiji konturni uslovi na intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ su oblika

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) &= \alpha_5 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) &= \beta_5, \end{aligned} \tag{1.5.36}$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ realne konstante takve da su vektori $[\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots \; \alpha_5]$ i $[\beta_1 \; \beta_2 \; \ldots \; \beta_5]$ linearno nezavisni. Kada je $\alpha_5 = \beta_5 = 0$ za KONTURNE USLOVE se kaže da su HOMOGENI.

Ako diferencijalna jednačina ili konturni problem zavise od parametra, tada se vrednosti tog parametra za koje diferencijalna jednačina, odnosno konturni problem, ima netrivijalno rešenje naziva KARAKTERISTIČNA (ili SOPSTVENA) VREDNOST, a odgovarajuće netrivijalno rešenje je KARAKTERISTIČNA (ili SOPSTVENA) FUNKCIJA.

Definicija 1.77 *Linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda (1.5.35) je*

- HIPERBOLIČNA *na S ako je $H(x,y) > 0$ za svako $(x,y) \in S$,*
- PARABOLIČNA *na S ako je $H(x,y) = 0$ za svako $(x,y) \in S$,*
- ELIPTIČNA *na S ako je $H(x,y) < 0$ za svako $(x,y) \in S$,*

pri čemu je

$$H(x,y) = (b(x,y))^2 - 4a(x,y)c(x,y). \tag{1.5.37}$$

TALASNA JEDNAČINA:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \;\; u = u(x,t), \;\; c > 0 \tag{1.5.38}$$

JEDNAČINA PROVOĐENJA TOPLOTE:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \;\; u = u(x,t), \;\; a > 0 \tag{1.5.39}$$

LAPLASOVA JEDNAČINA:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \;\; u = u(x,y) \tag{1.5.40}$$

Teorema 1.78 *Data je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda*

$$a(x,y)u''_{xx} + b(x,y)u''_{xy} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x + e(x,y)u'_y + f(x,y)u = 0, \;\; u = u(x,y), \tag{1.5.41}$$

nad oblašću $S \subset \mathbb{R}^2$, gde su realne funkcije a, b, c, d, e i f neprekidne na S. Ako su u_1 i u_2 rešenja jednačine (1.5.41), tada je i njihova linearna kombinacija

$$u(x,y) = C_1 u_1(x,y) + C_2 u_2(x,y)$$

rešenje jednačine (1.5.41) na S, za proizvoljne realne konstante C_1 i C_2.
Uopšteno, po PRINCIPU SUPERPOZICIJE, *ako je $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ niz rešenja jednačine (1.5.41) na S, tada je i funkcija*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,y)$$

rešenje jednačine (1.5.41) na S, za proizvoljan niz realnih konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ za koji red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,y)$ konvergira za svako $(x,y) \in S$.

(FURIJEOVA) METODA RAZDVAJANJA PROMENLJIVIH je postupak za rešavanje linearne parcijalne diferencijalne jednačine po kojem se rešenje traži u obliku proizvoda funkcija jedne promenljive, i to po jedne funkcije za svaku promenljivu. Dakle, metodom razdvajanja promenljivih rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine (1.5.35) se traži u obliku $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Glava 2

Testovi predispitnih obaveza

2.1 Dvostruki integrali

Test 1.1

1. ▷ Zaokružiti slova ispred jednačina cilindričnih površi.

A) $z = y$ **B)** $z = \sqrt{y}$ **C)** $x + y + z = 3$ **D)** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ **E)** $x^2 = z^2$

2. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
U definiciji dvostrukog integrala $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$ ...

A) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je dijametar podele $\mathcal{P}_n$ oblasti D.

B) $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n = D$

C) ΔD_i je zapremina podoblasti D_i, za $i = 1,2,\ldots,n$.

D) (ξ_3,η_3) su proizvoljne tačke oblasti D.

E) $f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$ je površina podoblasti D_i, za $i = 1,2,\ldots,n$.

3. ▷ Neka je dvodimenzionalna oblast D zatvorena, ograničena i sa rubom koji je po delovima glatka kriva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_D x\,dxdy + \iint\limits_D y\,dxdy$

B) $\iint\limits_D (x\cdot y)\,dxdy = \iint\limits_D x\,dxdy \cdot \iint\limits_D y\,dxdy$

C) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2+1\right)\,dxdy \geq 0$

D) $\iint\limits_D y\,dxdy = \iint\limits_{D_1} y\,dxdy + \iint\limits_{D_2} y\,dxdy$ za proizvoljne oblasti D_1 i D_2 takve da je $D_1 \cup D_2 = D$.

E) $\iint\limits_D x\cdot y\,dxdy = \iint\limits_{D_1} x\,dxdy \cdot \iint\limits_{D_2} y\,dxdy$ za proizvoljne oblasti D_1 i D_2 takve da je $D_1 \cup D_2 = D$.

4. ▷ Neka je $I = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ne postoji oblast čija je površina jednaka sa I.

B) Površina jediničnog kruga je jednaka sa I.

C) Površina jediničnog kvadrata je jednaka sa I.

D) Zapremina jedinične kocke je jednaka sa I.

E) Zapremina jedinične lopte je jednaka sa I.

5. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena krivama: $x = y^2$ i $x = 1$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 (x+y)\,dx\right)dy$ **B)** $\int_{y^2}^{1}\left(\int_0^1 \sqrt{x}\,dy\right)dx$ **C)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{1} \sqrt[3]{y}\,dx\right)dy$

D) $\int_0^1\left(\int_{-1}^{1} \left(y^2-1\right)\,dy\right)dx$ **E)** $\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (y+1)\,dy\right)dx$

6. ▷ Neka je $I_1 = \int_0^1 \left(\int_2^4 x\,e^y\,dx\right)dy$ i $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} (\cos x + 1)\,dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 6(e-1)$ **B)** $I_1 = \frac{28}{3}(e-1)$ **C)** $I_1 = e^4 - e^2$ **D)** $I_2 = 2\pi + \pi^2$ **E)** $I_2 = \pi^2 - 2\pi$

7. Neka je $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, pri čemu je zatvorena oblast D određena krivama: $y = x^2$, $y = 2-x$ i $y = 0$, a funkcija f integrabilna nad D. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx \right) dy$

B) $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dx \right) dy$

C) $I = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy \right) dx$

D) $I = \int_0^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$

E) $I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy \right) dx$

8. U xOy koordinatnom sistemu su date krive $x^2 + y^2 = 3$ i tačka T koja leži na njoj. Neka su $\rho \in [0,\infty)$ i $\theta \in [0, 2\pi]$ polarne koordinate. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) θ predstavlja ugao između duži OT i pozitivnog dela y-ose.

B) θ predstavlja ugao između duži OT i pozitivnog dela x-ose.

C) θ predstavlja ugao između duži OT i negativnog dela y-ose.

D) $x^2 + y^2 = \rho$

E) $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^1 \left(\int_1^2 (2x-4y)\,dy \right) dx = 0$

B) $\int_{-1}^1 \left(\int_1^2 (2x-4y)\,dy \right) dx = -12$

C) $\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 6xy^2\,dx \right) dy = 2$

D) $\int_0^1 \left(\int_1^2 \sqrt{y^5}\,dx \right) dy = \frac{2}{7}(8\sqrt{2}-1)$

E) $\int_0^1 \left(\int_1^2 \sqrt{y^5}\,dx \right) dy = \frac{5}{7}$

10. Neka je $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$, pri čemu je zatvorena oblast D određena krivama: $y = |x|$ i $y = 2-x^2$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 xy\,dx \right) dy$

B) $I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 xy\,dy \right) dx$

C) $I = \int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} xy\,dx \right) dy$

D) $I = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} xy\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} xy\,dx \right) dy$

E) $I = \int_{-1}^0 \left(\int_{-x}^{2-x^2} xy\,dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_x^{2-x^2} xy\,dy \right) dx$

Test 1.2

1. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.

U definiciji dvostrukog integrala funkcije f nad oblašću D $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$, ...

A) oblast D je trodimenzionalna oblast.

B) $\mathcal{P}_n$ predstavlja podelu $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ dvodimenzionalne oblasti D.

C) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je najkraća stranica među stranicama pravougaonika koji čine podelu $\mathcal{P}_n$.

D) ΔD_i, $i = 1,2,\ldots,n$, su površine podoblasti iz podele $\mathcal{P}_n$.

E) (ξ_i,η_i), $i = 1,2,\ldots,n$, su proizvoljne tačke iz trodimenzionalne oblasti D.

2. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ i $c < d$, a $I = \int_a^b \left(\int_c^d (f(x) + g(y) + h(x,y))\, dx \right) dy$, pri čemu su funkcije f, g i h integrabilne nad odgovarajućim oblastima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_c^d \left(\int_a^b (f(x) + g(y) + h(x,y))\, dy \right) dx$

B) $I = \int_a^b g(y) dy + \int_c^d f(x) dx + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y) dx \right) dy$

C) $I = -\int_a^b \left(\int_c^d (-f(x) + g(y) + h(x,y))\, dx \right) dy$

D) $I = (a-b) \int_c^d f(x) dx + (c-d) \int_a^b g(y) dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y) dx \right) dy$

E) $I = \int_c^d f(x) \left(\int_a^b dy \right) dx + \int_a^b g(y) \left(\int_c^d dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y) dx \right) dy$

3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Presek površi $z = 0$ i $z = y^2$ je parabola.

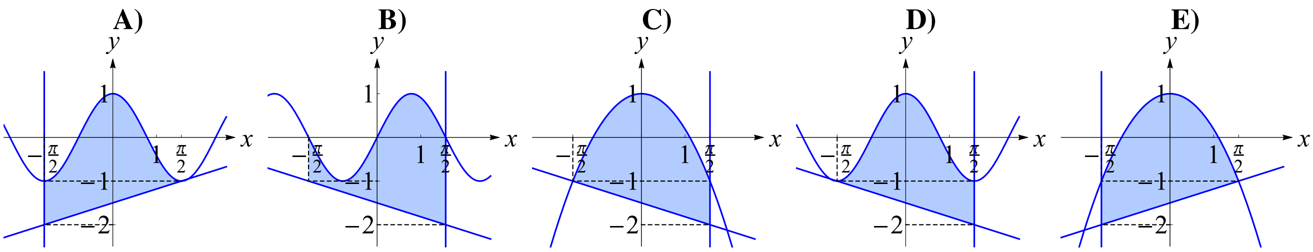
B) Presek površi $z = 0$ i $z = x^2$ je koordinatni početak.

C) Presek površi $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ i $z = 2$ je elipsa.

D) Presek površi $x = 1$ i $z = 0$ je prava.

E) Presek površi $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ i $z = 0$ je koordinatni početak.

4. Zaokružiti slovo iznad grafika oblasti integracije integrala $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{x}{\pi} - \frac{3}{2}}^{\cos 2x} (1 - x^2)\, dy \right) dx$.



5. Neka je $I = \iint_D \sqrt{x}\, dxdy$, gde je zatvorena oblast D određena tačkama $A(1,3)$, $B(1,1)$ i $C(2,1)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_1^2 \left(\int_1^{5-2x} \sqrt{x}\, dy \right) dx$ **B)** $I = \int_1^3 \left(\int_1^{5-2x} \sqrt{x}\, dy \right) dx$ **C)** $I = \int_1^3 \left(\int_1^{\frac{5}{2} - \frac{y}{2}} \sqrt{x}\, dx \right) dy$

D) $I = \int_1^3 \left(\int_1^{y-3} \sqrt{x}\, dx \right) dy$ **E)** $I = \int_1^{5-2x} \left(\int_1^2 \sqrt{x}\, dx \right) dy$

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_0^1 \left(\int_0^1 (x\sqrt{x} - y^2\sqrt{y})\, dx \right) dy = -1$ **B)** $\int_0^1 \left(\int_0^1 (x\sqrt{x} - y^2\sqrt{y})\, dx \right) dy = \frac{4}{35}$

C) $\int_1^e \left(\int_{-1}^1 \frac{\ln y}{y}\, dx \right) dy = 1$ **D)** $\int_1^e \left(\int_{-1}^1 \frac{\ln y}{y}\, dx \right) dy = e^2 - 1$ **E)** $\int_1^e \left(\int_{-1}^1 \frac{\ln y}{y}\, dx \right) dy = 2$

7. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Veličina površine zatvorene oblasti određene krivama $y = x^2$ i $y = 2 - x$ je ...

A) $P = 12$ **B)** $P = \frac{35}{6}$ **C)** $P = -\frac{64}{3}$ **D)** $P = 5\frac{1}{2}$ **E)** $P = \frac{9}{2}$

8. Neka je sa V označena zapremina tela određenog površima $x^2+y^2=1$, $z=0$ i $z=x^2+y^2+1$, dok je sa P označena površina površi $z=x^2+y^2+1$ koju iz nje iseca cilindar $x^2+y^2=1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 2\,dxdy$ **B)** $V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2+1\right)\,dxdy$ **C)** $P=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2+1\right)\,dxdy$

D) $P=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+2x+2y}\,dxdy$ **E)** $P=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

9. Neka je $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, pri čemu je funkcija f neprekidna nad zatvorenom i ograničenom oblašću D sa po delovima glatkim rubom, i neka je uvedena smena na polarne koordinate ρ i θ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi]$ **B)** $x=\rho\sin\theta,\ y=\rho\cos\theta,\ \rho\ge 0,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

C) $I=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,d\rho d\theta$ **D)** $I=\iint\limits_D f(\rho,\theta)\,d\rho d\theta$

E) $I=\iint\limits_D f(\rho\sin\theta,\rho\cos\theta)\rho\,d\rho d\theta$

10. Neka je $I=\iint\limits_D\left(4x^2+y^2\right)dxdy$, gde je D oblast ograničena krivom $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$. Neka je uvedena smena $x=\rho\cos\theta$, $y=2\rho\sin\theta$, gde je $\rho\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$ i neka je sa J označen Jakobijan. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Oblast D se transformiše u krug. **B)** Oblast D se transformiše u pravougaonik.

C) $|J|=2\rho$ **D)** $|J|=2\rho(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ **E)** $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\rho$

Test 1.3

1. Neka je $I=\int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2}(x+y)\,dx\right)dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2}(x+y)\,dy\right)dx$ **B)** $I=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_{y^2}^{y+2}dy$

C) $I=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_{y^2}^{y+2}dx$ **D)** $I=\int_{-1}^{2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y^2}^{y+2}dy$

E) $I=\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\int_{x-2}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\right)dx$

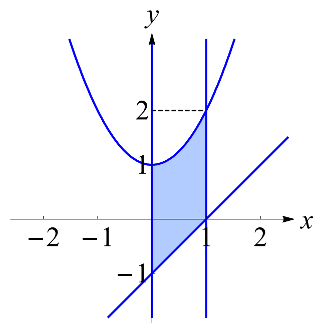
2. Dat je integral $I=\iint\limits_D\left(x^2+\sqrt{y}\right)dxdy$, gde je $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=2\int_0^1 dy$ **B)** $I=\int_1^2\left(\int_0^1\left(x^2+\sqrt{y}\right)dy\right)dx$

C) $I=\int_0^1\int_1^2 x^2+\sqrt{y}\,dx\,dy$ **D)** $I=\int_0^1\left(\frac{7}{3}+\sqrt{y}\right)dy$

E) $I=\int_1^2\left(\int_0^1\left(x^2+\sqrt{y}\right)dx\right)dy$

3.▷ Neka je D zatvorena oblast prikazana na slici 2.1.1. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Oblast D je ograničena krivama: ...
A) $y = x^2 - 1,\, y = x + 1.$
B) $y = x^2 + 1,\, y = x - 1,\, x = 0,\, x = 1.$
C) $y = x^2 + 1,\, y = x - 1,\, y = 0,\, y = 1.$
D) $y = x^2 - 1,\, y = x - 1.$
E) $y = x^2 - 1,\, y = x + 1,\, y = 0,\, y = 1.$



Slika 2.1.1

4.▷ Zaokružiti slova ispred dvostrukih integrala čija je vrednost jednaka veličini površine oblasti D prikazane na slici 2.1.1.

A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2-1}^{x+1} dy\right) dx$ **B)** $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{x+1}^{x^2-1} dy\right) dx$ **C)** $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{1+x^2} dy\right) dx$

D) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{y+1} dx\right) dy + \int_{0}^{2}\left(\int_{\sqrt{y+1}}^{1} dx\right) dy$ **E)** $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{y+1} dx\right) dy + 1 + \int_{1}^{2}\left(\int_{\sqrt{y-1}}^{1} dx\right) dy$

5.▷ Neka je P veličina površine oblasti D prikazane na slici 2.1.1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $P = \dfrac{11}{6}$ **B)** $P = \dfrac{15}{6}$ **C)** $P = 1\dfrac{5}{6}$ **D)** $P = \dfrac{5}{6}$ **E)** $P = 11.6$

6.▷ Neka je f neprekidna realna funkcija dve realne promenljive. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Oblast integracije integrala $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\, dx\right) dy$ je ...
A) zatvorena oblast određena krivama $x = y^2$ i $y = x - 2$.
B) zatvorena oblast određena krivama $y = \sqrt{x}$ i $x = y + 2$.
C) polukrug. **D)** paralelogram. **E)** trougao.

7.▷ Neka su date podintegralne funkcije integrabilne nad skupom $D \subset \mathbb{R}^2$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x+y}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x}\, dxdy + \iint\limits_D \sqrt{y}\, dxdy$

B) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{\frac{x}{y}}\, dxdy = \frac{\iint\limits_D \sqrt{x}\, dxdy}{\iint\limits_D \sqrt{y}\, dxdy}$

C) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x}\, dxdy \cdot \iint\limits_D \sqrt{y}\, dxdy$

D) $\displaystyle\iint\limits_D (\sqrt{x} + \sqrt{y})\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x} dxdy + \iint\limits_D \sqrt{y}\, dxdy$

E) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{\pi xy}\, dxdy = \sqrt{\pi} \iint\limits_D \sqrt{xy}\, dxdy$

8.▷ Neka $D_1, D_2, \dots, D_n$ čine podelu $\mathcal{P}_n$ dvodimenzionalnog skupa D, neka $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ i neka je dvostruki integral definisan izrazom $\displaystyle\lim_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.
A) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je površina oblasti D. **B)** $f(\xi_1, \eta_1)$ je visina pravougaonika.
C) $f(\xi_1, \eta_1)$ je visina cilindričnog tela. **D)** $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je dijametar podele $\mathcal{P}_n$.
E) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je dijametar oblasti D.

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Nakon uvođenja polarnih koordinata ϱ i φ, definisanih sa $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $\varrho \in [0,\infty)$ i $\varphi \in [0,2\pi]$, u integral $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy$, nova podintegralna funkcija će biti ...

A) ϱ. **B)** ϱ^2. **C)** ϱ^3. **D)** $-\sqrt{\varrho}$. **E)** $\sqrt{\varrho}$.

10. Dat je integral $I = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \varrho\,d\varrho\right) d\theta$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \dfrac{\pi}{2}$ **B)** $I = \dfrac{1}{2}$ **C)** $I = \pi$

D) I je polovina površine jediničnog kruga. **E)** I je površina kruga poluprečnika 0.5.

Test 1.4

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Translacijom konusa $z = \sqrt{x^2+y^2}$ duž x-ose u pozitivnom smeru za dve jedinične duži dobija se konus $z = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$.

B) Translacijom konusa $z = \sqrt{x^2+y^2}$ duž y-ose u pozitivnom smeru za dve jedinične duži dobija se konus $z = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$.

C) Presek površi $x^2+y^2-z^2 = 1$ i $z = 0$ je kružnica.

D) Presek površi $x^2-y^2-z^2 = 1$ i $x = 0$ je kružnica.

E) Površi $x^2+y^2+z^2 = 1$ i $y = 1$ se ne seku.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je površ.

B) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je površ.

C) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je površ.

D) Realna funkcija dve realne promenljive preslikava realan broj u realan broj.

E) Realna funkcija dve realne promenljive preslikava uređen par realnih brojeva u realan broj.

3. Neka je $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
U definiciji integrala I ...

A) D je podskup skupa $\mathbb{R}$.

B) D je zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^2$ takav da mu je rub po delovima glatka kriva.

C) Funkcija f je periodična.

D) I je granična vrednost Rimanove integralne sume funkcije f.

E) I je zbir površina određenih podelom oblasti D.

4. Neka je $I = \int_{-2}^1 \left(\int_0^1 2x\sin(x^2+y)\,dx\right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_{-2}^1 \left(\int_0^1 \sin t\,dt\right) dy$ za $t = x^2+y$

B) $I = \int_0^1 \left(\int_{-2}^1 2x\sin(x^2+y)\,dx\right) dy$

C) $I = \int_{-2}^1 \left(\int_y^{y+1} \sin t\,dt\right) dy$ za $t = x^2+y$

D) $I = \int_0^1 \left(\int_{-2}^1 2x\sin(x^2+y)\,dy\right) dx$

E) $I = \int_{-2}^1 \left(\int_0^1 2x\sin t\,dt\right) dy$ za $t = x^2+y$

5. ▷ Neka je T prav valjak sa visinom 2 i osnovom D koja leži u ravni xOy. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Veličina zapremine valjka T je $\iint\limits_D 2\,dxdy$. **B)** Veličina zapremine valjka T je $\iint\limits_T dxdy$.

C) $\iint\limits_T dxdy$ je veličina površine valjka T. **D)** $\iint\limits_D dxdy$ je veličina površine osnove D.

E) Veličina površine površi $y = f(x,y)$ definisane za $(x,y) \in D$ je $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

6. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena krivama: $y = x^2$ i $y = 1$.

A) $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \sqrt{x}\,dx \right) dy$ **B)** $\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x+y)\,dy \right) dx$ **C)** $\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 \sqrt[3]{x}\,dy \right) dx$

D) $\int_{x^2}^1 \left(\int_0^1 \sqrt{y}\,dx \right) dy$ **E)** $\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 x^2\,dx \right) dy$

7. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^1 \left(\int_1^2 (x-y)\,dy \right) dx = 0$ **B)** $\int_{-1}^1 \left(\int_1^2 (x-y)\,dy \right) dx = -3$ **C)** $\int_{-1}^1 \left(\int_1^y xy^2\,dx \right) dy = \frac{1}{5}$

D) $\int_0^1 \left(\int_{-1}^y \sqrt{y^3}\,dx \right) dy = 4$ **E)** $\int_0^1 \left(\int_{-1}^y \sqrt{y^3}\,dx \right) dy = \frac{24}{35}$

8. ▷ Neka je $I_1 = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dy \right) dx$, a $I_2 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin y\,dx \right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = \frac{2}{3}$ **B)** $I_1 = 2$ **C)** $I_2 = 1$ **D)** $I_2 = -1$

E) I_1 je veličina zapremine tela ograničenog površima: $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 0$ i $z = x^2 + y^2$.

9. ▷ Neka su funkcije f i g integrabilne nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$, a F i G neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iint\limits_D F(x)G(y)\,dxdy = F(x)\iint\limits_D G(y)\,dxdy$

B) Ako je $f(x,y) \geq 1$ za svako $(x,y) \in D$, tada je $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq 1$.

C) Ako je $f(x,y) \geq 0$ za svako $(x,y) \in D$, tada je $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq 0$.

D) $\iint\limits_D f(x,y) \cdot g(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \cdot \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

E) $\iint\limits_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

10. ▷ Neka je u integral $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ uvedena smena $x = uv$ i $y = \frac{u}{v}$, pri čemu je $u > 0$ i $v > 0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ **B)** $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{2u}{v}$ **C)** $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

D) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = uv^2 - \frac{u}{v}$ **E)** $I = \iint\limits_D f(u,v)\,dudv$

Test 1.5

1. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je ravan.

B) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ravan.

C) Parabola $y = x^2$ definisana na intervalu $(-1, 1)$ je glatka kriva.

D) Ako je skup $D \subset \mathbb{R}^2$ ograničen, tada postoji pravougaonik koji sadrži skup D.

E) Ako je skup $D \subset \mathbb{R}^2$ ograničen, tada postoji interval koji sadrži skup D.

2. ▷ Neka je skup D ograničen i zatvoren, sa rubom koji je po delovima glatka kriva, a $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Neka je $\mathcal{P}_n = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ proizvoljna podela oblasti D s osobinom da je $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$, a $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, je najviše granična kriva za svako $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Neka su tačke $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ proizvoljno izabrane, redom, iz podoblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenica kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je I dvostruki integral funkcije f nad oblašću D, tada je ...

A) I Rimanova integralna suma.

B) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔD_i visina od D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

C) $I = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$, gde je ΔD_i zapremina od D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

D) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔD_i površina od D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

E) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔD_i površina od D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. ▷ Neka je skup $D \subset \mathbb{R}^2$ ograničen i zatvoren, sa rubom koji je po delovima glatka kriva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy = \iint\limits_D \sin x\,dxdy + \iint\limits_D y\,dxdy$

B) $\iint\limits_D \sin x \cdot \sin y\,dxdy = \iint\limits_D \sin x\,dxdy \cdot \iint\limits_D \sin y\,dxdy$

C) $\iint\limits_D (\sin y + \sin x)\;dxdy = \iint\limits_D \sin y\,dxdy + \iint\limits_D \sin x\,dxdy$

D) $\iint\limits_D \sin\dfrac{x+y}{2}\,dxdy = \dfrac{1}{2}\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$

E) $\iint\limits_D \pi\sin(x+y)\,dxdy = \pi\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$

4. ▷ Neka je $I_1 = \int_0^2 \left(\int_0^y 3x^2\,dx\right) dy$ i $I_2 = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (\sqrt{y} + 2x)\;dy\right) dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 0$ **B)** $I_1 = 4$ **C)** $I_2 = 1$ **D)** $I_2 = 0.5$ **E)** $I_2 = -3$

5. ▷ Neka je $I = \int_{-2}^0 \left(\int_0^1 3\left(x + y^2\right) dy\right) dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = -\int_{-2}^0 \left(x + \dfrac{1}{3}\right) dx$ **B)** $I = 2$ **C)** $I = -2$ **D)** $I = -4$

E) $I = 3\int_{-2}^0 \left(\int_0^1 \left(x + y^2\right) dy\right) dx$

6. Neka je u integral $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ uvedena smena na polarne koordinate: $\rho \in [0,\infty)$ i $\theta \in [0,2\pi]$ i neka je S nova oblast integracije. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) ρ predstavlja rastojanje tačke od koordinatnog početka u xy koordinatnom sistemu.

B) $x = \rho \sin\theta, \quad y = \rho\cos\theta$ **C)** $x = \theta\sin\rho, \quad y = \theta\cos\rho$

D) $I = \iint\limits_S f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta$ **E)** $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = -\rho$

7. Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena krivama: $y = 1$ i $y = |x|$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{|x|}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$ **B)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{|x|}^{1}\sqrt{y}\,dy\right)dx$ **C)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$

D) $\int_{0}^{1}\left(\int_{-y}^{y}(x+y)\,dx\right)dy$ **E)** $\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{1}xy\,dx\right)dy$

8. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Površ data jednačinom $x = z$ je ravan.

B) Površ data jednačinom $x^2 + y^2 = z^2$ je paraboloid.

C) Presek površi $x^2 = z$ i $y = 1$ je parabola.

D) Presek površi $x^2 + y^2 = 1$ i $y = 0$ je jedna prava.

E) Kriva data jednačinom $x^2 + y^2 = 0$ je parabola.

9. Neka je $I = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + 4y)\,dx\right)dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \pi^3$ **B)** $I = \pi + \pi^3$ **C)** $I = \pi^3 - \pi$

D) $I = \int_0^{\pi}(\cos x + 4yx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dy$ **E)** $I = \int_0^{\pi}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dy$

10. Neka je $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ gde je oblast D ograničena i zatvorena, sa rubom koji je po delovima glatka kriva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $f(x,y) \equiv 1$, tada I predstavlja veličinu površine oblasti D.

B) Vrednost integrala I je pozitivna.

C) I predstavlja veličinu zapremine tela ograničenog površima: $z = f(x,y)$, $z = -f(x,y)$ i cilindrom koji u xOy ravni iseca oblast D.

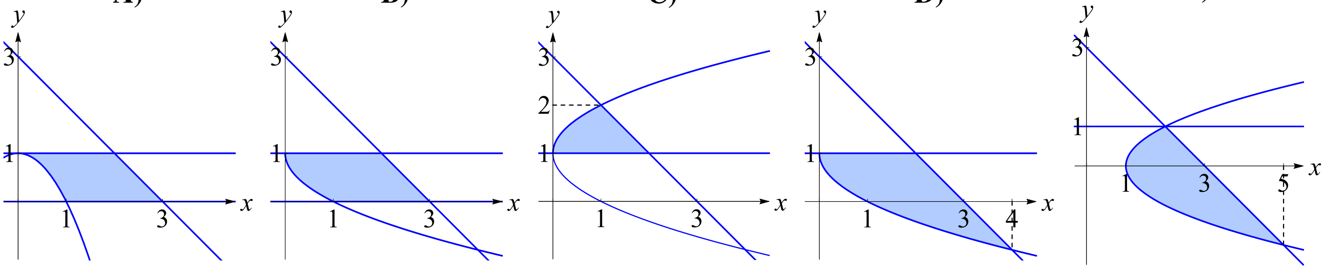
D) I predstavlja veličinu površine oblasti D.

E) Vrednost integrala I ne može biti negativna.

Test 1.6

1. Zaokružiti slovo iznad grafika na kojem je prikazana zatvorena oblast određena krivama: $y = 1 - \sqrt{x}$, $y = 3 - x$, $y = 1$.

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



2.▷ Neka je $I=\iint\limits_S x\,dxdy$, gde je zatvorena oblast S određena krivama $y=1-\sqrt{x}$, $y=3-x$, $y=1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{1-\sqrt{x}}^{3-x} x\,dy\right)dx$ **B)** $I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{(1-y)^2}^{3-y} x\,dx\right)dy$ **C)** $I=\int_{1}^{2}\left(\int_{(1-y)^2}^{3-y} x\,dx\right)dy$

D) $I=\int_{1}^{2}\left(\int_{1-\sqrt{x}}^{3-x} x\,dy\right)dx$ **E)** $I=\int_{0}^{1}\left(\int_{1-\sqrt{x}}^{3-x} x\,dy\right)dx$

3.▷ Neka je P veličina površine oblasti prikazane na grafiku prvog zadatka pod E. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $P=\frac{28}{3}$ **B)** $P=\frac{59}{6}$ **C)** $P=-\frac{15}{2}$ **D)** $P=5\frac{1}{2}$ **E)** $P=\frac{9}{2}$

4.▷ Neka je $I=\int_a^b\left(\int_c^d\left(f(y)+\frac{1}{2}g(x)\right)dx\right)dy$, gde su a, b, c i d realne konstante, a funkcije f i g neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_a^b\left((d-c)f(y)+\frac{1}{2}\int_c^d g(x)\,dx\right)dy$ **B)** $I=2\int_a^b\left(\int_c^d (f(y)+g(x))\,dx\right)dy$

C) $I=\int_a^b f(y)\,dy+\frac{1}{2}\int_c^d g(x)\,dx$ **D)** $I=\frac{1}{2}\left(\int_a^b f(y)\,dy+\int_c^d g(x)\,dx\right)$

E) $I=\int_c^d\left(\int_a^b f(y)\,dy+\frac{1}{2}(b-a)g(x)\right)dx$

5.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-3}^{3}\left(\int_0^1 2x(x^2-1)^2\,dx\right)dy=2$ **B)** $\int_{-3}^{3}\left(\int_0^1 2x(x^2-1)^2\,dx\right)dy=0$

C) $\int_2^3\left(\int_1^e \frac{\ln y}{y}\,dy\right)dx=\frac{1}{2}$ **D)** $\int_2^3\left(\int_1^e \frac{\ln y}{y}\,dy\right)dx=\frac{e^2-1}{2}$ **E)** $\int_2^3\left(\int_1^e \frac{\ln y}{y}\,dy\right)dx=1$

6.▷ Neka je $I=\iint\limits_D dxdy$, gde je D oblast ograničena krivama $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=2$, i neka je uvedena smena na polarne koordinate $\rho\in[0,\infty)$ i $\theta\in[0,2\pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $x=\rho\sin\theta$, $y=\rho\cos\theta$ **B)** $\rho\in[1,2]$ **C)** $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

D) Jakobijan date smene je ρ. **E)** $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$ je Jakobijan date smene.

7.▷ Neka je $I=\iint\limits_D dxdy$, gde je D oblast ograničena krivama $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=2$, i neka je uvedena smena na polarne koordinate $\rho\in[0,\infty)$ i $\theta\in[0,2\pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Oblast D se transformiše u krug. **B)** Oblast D se transformiše u pravougaonik.

C) $I=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\right)d\theta$ **D)** $I=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}}d\rho\right)d\theta$ **E)** $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2\rho\,d\rho\right)d\theta$

8.▷ Zaokružiti slova ispred izraza koji su jednaki veličini zapremine zatvorene oblasti određene površima $y=-x^2$, $y=x^2-2$, $z=0$ i $z=2$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2-2}^{-x^2}dy\right)dx$ **B)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2-2}^{-x^2}2\,dy\right)dx$ **C)** $2\int_{-2}^{0}\left(\int_{x^2-2}^{-x^2}y\,dy\right)dx$

D) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{y+2}}^{-\sqrt{y}}dy\right)dx$ **E)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{y+2}}^{-\sqrt{y}}2\,dy\right)dx$

9. Neka je zatvorena oblast T određena površima: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 9$ i $z = x^2 + y^2 + 3$. Neka je V zapremina tela T, a P površina osnove tela T. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} dxdy$

B) $V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$

C) $V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} (x^2+y^2+3)\, dxdy$

D) $P = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$

E) $P = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} dxdy$

10. U definiciji dvostrukog integrala $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ čine podelu $\mathcal{P}_n$ dvodimenzionalne oblasti D i $(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, su dvodimenzionalne oblasti.

B) $f(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, su dvodimenzionalne oblasti.

C) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je najkraći dijametar među dijametrima oblasti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

D) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je najduži dijametar među dijametrima oblasti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

E) $\Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, su zapremine cilindričnih površi.

Test 1.7

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik realne funkcije jedne realne promenljive je površ.

B) Grafik realne funkcije dve realne promenljive je površ.

C) Površ data jednačinom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ je parabola.

D) Površ data jednačinom $2x^2 + 3y^2 = 1$ je eliptički cilindar.

E) Hiperbola je površ.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Kriva data jednačinom $x^2 = y^2$ je parabola.

B) Površ data jednačinom $x^2 + y^2 = 4$ je sfera.

C) Površ data jednačinom $x^2 = z$ je parabolički cilindar.

D) Presek površi $x^2 = z$ i $y = 0$ je prava.

E) Presek površi $x^2 + y^2 = 1$ i $z = 1$ je kružnica.

3. Neka je D zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^2$ takav da mu je rub po delovima glatka kriva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) U definiciji dvostrukog integrala funkcije f nad D dijametar podele oblasti D teži ka nuli.

B) U definiciji dvostrukog integrala funkcije f nad D dijametar podele oblasti D teži ka ∞.

C) Dvostruki integral nema geometrijsko značenje.

D) Dvostruki integral funkcije f nad oblašću D je definisan kao zbir površina određenih podelom oblasti D.

E) Dvostruki integral funkcije f nad oblašću D je definisan kao granična vrednost Rimanove integralne sume funkcije f za podelu oblasti D.

4.▷ Neka je oblast D ograničena pravama: $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$, pri čemu je $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $a < b$, $c < d$, a f i g su neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iint\limits_D (f(x) + g(y))\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d g(y)\,dy$

B) $\iint\limits_D (f(x) + g(y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x)\,dxdy + \iint\limits_D g(y)\,dxdy$

C) $\iint\limits_D f(x)g(y)\,dxdy = \int_a^b \left(f(x) \int_c^d g(y)\,dy \right) dx$

D) $\iint\limits_D f(x) \cdot g(y)\,dxdy = \int\limits_D f(x)\,dx \cdot \int\limits_D g(y)\,dy$

E) $\iint\limits_D f(x) \cdot g(y)\,dxdy = \iint\limits_D f(x)\,dxdy \cdot \iint\limits_D g(y)\,dxdy$

5.▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena krivama: $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$.

A) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{x}\,dy \right) dx$

B) $\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\,dy \right) dx$

C) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \sqrt[3]{x}\,dx \right) dy$

D) $\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-y} \sqrt{y}\,dx \right) dy$

E) $\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y-1)\,dx \right) dy$

6.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_1^2 \left(\int_0^x (x+y)\,dy \right) dx = 3$

B) $\int_1^2 \left(\int_0^x (x+y)\,dy \right) dx = \frac{7}{2}$

C) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} y\,dx \right) dy = \frac{3}{2}$

D) $\int_0^1 \left(\int_1^{x^2} \sqrt{y^3}\,dy \right) dx = -\frac{25}{12}$

E) $\int_0^1 \left(\int_1^{x^2} \sqrt{y^3}\,dy \right) dx = -\frac{1}{3}$

7.▷ Neka je $I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \frac{3x^2y}{x^3+1}\,dx \right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_{-1}^1 \left(\int_1^2 \frac{y}{t}\,dt \right) dy$ za $t = x^3 + 1$

B) $I = \left(\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^1 y\,dy \right)$

C) $I = \int_{-1}^1 y \left(\int_0^1 \frac{dt}{t} \right) dy$ za $t = x^3 + 1$

D) $I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \frac{3x^2y}{x^3+1}\,dy \right) dx$

E) $I = \int_0^1 y \left(\int_{-1}^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dy \right) dx$

8.▷ Neka je $I_1 = \int_1^e \left(\int_0^1 (2 + \ln y)\,dx \right) dy$, a $I_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 e^x \sin y\,dx \right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 2$

B) $I_1 = 2e + e^{-1} - 3$

C) $I_1 = 2e - 1$

D) $I_2 = 0$

E) $I_2 = 2(e-1)\cos 1$

9. Neka je $I = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dxdy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) I predstavlja veličinu zapremine tela čije osnove leže u ravnima $z = 0$ i $z = 1$, a sa strane je ograničeno cilindrom $x^2 + y^2 = 1$.

B) Ne postoji telo čija je zapremina jednaka sa I.

C) I ne predstavlja veličinu površine jediničnog kruga.

D) I je jednako veličini površine površi koju cilindar $x^2 + y^2 = 1$ iseca iz ravni $z = 1$.

E) Vrednost integrala I je negativna.

10. Neka je u integral $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ uvedena smena na polarne koordinate ρ i θ, gde ρ predstavlja rastojanje tačke od koordinatnog početka, i neka je J Jakobijeva determinanta. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \iint\limits_D f(\rho\sin\theta,\rho\cos\theta)d\rho d\theta$

B) $I = \iint\limits_D f(\rho\sin\theta,\rho\cos\theta)\rho\, d\rho d\theta$

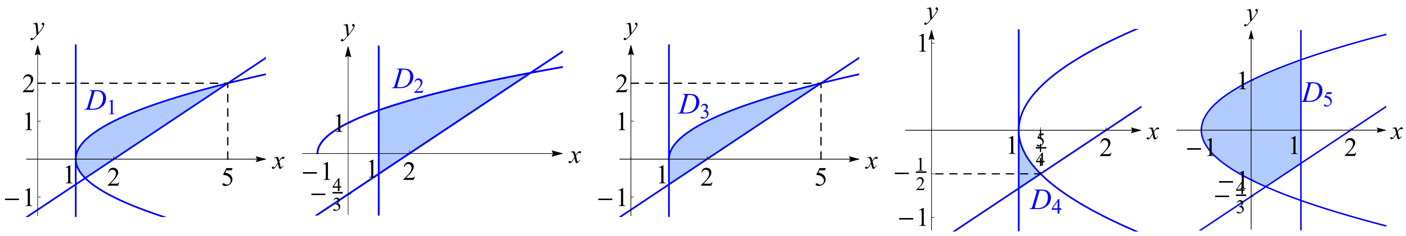
C) $J = \dfrac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix}$

D) $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$

E) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$

Test 1.8

Neka su oblasti D_1, D_2, D_3, D_4 i D_5 definisane kao na sledećim slikama.



1. Zaokružiti slovo ispred oblasti koja je određena krivama $y = \sqrt{x-1}$, $3y = 2x - 4$, $x = 1$.

A) D_1 **B)** D_2 **C)** D_3 **D)** D_4 **E)** D_5

2. Neka je $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, gde je zatvorena oblast D određena krivama $y = \sqrt{x-1}$, $3y = 2x - 4$, $x = 1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_{-\frac{2}{3}}^{2}\left(\int_{\frac{1}{2}(3y+4)}^{y^2+1} f(x,y)dy\right)dx$

B) $I = \int_{1}^{5}\left(\int_{\frac{1}{3}(2x-4)}^{\sqrt{x-1}} f(x,y)dy\right)dx$

C) $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(\int_{y^2+1}^{\frac{1}{2}(3y+4)} f(x,y)dx\right)dy$

D) $I = \int_{-\frac{2}{3}}^{0}\left(\int_{\frac{1}{2}(3y+4)}^{y^2+1} f(x,y)dx\right)dy$

E) $I = \int_{-\frac{2}{3}}^{0}\left(\int_{1}^{\frac{1}{2}(3y+4)} f(x,y)dx\right)dy + \int_{0}^{2}\left(\int_{y^2+1}^{\frac{1}{2}(3y+4)} f(x,y)dx\right)dy$

3. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.

Ako se vrednost integrala $\iint\limits_D dxdy$ računa tako što se prvo integrali po promenljivoj x, a potom po promenljivoj y, tada se oblast D ne mora podeliti na dva dela za ...

A) $D = D_1$. **B)** $D = D_2$. **C)** $D = D_3$. **D)** $D = D_4$. **E)** $D = D_5$.

4. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.

U definiciji dvostrukog integrala $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ ...

A) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je minimalna površina oblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

B) $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ za svako $i = 1,2,\ldots,n$.

C) ΔD_i predstavlja zapreminu.

D) $D_1, D_2, \ldots, D_n$ čine podelu $\mathcal{P}_n$ dvodimenzionalnog skupa D.

E) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je maksimalna vrednost među visinama $f(\xi_1,\eta_1), f(\xi_2,\eta_2),\ldots, f(\xi_n,\eta_n)$.

5. Zaokružiti slova ispred krivih koje određuju zatvorenu oblast.

A) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$ **B)** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ **C)** $\frac{x^2}{3}-\frac{y}{5}=1$ **D)** $\frac{x^2}{3}+\frac{y}{5}=1$ **E)** $\frac{x}{3}+\frac{y^2}{5}=1$

6. Neka je $I=\iint\limits_S \alpha f(x,y)\cdot g(x,y)\,dxdy$, gde su funkcije f i g integrabilne nad S, a S je zatvorena oblast određena krivama $y=x$, $y=2-x$ i $y=0$. Neka je S_1 zatvorena oblast određena krivama $y=x$, $y=0$ i $x=1$, a S_2 zatvorena oblast određena krivama $x=1$, $y=2-x$ i $y=0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\alpha\left(\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy\cdot g(x,y)+f(x,y)\cdot\iint\limits_S g(x,y)\,dxdy\right)$

B) $I=\alpha\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy\cdot\iint\limits_S g(x,y)\,dxdy$

C) $I=\alpha\iint\limits_S f(x,y)\cdot g(x,y)\,dxdy$

D) $I=\alpha\left(\iint\limits_{S_1} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{S_2} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dxdy\right)$

E) $I=\alpha\left(\iint\limits_{S_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{S_2} g(x,y)\,dxdy\right)$

7. Neka je $I=\int_{-4}^{4}\left(\int_1^3 x\ln(x^2+7)\,dx\right)dy$ i $t=x^2+7$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}\left(\int_1^3 \ln t\,dt\right)dy$ **B)** $I=\int_{-4}^{4}\left(\int_1^3 \frac{\ln t}{2}\,dt\right)dy$ **C)** $I=8\int_1^3 x\ln(x^2+7)\,dx$

D) $I=\int_1^3\left(\int_{-4}^{4} x\ln(x^2+7)\,dy\right)dx$ **E)** I je veličina površine oblasti integracije.

8. Neka je $I=\iint\limits_D dxdy$, pri čemu je D zatvoren i ograničen skup takav da mu je rub po delovima glatka kriva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) D je dvodimenzionalna oblast i I predstavlja veličinu površine oblasti D.

B) D je trodimenzionalna oblast i I predstavlja veličinu zapremine oblasti D.

C) D je dvodimenzionalna oblast i I predstavlja veličinu zapremine oblasti D.

D) I predstavlja veličinu zapremine tela određenog ravnima $z=0$ i $z=1$ i pravom cilindričnom površi koja u xOy ravni iseca oblast D.

E) I ne može da predstavlja veličinu zapremine trodimenzionalne oblasti.

9. Neka je za integral $\iint\limits_D y\,dxdy$ uvedena smena promenljivih $x = 3\rho\cos\theta$, $y = 5\rho\sin\theta$, gde je $\rho \ge 0$ i $\theta \in [0, 2\pi]$, i neka je $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $J = \rho$ **B)** $J = 15\rho$ **C)** $J = 0$ **D)** $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{vmatrix}$ **E)** $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix}$

10. Neka je za integral $I = \iint\limits_D y\,dxdy$ uvedena smena promenljivih $x = 3\rho\cos\theta$, $y = 5\rho\sin\theta$, gde je $\rho \ge 0$ i $\theta \in [0, 2\pi]$, i neka je $D_{\rho\theta}$ oblast određena graničnim krivama oblasti D zapisanim preko promenljivih ρ i θ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \iint\limits_D 5\rho\sin\theta d\rho d\theta$ **B)** $I = \iint\limits_{D_{\rho\theta}} 5\rho\sin\theta d\rho d\theta$ **C)** $I = \iint\limits_{D_{\rho\theta}} 5\rho^2\sin\theta d\rho d\theta$

D) $I = \iint\limits_{D_{\rho\theta}} 75\rho^2\cos\theta d\rho d\theta$ **E)** $I = \iint\limits_{D_{\rho\theta}} 75\rho^2\sin\theta d\rho d\theta$

Test 1.9

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Translacijom jedinične kružnice sa centrom u koordinatnom početku duž x-ose u pozitivnom smeru za 4 jedinične duži dobija se kružnica $(x+4)^2 + y^2 = 1$.

B) Translacijom jedinične kružnice sa centrom u koordinatnom početku duž y-ose u negativnom smeru za 3 jedinične duži dobija se kružnica $x^2 + (y+3)^2 = 1$.

C) Presek površi $x^2 - y^2 = 1$ i $z = 1$ je hiperbola.

D) Presek krivih $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 - y^2 = 1$ je tačka.

E) Presek krivih $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 - y^2 = 1$ je prava.

2. Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena krivama: $x = 0$, $y = 0$ i $x - y = 1$.

A) $\int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 x\,dy\right) dx$ **B)** $\int_0^1 \left(\int_0^1 (x-y)\,dy\right) dx$ **C)** $\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1+y} \sqrt[3]{y}\,dx\right) dy$

D) $\int_0^1 \left(\int_0^1 (x-y-1)\,dx\right) dy$ **E)** $\int_{-1}^0 \left(\int_0^{y+1} \sqrt[3]{x}\,dx\right) dy$

3. Neka je $I = \int_0^1 \left(\int_{-2}^1 (x+y^2)\,dx\right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = -\dfrac{1}{2}$ **B)** $I = -\dfrac{11}{6}$ **C)** $I = -\dfrac{5}{2}$

D) $I = \int_{-2}^1 \left(\int_0^1 (x+y^2)\,dy\right) dx$ **E)** $I = \int_{-2}^1 x\,dx + \int_0^1 y^2 dy$

4. Neka je $I = \int_0^1 \left(\int_0^1 2\sin(2y+1)\,dy\right) dx$ i $t = 2y+1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = 2\int_0^1 \left(\int_0^1 \sin t\,dt\right) dx$ **B)** $I = \int_0^1 (1-\cos 1) dx$ **C)** $I = \int_0^1 \left(\int_1^3 \sin t\,dt\right) dx$

D) $I = \int_0^1 (\cos 3 - \cos 1) dx$ **E)** $I = \left(\int_1^3 \sin t\,dt\right) \cdot \left(\int_0^1 dx\right)$

5.▷ Neka je $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, pri čemu je D zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^2$ takav da mu je rub po delovima glatka kriva. Rimanova integralna suma funkcije f za podelu $\mathcal{P}_n = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ oblasti D je definisana sa $I_n(f, \mathcal{P}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) I je definisan kao granična vrednost od $I_n(f, \mathcal{P}_n)$ kada maksimalni dijametar podele oblasti D teži ka 0.

B) ΔD_i je površina oblasti D_i, gde je $i = 1, 2 \ldots, n$.

C) ΔD_i je zapremina cilindričnog tela čija je osnova D_i, a visina $f(\xi_i, \eta_i)$, gde je $i = 1, 2 \ldots, n$.

D) I je definisan kao granična vrednost od $I_n(f, \mathcal{P}_n)$ kada maksimalni dijametar podele oblasti D teži ka ∞.

E) $I = I_n(f, \mathcal{P}_n)$

6.▷ Neka su funkcije f i g integrabilne nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$, a F i G neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iint\limits_D F(x) \cdot G(y)\, dxdy = \iint\limits_D F(x)\, dxdy \cdot \iint\limits_D G(y)\, dxdy$

B) $\iint\limits_D F(x) \cdot G(y)\, dxdy = F(x) \cdot \iint\limits_D G(y)\, dxdy$

C) Ako je $D = D_1 \cup D_2$, tada je $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy$.

D) Ako je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2$ najviše kriva, tada je $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy$.

E) $\iint\limits_D (3f(x,y) - g(x,y))\, dxdy = 3\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy - \iint\limits_D g(x,y)\, dxdy$

7.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Podintegralna funkcija dvostrukog integrala je realna funkcija dve realne promenljive.

B) Podintegralna funkcija dvostrukog integrala je realna funkcija jedne realne promenljive.

C) Geometrijsko značenje dvostrukog integrala je veličina zapremine tela između površi definisane podintegralnom funkcijom nad oblašću integracije i ravni $z = 0$.

D) Geometrijsko značenje dvostrukog integrala je veličina površine zatvorene oblasti između krive određene podintegralnom funkcijom nad oblašću integracije i x-ose.

E) Podintegralna funkcija dvostrukog integrala je funkcija koja preslikava podskup skupa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$.

8.▷ Neka je $I_1 = \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{2} 2y(x+1)\, dy \right) dx$, a $I_2 = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} y^2\, dy \right) dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 0$ **B)** $I_1 = 6$ **C)** $I_2 = 0$ **D)** $I_2 = \frac{2}{3}$ **E)** $I_2 = \frac{4}{7}$

9.▷ Neka je $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} f(x,y)\, dxdy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) I predstavlja veličinu zapremine tela pravog valjka čija je donja osnova jedinični krug u ravni $z = 0$, a visina 1.

B) Za $f(x,y) \ge 0$ I predstavlja veličinu zapremine tela ograničenog površima: $x^2 + y^2 = 1$, $z = f(x,y)$ i $z = 0$.

C) Za $f(x,y) \equiv 1$ I predstavlja veličinu površine površi $x^2 + y^2 = 1$.

D) Za $f(x,y) \equiv 1$ I predstavlja veličinu površine oblasti $x^2 + y^2 \le 1$.

E) Vrednost integrala I ne može biti negativna.

10. Neka je u integral $I = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} dxdy$ uvedena smena na polarne koordinate: $\rho \in [0,\infty)$ i $\theta \in [0,2\pi]$ i neka je S nova oblast integracije. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \iint\limits_{S} d\rho d\theta$ **B)** $I = \iint\limits_{S} \rho^2 \cos\theta \, d\rho d\theta$ **C)** S je pravougaonik.

D) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ **E)** $x = \rho\sin\theta,\ y = \rho\cos\theta$

Test 1.10

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je površ.

B) Grafik funkcije $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je površ.

C) Kriva $y = |x|$ definisana na intervalu $(-1,1)$ je glatka.

D) Ako skup $D \subset \mathbb{R}^2$ nije ograničen, tada postoji pravougaonik koji sadrži skup D.

E) Ako je skup $D \subset \mathbb{R}$ ograničen, tada postoji zatvoreni interval koji sadrži skup D.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Površ data jednačinom $x = y$ je ravan.

B) Površ data jednačinom $x^2 + y^2 = z$ je paraboloid.

C) Presek površi $x^2 = z$ i $z = 1$ je parabola.

D) Presek površi $x^2 + y^2 = 1$ i $y = 0$ su dve tačke.

E) Kriva data jednačinom $x^2 - y^2 = 0$ je parabola.

3. Neka je skup D ograničen i zatvoren, sa rubom koji je po delovima glatka kriva, a $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Neka je $\mathcal{P}_n = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ proizvoljna podela oblasti D s osobinom da je $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$, a $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, je najviše granična kriva za svako $i,j = 1,2,\ldots,n$. Neka su tačke $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\ldots,(\xi_n,\eta_n)$ proizvoljno izabrane, redom, iz podoblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenica kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je I dvostruki integral funkcije f nad oblašću D, tada je ...

A) I Rimanova integralna suma.

B) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔD_i visina od D_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

C) $I = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$, gde je ΔD_i dijametar od D_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

D) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔD_i površina od D_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

E) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔD_i zapremina od D_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

4. Neka je u integral $I = \iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy$ uvedena smena na polarne koordinate: $\rho \in [0,\infty)$ i $\theta \in [0,2\pi]$ i neka je S nova oblast integracije. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) ρ predstavlja rastojanje tačke od koordinatnog početka u xy koordinatnom sistemu.

B) $x = \rho\sin\theta, \quad y = \rho\cos\theta$ **C)** $x = \theta\sin\rho, \quad y = \theta\cos\rho$

D) $I = \iint\limits_{S} f(\rho\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho \, d\rho d\theta$ **E)** $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$

5. Neka je dvodimenzionalna oblast D ograničena i zatvorena, sa rubom koji je po delovima glatka kriva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy = \iint\limits_D \cos x\,dxdy + \iint\limits_D y\,dxdy$

B) $\iint\limits_D (\cos x + \cos y)\;dxdy = \iint\limits_D \cos x\,dxdy + \iint\limits_D \cos y\,dxdy$

C) $\iint\limits_D (\cos y + \cos x)\;dxdy = \iint\limits_{D_1} \cos y\,dxdy + \iint\limits_{D_2} \cos x\,dxdy$, gde je $D = D_1 \cup D_2$

D) $\iint\limits_D \dfrac{\cos(x+y)}{2}\,dxdy = \dfrac{1}{2}\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$

E) $\iint\limits_D \cos(\pi x+y)\,dxdy = \pi\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$

6. Neka je $I_1 = \int_0^2 \left(\int_x^2 3x^2\,dy\right)dx$, a $I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} (\sqrt{y}+2x)\;dx\right)dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 0$ **B)** $I_1 = 4$ **C)** $I_2 = 1$ **D)** $I_2 = 0.5$ **E)** $I_2 = -3$

7. Neka je $I = \int_{-2}^{0} \left(\int_0^1 \frac{3}{2}\left(x+y^2\right)dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = -\dfrac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(x+\dfrac{1}{3}\right)dx$ **B)** $I = 1$ **C)** $I = -1$ **D)** $I = -2$

E) $I = \dfrac{3}{2}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^1 \left(x+y^2\right)dy\right)dx$

8. Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena krivama: $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$ i $y = x^2$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_1^{x^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\right)dy$ **B)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$ **C)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}\sqrt{y}\,dy\right)dx$

D) $\int_0^1\left(\int_{-1}^{1} xy\,dx\right)dy$ **E)** $\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx\right)dy$

9. Neka je $I = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+4y)\,dx\right)dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \pi^3$ **B)** $I = \pi^3 - \pi$ **C)** $I = \pi + \pi^3$

D) $I = \int_0^{\pi}(-\sin x + 4yx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dy$ **E)** $I = \int_0^{\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dy$

10. Neka je $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ gde je oblast D ograničena i zatvorena, sa rubom koji je po delovima glatka kriva, a funkcija f neprekidna na D. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $f(x,y) \equiv 1$, tada I predstavlja veličinu površine oblasti D.

B) I predstavlja veličinu površine oblasti D.

C) I predstavlja veličinu zapremine tela ograničenog površima: $z = f(x,y)$, $z = 0$ i pravim cilindrom koji u xOy ravni iseca oblast D.

D) I predstavlja veličinu površine površi $x = f(x,y)$ definisane za $(x,y) \in D$.

E) Vrednost integrala I je nenegativna.

2.2 Trostruki integrali

Test 2.1

1. ▷ Zaokružiti slova ispred parova površi čiji presek je kružnica.

A) $x^2+y^2=1,\ y=0$ **B)** $z^2=x^2+y^2,\ z=2$ **C)** $x+y+z=3,\ z=0$

D) $z=x^2+y^2,\ z=3$ **E)** $z=x^2,\ y=1$

2. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.

U definiciji trostrukog integrala $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$ ...

A) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je zapremina najveće podoblasti u podeli $\mathcal{P}_n$ oblasti T.

B) $T_1\cap T_2\cap\ldots\cap T_n=T$

C) ΔT_i je zapremina podoblasti T_i, za $i=1,2,\ldots,n$.

D) (ξ_3,η_3,ζ_3) je proizvoljna tačka oblasti T_3.

E) $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$ je zapremina podoblasti T_i, za $i=1,2,\ldots,n$.

3. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena površima: $x=0$, $x=3$, $z=4$ i $z=y^2$.

A) $\int_0^2\left(\int_{-2}^2\left(\int_0^3 z\,dz\right)dy\right)dx$ **B)** $\int_0^2\left(\int_{y^2}^4\left(\int_0^3 \sqrt{x}\,dx\right)dz\right)dy$

C) $\int_{-2}^2\left(\int_0^3\left(\int_{y^2}^4 \sqrt[3]{y}\,dz\right)dx\right)dy$ **D)** $\int_0^2\left(\int_{-2}^2\left(\int_0^3 dx\right)dy\right)dz$

E) $\int_{-2}^2\left(\int_{y^2}^4\left(\int_0^3 (y+1)\,dx\right)dz\right)dy$

4. ▷ U xyz koordinatnom sistemu, sa koordinatnim početkom O, su date površ $x^2+y^2=4$ i tačka T koja leži na njoj. Neka su $\rho\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$ i $h\in\mathbb{R}$ cilindrične koordinate. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) θ predstavlja ugao između duži OT i pozitivnog dela x-ose.

B) θ predstavlja ugao između duži OT i pozitivnog dela y-ose.

C) θ predstavlja ugao između duži OT i pozitivnog dela z-ose.

D) Površ $x^2+y^2=4$ u $\rho\theta h$ koordinatnom sistemu ima jednačinu $\rho=2$.

E) $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ h=z$

5. ▷ Neka je trodimenzionalna oblast T zatvorena, ograničena i sa rubom koji je po delovima glatka površ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T (x+z)\,dxdydz = \iiint\limits_T x\,dxdydz + \iiint\limits_T z\,dxdydz$

B) $\iiint\limits_T (x\cdot z)\,dxdydz = \iiint\limits_T x\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T z\,dxdydz$

C) $\iiint\limits_T \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dxdydz \geq 0$

D) $\iiint\limits_T x\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} x\,dxdydz + \iiint\limits_{T_2} x\,dxdydz$ za proizvoljne oblasti T_1 i T_2 takve da je $T_1\cup T_2=T$.

E) $\iiint\limits_T y\cdot z\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} y\,dxdydz \cdot \iiint\limits_{T_2} z\,dxdydz$ za proizvoljne oblasti T_1 i T_2 takve da je $T_1\cup T_2=T$.

6. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{z} yz\,dx\right)dy\right)dz = \left(\int_{-1}^{1} z\,dz\right)\left(\int_{0}^{1} y\,dy\right)\left(\int_{0}^{z} dx\right)$

B) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{z} yz\,dx\right)dy\right)dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} yz^2\,dy\right)dz$

C) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{z} yz\,dx\right)dy\right)dz = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{z}\left(\int_{-1}^{1} yz\,dz\right)dx\right)dy$

D) $\int_{0}^{2}\left(\int_{-2}^{z}\left(\int_{0}^{3} xe^{x+y}\,dx\right)dy\right)dz = 2\int_{0}^{3}\left(\int_{-2}^{z} xe^{x+y}\,dy\right)dx$

E) $\int_{0}^{2}\left(\int_{-2}^{z}\left(\int_{0}^{3} xe^{x+y}\,dx\right)dy\right)dz = \int_{0}^{2}\left(\int_{-2}^{z} e^{y}\left(xe^{x}\Big|_{0}^{3} - \int_{0}^{3} e^{x}\,dx\right)dy\right)dz$

7. ▷ Neka je $I = \iiint\limits_{T} e^{x}\cos y\,dxdydz$, pri čemu je zatvorena oblast T određena površima: $x = 0$, $x = 1$, $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = -2$ i $z = 3$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \left(\int_{0}^{1} e^{x}\,dx\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy\right)\left(\int_{-2}^{3} dz\right)$ **B)** $I = \int_{0}^{1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-2}^{3} e^{x}\cos y\,dx\,dy\,dz$

C) $I = -10e$ **D)** $I = 2\left(e^{3} - e^{-2}\right)$ **E)** $I = 10(e-1)$

8. ▷ Neka je zatvorena oblast T određena površima: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ i $z = x+1$. Neka je V zapremina tela T. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V = \iiint\limits_{T}(x+1)\,dxdydz$ **B)** $V = \iiint\limits_{T}(z-1)\,dxdydz$ **C)** $V = \iiint\limits_{T} dxdydz$

D) $V = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x+1} dz\right)dy\right)dx$ **E)** $V = \int_{0}^{x+1}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} dz\right)dy\right)dx$

9. ▷ Neka je $I = \int_{1}^{3}\left(\int_{4}^{7}\left(\int_{-1}^{1} 6xz^2\,dz\right)dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = 0$ **B)** $I = 48$ **C)** $I = 20$ **D)** $I = 72$ **E)** $I = 288$

10. ▷ Neka je $I = \int_{3}^{4}\left(\int_{5}^{8}\left(\int_{-1}^{3}(2x+z)\,dx\right)dy\right)dz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = 66$ **B)** $I = 24$ **C)** $I = \frac{69}{2}$ **D)** $I = 108$ **E)** $I = 96$

Test 2.2

1. ▷ Zaokružiti slova ispred površi za koje važi da im sve nivo linije imaju iste jednačine.

A) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ **B)** $x^2 + y^2 = z^2$ **C)** $x^2 + y^2 = z$ **D)** $x^2 + y^2 = 4$ **E)** $x^2 = z$

2. ▷ Neka je $I = \int_{-3}^{3}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{1}^{y^3}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\right)dy\right)dz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = 0$ **B)** $I = \frac{9}{2}$ **C)** $I = \frac{36}{5}$ **D)** $I = -\frac{33}{2}$ **E)** $I = \frac{36}{11}$

3. ▷ Zaokružiti slova ispred vrednosti koje su jednake zapremini oblasti određene površima $x + y = 2$, $z = -2$, $x = 0$, $y = 0$ i $z = 3$.

A) 10 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 0 **E)** 2

4. Neka su f i g realne funkcije tri realne promenljive koje su integrabilne nad trodimenzionalnom oblašću T. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dxdydz$ ako je $T = T_1 \cap T_2$.

B) $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dxdydz$ ako je $T = T_1 \cup T_2$, a $T_1 \cap T_2$ je granična površ tela T_1 i T_2.

C) $\iiint\limits_T \left(f(x,y,z) + g(x,y,z)\right)\,dxdydz = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz$

D) $\iiint\limits_T f(x,y,z)\cdot g(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz$

E) $\iiint\limits_T \left(f(x,y,z)\right)^2\,dxdydz = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$

5. Neka je T trodimenzionalna oblast takva da su date podintegralne funkcije integrabilne nad njome. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T \pi \sin x \cdot \ln y \cdot \operatorname{tg} z\,dxdydz = \pi \iiint\limits_T \sin x\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T \ln y\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T \operatorname{tg} z\,dxdydz$

B) $\iiint\limits_T \left(\pi \sin x - \ln y \cdot \operatorname{tg} z\right)\,dxdydz = \pi \left(\iiint\limits_T \sin x\,dxdydz - \iiint\limits_T \ln y \cdot \operatorname{tg} z\,dxdydz \right)$

C) $\iiint\limits_T \left(\pi \sin x - \ln y \cdot \operatorname{tg} z\right)\,dxdydz = \pi \iiint\limits_T \sin x\,dxdydz - \iiint\limits_T \ln y\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T \operatorname{tg} z\,dxdydz$

D) $\iiint\limits_T \left(\ln 7 \cdot \sin x + 3\operatorname{tg}^2 z\right)\,dxdydz = \ln 7 \iiint\limits_T \sin x\,dxdydz + 3\iiint\limits_T \operatorname{tg}^2 z\,dxdydz$

E) $\iiint\limits_T \left(xy + \ln 7 \cdot e^y - \operatorname{tg}^2 3z\right)\,dxdydz = \iiint\limits_T xy\,dxdydz + \ln 7 \iiint\limits_T e^y\,dxdydz - \iiint\limits_T \operatorname{tg}^2 3z\,dxdydz$

6. Neka je $I = \int_1^2 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^x \sin y\,dz \right) dy \right) dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_0^\pi \left(\int_1^2 \left(\int_0^x \sin y\,dz \right) dx \right) dy$

B) $I = 0$ **C)** $I = 3$ **D)** $I = 2$ **E)** $I = -3$

7. Neka je $I = \iiint\limits_T dxdydz$, gde je T telo koje je određeno površima $y = x^2$, $x = y^2$, $z = -1$ i $z = 1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{y^2} \left(\int_0^1 dx \right) dy \right) dz$

B) $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(\int_{-1}^1 dz \right) dy \right) dx$

C) $I = \int_{-1}^1 (y^2 - x^2)\,dz$

D) $I = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dz \right) dx$

E) $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(\int_{-1}^1 dx \right) dy \right) dz$

8. Neka je $I = \iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gde je T trodimenzionalna oblast određena sa sferom $x^2+y^2+z^2 = 4\pi^2$, i neka je uvedena smena na sferne koordinate ρ, θ i φ, pri čemu su ρ, θ i φ definisani kao na slici 2.2.1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

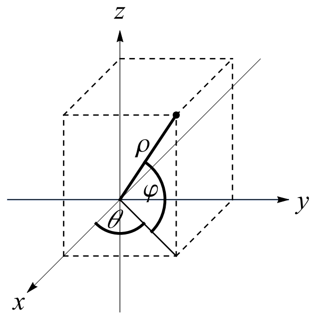
A) $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

B) Apsolutna vrednost Jakobijana uvedene smene je $\rho^2 \cos\varphi$.

C) Nova podintegralna funkcija je $\rho^2 \cos\varphi$.

D) Oblast T se transformiše u kocku.

E) Nova oblast integracije je određena ravnima: $\rho = 0$, $\rho = 2\pi$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Slika 2.2.1

9. Neka je V zapremina jedinične lopte L sa centrom u koordinatnom početku i neka su ρ, θ i φ sferne koordinate definisane kao na slici 2.2.1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V = \iiint\limits_L \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$

B) $V = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} dz\right) dy\right) dx$

C) $V = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\right) dy\right) dx$

D) $V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1} d\rho\right) d\theta\right) d\varphi$

E) $V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{1} \rho^2\cos\varphi\, d\rho\right) d\theta\right) d\varphi$

10. Neka je $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$, pri čemu je T zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^3$ takav da mu je rub po delovima glatka površ. Rimanova integralna suma funkcije f za podelu $\mathcal{P}_n = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ oblasti T je definisana sa $I_n(f, \mathcal{P}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) ΔT_i je zapremina cilindričnog tela čija je osnova T_i, a visina $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, gde je $i = 1, 2\ldots, n$.

B) ΔT_i je zapremina tela T_i, gde je $i = 1, 2\ldots, n$.

C) I je definisan kao granična vrednost od $I_n(f, \mathcal{P}_n)$ kada dijametar podele oblasti T teži ka ∞.

D) I je definisan kao granična vrednost od $I_n(f, \mathcal{P}_n)$ kada dijametar podele oblasti T teži ka 0.

E) $I = I_n(f, \mathcal{P}_n)$

Test 2.3

1. Neka je T zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^3$ takav da mu je rub po delovima glatka površ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) U definiciji trostrukog integrala funkcije f nad T dijametar podele oblasti T teži ka ∞.

B) U definiciji trostrukog integrala funkcije f nad T dijametar podele oblasti T teži ka nuli.

C) Trostruki integral funkcije f nad oblašću T je definisan kao zbir zapremina određenih podelom oblasti T.

D) Trostruki integral nema geometrijsko značenje.

E) Trostruki integral funkcije f nad oblašću T je definisan kao Rimanova integralna suma funkcije f za podelu oblasti T.

2. Dat je integral $I = \int_0^2\left(\int_0^3\left(\int_0^4 x^3y^2z\,dz\right) dy\right) dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = 4\cdot 8\cdot 9$ **B)** $I = 489$ **C)** $I = 48$

D) Oblast integracije je kvadar. **E)** Oblast integracije je kocka.

3. Neka je skup $T \subset \mathbb{R}^3$ zatvoren, ograničen i sa rubom koji je po delovima glatka površ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T (3+9x)\,dxdydz = 3\iiint\limits_T dxdydz + 3\iiint\limits_T x\,dxdydz$

B) $\iiint\limits_T xy^5\,dxdydz = \iiint\limits_T x^5 dxdydz \cdot \iiint\limits_T y^5 dxdydz$

C) $\iiint\limits_T y\,dxdydz = y\iiint\limits_T dxdydz$

D) $\iiint\limits_T (3x+y-z)\,dxdydz = 3\iiint\limits_T x\,dxdydz + \iiint\limits_T (y-z)\,dxdydz$

E) $\iiint\limits_T \sqrt{2}\,dxdydz = \sqrt{2}\iiint\limits_T dxdydz$

4. Dat je integral $I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_0^1 \sqrt{\varrho}\,d\varrho\right)dh\right)d\theta$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \sqrt{\varrho}\left(\int_0^1 d\varrho\right)dh\right)d\theta$

B) $I = \int_0^{2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{\varrho}\,d\varrho\right)d\theta\right)dh$

C) $I = \int_0^{2\pi}\sqrt{\varrho}\left(\int_0^2\left(\int_0^1 d\varrho\right)dh\right)d\theta$

D) $I = 2\pi$

E) $I = \left(\int_0^1 \sqrt{\varrho}\,d\varrho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^2 dh\right)$

5. Dat je integral $I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 \varrho\,d\varrho\right)dh\right)d\theta$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \pi$

B) $I = 2\pi$

C) $I = 4\pi$

D) I je površina omotača pravog valjka visine 1 i baze poluprečnika 1.

E) I je zapremina pravog valjka visine 1 i baze poluprečnika 1.

6. Neka je telo T određeno površima $z=0$, $z=4$ i $x^2+y^2=1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Telo T je prizma.

B) Telo T je krug.

C) Telo T je valjak.

D) Projekcija tela T na ravan $z=0$ je jedinični krug.

E) Projekcija tela T na ravan $z=0$ je pravougaonik površine 4.

7. Neka je $I = \int_0^2\left(\int_0^{2-x}\left(\int_0^{x^2+z^2+1} dy\right)dz\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Zapremina tela $T_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1\}$ je data sa integralom I.

B) Zapremina tela $T_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le z\le 2-x,\ 0\le y\le x^2+z^2+1\}$ je data sa integralom I.

C) $I = \int_0^2\left(x^2\,(z)\Big|_0^{2-x} + \left(\frac{z^3}{3}+z\right)\Big|_0^{2-x}\right)dx.$

D) $I = \int_0^{2-x}\left(\int_0^2\left(\int_0^{x^2+z^2+1} dy\right)dx\right)dz.$

E) Površina omotača tela $T_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le z\le 2-x,\ 0\le y\le x^2+z^2+1\}$ je data sa integralom I.

8. ▷ Neka je D zatvorena dvodimenzionalna oblast određena krivom $x^2+y^2=1$. Zaokružiti slova ispred vrednosti V koje odgovaraju zapremini tela koje je ograničeno: paraboloidom $z=x^2+y^2$, cilindričnom površi $x^2+y^2=1$ i ravni $z=0$.

A) $V=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$ **B)** $V=\iint\limits_D \left(\int_1^{x^2+y^2} dz\right)dxdy$ **C)** $V=\iint\limits_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz\right)dxdy$

D) $V=\iint\limits_D \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dxdy$ **E)** $V=\iint\limits_D (x^2+y^2-1)\,dxdy$

9. ▷ Neka je telo T određeno površima $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=-1$, $y=1$, $z=2$. Zaokružiti slova ispred izraza koji su jednaki integralu $\iiint\limits_T dxdydz$.

A) 2 **B)** $\int_0^2\left(\int_0^1 dy\right)dz$ **C)** $\int_0^2\left(\int_0^1 (-1)\,dy\right)dz$

D) $\int_{-1}^0\left(\int_0^2 (-1)\,dz\right)dx$ **E)** $\int_{-1}^0\left(\int_0^2\left(\int_0^1 dy\right)dz\right)dx$

10. ▷ Neka je integral $I=\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ i neka su uvedene sferne koordinate ϱ, φ i θ, definisane sa $x=\varrho\cos\varphi\cos\theta$, $y=\varrho\cos\varphi\sin\theta$, $z=\varrho\sin\varphi$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Nova podintegralna funkcija biće ϱ^2.

B) Nova podintegralna funkcija biće $\varrho^3\sin\varphi$.

C) Nova podintegralna funkcija biće $\varrho^3\cos\varphi$.

D) Ako je T jedinična lopta sa centrom u koordinatnom početku, tada je $I=\dfrac{\pi}{2}$.

E) Ako je T jedinična lopta sa centrom u koordinatnom početku, tada je $I=2\pi$.

Test 2.4

1. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik funkcije $f: D\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ je površ.

B) Grafik funkcije $f: S\in\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je površ.

C) Paraboloid $z=x^2+y^2$ definisan na krugu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ je glatka površ.

D) Ako je skup $T\subset\mathbb{R}^3$ ograničen, tada postoji kvadar koji sadrži skup T.

E) Ako je skup $T\subset\mathbb{R}^3$ ograničen, tada postoji pravougaonik koji sadrži skup T.

2. ▷ Neka je $I_1=\int_0^2\left(\int_0^y\left(\int_0^x 6z\,dz\right)dx\right)dy$, $I_2=\int_1^2\left(\int_0^1\left(\int_{x^2}^1(\sqrt{y}+2x)\,dy\right)dx\right)dz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1=0$ **B)** $I_1=4$ **C)** $I_2=1$ **D)** $I_2=0.5$ **E)** $I_2=-3$

3. ▷ Neka je $I=\int_{-2}^0\left(\int_0^1\left(\int_{-2}^1 (x+y^2)\,dz\right)dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=-\int_{-2}^0\left(x+\dfrac{1}{3}\right)dx$ **B)** $I=2$ **C)** $I=-2$ **D)** $I=-4$

E) $I=3\int_{-2}^0\left(\int_0^1 (x+y^2)\,dy\right)dx$

4. Neka je skup T ograničen i zatvoren, sa rubom koji je po delovima glatka površ, a $f : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Neka je $\mathcal{P}_n = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ proizvoljna podela oblasti T s osobinom da je $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$, a $T_i \cap T_j$, $i \neq j$, je najviše granična površ za svako $i, j = 1, 2, \dots, n$. Neka su tačke (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), $\dots$, (ξ_n, η_n, ζ_n) proizvoljno izabrane, redom, iz podoblasti $T_1, T_2, \dots, T_n$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenica kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je I trostruki integral funkcije f nad oblašću T, tada je ...

A) I Rimanova integralna suma.

B) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔT_i površina od T_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

C) $I = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$, gde je ΔT_i zapremina od T_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

D) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔT_i zapremina od T_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

E) $I = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$, gde je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar od $\mathcal{P}_n$, a ΔT_i zapremina od T_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

5. Neka je T zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^3$ takav da mu je rub po delovima glatka površ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T \sin(x+y)\, dxdydz = \iiint\limits_T \sin x\, dxdydz + \iiint\limits_T y\, dxdydz$

B) $\iiint\limits_T \sin x \cdot \sin z\, dxdydz = \iiint\limits_T \sin x\, dxdydz \cdot \iiint\limits_T \sin z\, dxdydz$

C) $\iiint\limits_T (\sin y + \sin xz)\, dxdydz = \iiint\limits_T \sin y\, dxdydz + \iiint\limits_T \sin xz\, dxdydz$

D) $\iiint\limits_T \sin \frac{x+y}{2}\, dxdydz = \frac{1}{2}\iiint\limits_T \sin(x+y)\, dxdydz$

E) $\iiint\limits_T \pi \sin(x+y+z)\, dxdydz = \pi \iiint\limits_T \sin(x+y+z)\, dxdydz$

6. Neka je u integral $I = \iiint\limits_T dxdydz$, gde je T valjak određen cilindričnom površi $x^2 + y^2 = 1$ i ravnima $z = 0$ i $z = 1$, uvedena smena na cilindrične koordinate $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ i $h \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Valjak T se transformiše u kvadar.

B) $I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^1 d\rho \right) d\theta \right) dh$

C) Jakobijan je θ.

D) $I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho\, d\rho \right) d\theta \right) dh$

E) $I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho\, d\rho \right) d\theta \right) dh$

7. Neka je $I = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_2^3 (\sin x + 4y)\, dz \right) dx \right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \pi^3$

B) $I = \pi + \pi^3$

C) $I = \pi^3 - \pi$

D) $I = \int_0^{\pi} (\cos x + 4yx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy$

E) $I = \int_0^{\pi} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy$

8. Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena površima: $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$, $y = 2$, $z = 0$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{5}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right)dy\right)dx$

B) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{z}\,dz\right)dy\right)dx$

C) $\int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{5}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right)dx\right)dy$

D) $\int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}}(x+y+z)\,dz\right)dx\right)dy$

E) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}}xyz\,dx\right)dy\right)dz$

9. Neka je V zapremina oblasti ograničene ravnima: $x = -1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$, $z = -1$ i $z = 3$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V = 12$

B) $V = 2$

C) $V = \int_{-1}^{2}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{-1}^{3}dz\right)dy\right)dx$

D) $V = \int_{-1}^{2}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{-1}^{3}dx\right)dy\right)dz$

E) $V = \int_{-1}^{2}\left(\int_{1}^{2}3\,dy\right)dx$

10. Neka je $I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(x,y,z)\,dxdydz$, gde je funkcija f integrabilna nad datom oblašću integracije. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za $f(x,y,z) \equiv 1$ I predstavlja veličinu zapremine tela $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

B) Za $f(x,y,z) \equiv 1$ I predstavlja veličinu površine površi tela $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

C) Vrednost integrala I je pozitivna.

D) I predstavlja veličinu zapremine valjka visine $f(x,y,z)$.

E) Vrednost integrala I ne može biti negativna.

Test 2.5

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik funkcije $f : T \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nema geometrijsku interpretaciju.

B) Presek površi $\sqrt{x^2+y^2} = z$ i $z = -1$ je kružnica.

C) Presek površi $x^2 + y^2 = z^2$ i $x = 0$ su dve paralelne prave.

D) Realna funkcija tri realne promenljive preslikava uređen par realnih brojeva u realan broj.

E) Realna funkcija tri realne promenljive preslikava uređenu trojku realnih brojeva u realan broj.

2. Neka je $I = \iiint\limits_{T} f(x,y,z)\,dxdydz$. Zaokružiti slova završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja. U definiciji integrala I ...

A) T je podskup skupa $\mathbb{R}$.

B) T je zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^3$ takav da mu je rub po delovima glatka površ.

C) Funkcija f je periodična.

D) I je granična vrednost Rimanove integralne sume funkcije f.

E) I je zbir površina određenih podelom oblasti T.

3. ▷ Neka je oblast T ograničena ravnima: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = e$ i $z = f$, pri čemu je $a < b$, $c < d$, $e < f$, a funkcije X, Y i Z neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T X(x) \cdot Y(y)\, dxdydz = \int\limits_T X(x)\, dx \cdot \int\limits_T Y(y)\, dy$

B) $\iiint\limits_T X(x) \cdot Y(y)\, dxdydz = \iiint\limits_T X(x)\, dxdydz \cdot \iiint\limits_T Y(y)\, dxdydz$

C) $\iiint\limits_T (X(x) + Y(y))\, dxdydz = \iiint\limits_T X(x)\, dxdydz + \iiint\limits_T Y(y)\, dxdydz$

D) $\iiint\limits_T (X(x) + Y(y) + Z(z))\, dxdydz = \int_a^b X(x)\, dx + \int_c^d Y(y)\, dy + \int_e^f Z(z)\, dz$

E) $\iiint\limits_T X(x)Y(y)Z(z)\, dxdydz = \int_a^b X(x)\, dx \int_c^d Y(y)\, dy \int_e^f Z(z)\, dz$

4. ▷ Neka je sa V označena zapremina tela koje je odozgo ograničeno paraboloidom $z = 1 - x^2 - y^2$, a odozdo s ravni $z = 0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V = \iiint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dxdydz$

B) $V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy$

C) $V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz\right) dxdy$

D) $V = \iiint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(1 - x^2 - y^2\right)\, dxdydz$

E) $V = \iiint\limits_{1-x^2-y^2} dxdydz$

5. ▷ Neka je $I_1 = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} dz\right) dy\right) dx$, a $I_2 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} \sin y\, dz\right) dx\right) dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = \frac{4}{3}$ **B)** $I_1 = \frac{2}{3}$ **C)** $I_1 = 2$ **D)** $I_2 = -1$ **E)** $I_2 = 1$

6. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka zapremini oblasti integracije.

A) $\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 z\, dz\right) dy\right) dx$

B) $\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 (x + y)\, dz\right) dy\right) dx$

C) $\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^2 + y^2\right)\, dz\right) dy\right) dx$

D) $\int_{-2}^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^3 dz\right) dy\right) dx$

E) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^1 \left(\int_0^x dz\right) dy\right) dx$

7. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena površima: $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ i $z = 2$.

A) $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(\int_0^2 \sqrt{x}\, dz\right) dx\right) dy$

B) $\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 (x + y)\, dz\right) dy\right) dx$

C) $\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_0^2 \sqrt[3]{x}\, dz\right) dy\right) dx$

D) $\int_0^2 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_0^1 \sqrt{y}\, dx\right) dy\right) dz$

E) $\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 x^2\, dx\right) dy\right) dz$

8. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{y}^{x} dz\right) dy\right) dx = 0$ **B)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{y}^{x} dz\right) dy\right) dx = -3$

C) $\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\left(\int_{1}^{2} \sqrt{y^3}\, dz\right) dx\right) dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\left(\int_{1}^{2} y^{-3}\, dz\right) dx\right) dy$

D) $\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\left(\int_{1}^{2} \sqrt{y^3}\, dz\right) dx\right) dy = 4$ **E)** $\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\left(\int_{1}^{2} \sqrt{y^3}\, dz\right) dx\right) dy = \frac{24}{35}$

9. Neka je $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz$, gde je f neprekidna funkcija, a oblast T ograničena površima: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = x$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{1} f(x,y,z)\, dx\right) dy\right) dz$ **B)** $I = \int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{2} f(x,y,z)\, dy\right) dx\right) dz$

C) $I = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{x} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx$ **D)** $I = \int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x} f(x,y,z)\, dz\right) dx\right) dy$

E) $I = \int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{1} f(x,y,z)\, dx\right) dz\right) dy$

10. Neka je u integral $I = \iiint\limits_T f(x,y)\, dxdy$, gde je funkcija f integrabilna nad $T \subset \mathbb{R}^3$, uvedena smena $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$, $z = w$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ **B)** $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{2u}{v}$

C) $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ **D)** $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = uv^2 - \frac{u}{v}$

E) $I = \iiint\limits_T f(u,v,w)\, dudvdw$

Test 2.6

1. Neka je trodimenzionalna oblast T zatvorena, ograničena i sa rubom koji je po delovima glatka površ, a f i g realne funkcije tri realne promenljive integrabilne nad T. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T \pi xyz\, dxdydz = \pi xyz \iiint\limits_T dxdydz$

B) $\iiint\limits_T 2f(x,y,z)\cdot 3g(x,y,z)\, dxdydz = 2\iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz \cdot 3\iiint\limits_T g(x,y,z)\, dxdydz$

C) $\iiint\limits_T \left(2f(x,y,z) - 3g(x,y,z)\right)\, dxdydz = 2\iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz - 3\iiint\limits_T g(x,y,z)\, dxdydz$

D) $\iiint\limits_T (x+y+z)\, dxdydz = \iiint\limits_T x\, dxdydz + \iiint\limits_T y\, dxdydz + \iiint\limits_T z\, dxdydz$

E) $\iiint\limits_T (x+y+z)\, dxdydz = \iiint\limits_T x\, dx + \iiint\limits_T y\, dy + \iiint\limits_T z\, dz$

2. Neka je $I=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^f(F(x)+G(y)+H(z))\,dz\right)dy\right)dx$, gde su a, b, c, d, e i f realne konstante, a F, G i H neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_a^b H(z)dz+\int_c^d G(y)dy+\int_e^f F(x)dx$

B) $I=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^f F(x)\,dz\right)dy\right)dx+\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^f (G(y)+H(z))\;dz\right)dy\right)dx$

C) $I=\left(\int_a^b F(x)dx\right)\left(\int_c^d G(y)dy\right)\left(\int_e^f H(z)dz\right)$

D) $I=\int_a^b F(x)\left(\int_c^d G(y)\left(\int_e^f H(z)dz\right)dy\right)dx$

E) $I=\int_a^b H(z)\left(\int_c^d G(y)\left(\int_e^f F(x)dz\right)dy\right)dx$

3. Neka $T_1,T_2,\dots,T_n$ čine podelu $\mathcal{P}_n$ trodimenzionalne oblasti T, neka $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in T_i$, $i=1,2,\dots,n$ i neka je trostruki integral definisan formulom $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i=\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$, gde je f realna funkcija tri realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $T_1,T_2,\dots,T_n$ su dvodimenzionalne oblasti.

B) $T_1,T_2,\dots,T_n$ su trodimenzionalne oblasti.

C) $f(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$ je visina podoblasti T_2.

D) $f(\xi_3,\eta_3,\zeta_3)$ je dijametar podoblasti T_3.

E) $I_n=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$ je Rimanova integralna suma funkcije f nad oblašću T.

4. Neka je $I=\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^y xyz\,dz\right)dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\frac{1}{2}$ **B)** $I=-\frac{1}{8}$ **C)** $I=\int_0^x\left(\int_0^y\left(\int_0^1 dx\right)dz\right)dy$

D) $I=\frac{1}{48}$ **E)** $I=0$

5. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $x^2+y^2-z^2=0$ je površ. **B)** $x^2+y^2-z^2=0$ je jednačina kruga.

C) $x^2+y^2-z^2=1$ je jednačina konusa. **D)** $x^2+y^2+z^2=1$ je jednačina sfere.

E) $x^2+y^2+z=1$ je jednačina ravni.

6. Neka je $I=\iiint\limits_T dxdydz$, gde je T zatvorena oblast određena paraboloidom $x^2+y^2+z=1$ i xOy ravni. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right)dy\right)dx$ **B)** $I=\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right)dy\right)dx$

C) $I=\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right)dx\right)dy$ **D)** $I=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right)dx\right)dy$

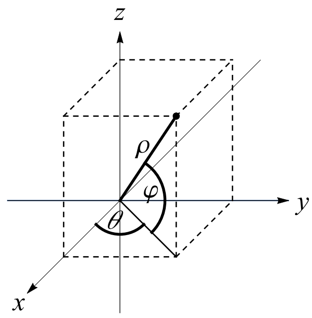
E) $I=\int_{-1}^1\left(\int_0^{1-x^2}\left(\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right)dy\right)dx$

7.▷ Neka je $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2\left(\int_{-\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}}(-\cos x)\,dz\right)dy\right)dx$, a $I_2 = \int_{-1}^{2}\left(\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{z^2}\,dz\right)dx\right)dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = -\ln 4$ **B)** $I_1 = 2\ln 2$ **C)** $I_1 = 0$ **D)** $I_2 = -3$ **E)** $I_2 = -\dfrac{21}{2}$

8.▷ Neka je za izračunavanje integrala $I = \iiint\limits_T (x^2+y^2)^2\,dxdydz$, gde je T trodimenzionalna oblast određena s površi $x^2+y^2+z^2=2$, uvedena smena na sferne koordinate ρ, θ i φ, pri čemu su ρ, θ i φ definisani kao na slici 2.2.2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jakobijan ove smene je $\rho^2\cos\varphi$.
B) Jakobijan ove smene je $\rho^6\cos^5\varphi$.
C) Nova podintegralna funkcija je $\rho^6\cos^5\varphi$.
D) Nova podintegralna funkcija je $\rho^4\cos^4\varphi$.
E) $\varphi \in [0,2\pi)$



Slika 2.2.2

9.▷ Neka je V zapremina lopte sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnika 3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) V se ne može izračunati pomoću trostrukog integrala.

B) $V = \int_{-3}^{3}\left(\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{3-x^2-y^2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}}dz\right)dy\right)dx$

C) $V = \int_{-3}^{3}\left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}dz\right)dy\right)dx$

D) $V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-3}^{3}d\rho\right)d\theta\right)d\varphi$, gde su ρ, θ i φ promenljive u sfernim koordinatama sa slike 2.2.2.

E) $V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3\rho^2\cos\varphi\,d\rho\right)d\theta\right)d\varphi$, gde su ρ, θ i φ promenljive u sfernim koordinatama sa slike 2.2.2.

10.▷ Zaokružiti slovo ispred preseka površi $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$ i xOy ravni.

A) Jedinična kružnica **B)** Jedinični kvadrat **C)** Parabola
D) Prava **E)** $O(0,0)$

Test 2.7

1.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.

U definiciji trostrukog integrala funkcije f nad oblašću T, $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$, ...

A) $T_1, T_2, \dots, T_n$ su dvodimenzionalne podoblasti oblasti T.
B) $\mathcal{P}_n$ predstavlja podelu $\{T_1,T_2,\dots,T_n\}$ trodimenzionalne oblasti T, gde $n\in\mathbb{N}$.
C) ΔT_i je zapremina podoblasti T_i iz podele $\mathcal{P}_n$, pri čemu je $i=1,2,\dots,n$.
D) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je najkraća stranica među stranicama kvadrova koji čine podelu $\mathcal{P}_n$.
E) $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ je proizvoljna tačka iz oblasti T, gde je $i=1,2,\dots,n$.

2.▷ Neka je $I_1 = \int_1^2\left(\int_0^x\left(\int_0^1 2z(x+y)\,dz\right)dy\right)dx$, a $I_2 = \int_{-2}^{1}\left(\int_0^1\left(\int_{x^2}^{1}\sqrt{y^3}\,dy\right)dx\right)dz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 3$ **B)** $I_1 = 3.5$ **C)** $I_1 = 7$ **D)** $I_2 = 6.25$ **E)** $I_2 = 1$

3. Neka su funkcije F, G i H neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive, a funkcije f i g integrabilne nad oblašću $T \subset \mathbb{R}^3$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T F(x)\cdot G(y)\cdot H(z)\,dxdydz = \iiint\limits_T F(x)\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T G(y)\cdot H(z)\,dxdydz$

B) $\iiint\limits_T F(x)\cdot G(y)\cdot H(z)\,dxdydz = \iiint\limits_T F(x)\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T G(y)\,dxdydz \cdot \iiint\limits_T H(z)\,dxdydz$

C) Ako je $T = T_1 \cup T_2$, tada je $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$

D) Ako je $T = T_1 \cup T_2$, a $T_1 \cap T_2$ najviše površ, tada je $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz +$
$+\iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$

E) $\iiint\limits_T (3f(x,y,z) - g(x,y,z))\,dxdydz = 3\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz - \iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz$

4. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Podintegralna funkcija trostrukog integrala je realna funkcija tri realne promenljive.

B) Podintegralna funkcija trostrukog integrala je realna funkcija dve realne promenljive.

C) Podintegralna funkcija trostrukog integrala je funkcija koja preslikava podskup skupa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^3$.

D) Geometrijsko značenje trostrukog integrala je veličina zapremine tela ograničenog površi definisanom podintegralnom funkcijom nad oblašću integracije i ravni $z = 0$.

E) Geometrijsko značenje trostrukog integrala je veličina površine zatvorene oblasti između krive određene podintegralnom funkcijom nad oblašću integracije i x-ose.

5. Neka je $I = \int_{-2}^{0}\left(\int_0^1\left(\int_{-2}^{1}(x+y^2)\,dx\right)dy\right)dz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \int_0^1\left(\int_{-2}^{1}\left(\int_{-2}^{0}(x+y^2)\,dz\right)dx\right)dy$

B) $I = \int_{-2}^{0}\left(\int_{-2}^{1}x\,dx + \int_0^1 y^2dy\right)dz$

C) $I = 1$

D) $I = -5$

E) $I = -1$

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Translacijom jedinične sfere sa centrom u koordinatnom početku duž z-ose u pozitivnom smeru za 4 jedinične duži dobija se sfera $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 1$.

B) Translacijom jedinične sfere sa centrom u koordinatnom početku duž y-ose u negativnom smeru za 3 jedinične duži dobija se sfera $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 1$.

C) Presek površi $x^2 + y^2 = z^2$ i $y = 0$ su dve prave koje se seku.

D) Grafik funkcije $f : T \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je površ.

E) Grafik funkcije $f : T \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je površ.

7. Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena ravnima: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = -3$ i $z = 2$.

A) $\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_{-3}^{2}\sqrt{x}\,dz\right)dy\right)dx$

B) $\int_0^1\left(\int_0^{1-y}\left(\int_{-3}^{2}\sqrt[3]{x}\,dz\right)dx\right)dy$

C) $\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-y}\left(\int_{-3}^{2}\sqrt{y}\,dz\right)dx\right)dy$

D) $\int_2^{-3}\left(\int_0^1\left(\int_0^1(x+y-1)\,dx\right)dy\right)dz$

E) $\int_{-3}^{2}\left(\int_0^1\left(\int_0^1(x+y)\,dy\right)dx\right)dz$

8. Neka je $I=\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^1 2\sin(2z+1)\,dz\right)dy\right)dx$ i $t=2z+1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=2\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^1 \sin t\,dt\right)dy\right)dx$

B) $I=4\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^1 \sin(z+1)\,dz\right)dy\right)dx$

C) $I=\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_1^3 \sin t\,dt\right)dy\right)dx$

D) $I=\int_0^1\left(\int_0^x(\cos 3-\cos 1)\,dy\right)dx$

E) $I=\left(\int_1^3\sin t\,dt\right)\cdot\left(\int_0^1\left(\int_0^x dy\right)dx\right)$

9. Neka je $I=\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ gde je funkcija f integrabilna nad trodimenzionalnom oblašću T. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) I predstavlja veličinu površine oblasti T.

B) I predstavlja veličinu zapremine oblasti T.

C) Vrednost integrala I je pozitivna.

D) Ako je $f(x,y,z)\equiv 1$, tada I predstavlja veličinu zapremine oblasti T.

E) Vrednost integrala I ne može biti negativna.

10. Neka je u integral $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 4} dxdydz$ uvedena smena na sferne koordinate: $\rho\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$ i $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ i neka je S nova oblast integracije. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\iiint\limits_S d\rho d\theta d\varphi$

B) $I=\iiint\limits_T \rho^2\cos\theta\,d\rho d\theta d\varphi$

C) S je kvadar.

D) $x=\rho\cos\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi$

E) $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=\rho\sin\varphi$

Test 2.8

1. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
U definiciji trostrukog integrala $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i=\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ ...

A) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je maksimalna zapremina oblasti $T_1,T_2,\ldots,T_n$.

B) $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in T_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

C) $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$ predstavlja zapreminu.

D) ΔT_i predstavlja zapreminu.

E) $T_1,T_2,\ldots,T_n$ čine podelu $\mathcal{P}_n$ dvodimenzionalnog skupa T.

2. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
U definiciji trostrukog integrala ...

A) Rimanova suma predstavlja zbir dužina.

B) Rimanova suma predstavlja zbir površina.

C) Rimanova suma predstavlja zbir zapremina.

D) Rimanova suma je jednaka vrednosti trostrukog integrala.

E) granična vrednost Rimanove sume je jednaka vrednosti trostrukog integrala.

3.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Površ $x^2+y^2=1$ je krug. **B)** Površ $x^2+y^2=z^2$ je sfera.

C) Površ $x^2+y^2=z^2$ je konus. **D)** Površ $x^2+y^2=1$ je cilindar.

E) Površ $x^2+y^2+z^2=1$ je paraboloid.

4.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Presek površi $x^2+y^2=3$ i ravni ...

A) $z=-3$ je prazan skup. **B)** $z=1$ su dve prave. **C)** yOz su dve paralalne prave.

D) xOz je parabola. **E)** xOy je kružnica.

5.▷ Zaokružiti slova ispred površi koje određuju kupu.

A) $x^2+y^2=z^2, z=1$ **B)** $x^2+y^2=z, z=1$ **C)** $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1, z=1$

D) $x^2+y^2=4, z=1$ **E)** $x^2+y^2+z^2=1, z=1$

6.▷ Neka je $I=\int_0^1\left(\int_3^5\left(\int_\pi^{2\pi}\sin x\cdot\ln y\cdot 2^z\,dx\right)dy\right)dz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_0^1 2^z\left(\int_3^5\ln y\left(\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx\right)dy\right)dz$ **B)** $I=\int_\pi^{2\pi}2^z\left(\int_3^5\ln y\left(\int_0^1\sin x\,dx\right)dy\right)dz$

C) $I=\int_0^1 2^z\,dz\int_3^5\ln y\,dy\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx$ **D)** $I=\int_\pi^{2\pi}2^z\,dz\int_3^5\ln y\,dy\int_0^1\sin x\,dx$

E) $I=\int_0^1\int_3^5\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dxdydz\cdot\int_0^1\int_3^5\int_\pi^{2\pi}\ln y\,dxdydz\cdot\int_0^1\int_3^5\int_\pi^{2\pi}2^z\,dxdydz$

7.▷ Neka je $I=\int_{-1}^2\left(\int_0^x\left(\int_{-1}^1(x+2y)\,dz\right)dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=2\int_{-1}^2\left(\int_0^x\left(\int_{-1}^1(x+y)\,dz\right)dy\right)dx$ **B)** $I=4\int_{-1}^2\left(\int_0^x(x+y)\,dy\right)dx$

C) $I=18$ **D)** $I=12$ **E)** $I=0$

8.▷ Neka je $I=\iiint\limits_S f(x,y,z)\,dxdydz$, pri čemu je funkcija f integrabilna nad S. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) S je zatvorena trodimenzionalna oblast, a f je realna funkcija tri realne promenljive.

B) Vrednost integrala I ne može biti 0.

C) S može biti krug.

D) S je zatvorena trodimenzionalna oblast i I predstavlja veličinu zapremine oblasti S.

E) Ako je $f(x,y,z)\equiv 1$, tada I predstavlja veličinu zapremine oblasti S.

9.▷ Neka je za integral $\iiint\limits_S xy\,dxdydz$ uvedena smena promenljivih $x=2\rho\cos\theta$, $y=3\rho\sin\theta$, $z=h$, gde je $\rho\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$ i $h\in\mathbb{R}$, i neka je $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,h)}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial x}&\frac{\partial\rho}{\partial y}&\frac{\partial\rho}{\partial z}\\\frac{\partial\theta}{\partial x}&\frac{\partial\theta}{\partial y}&\frac{\partial\theta}{\partial z}\\\frac{\partial h}{\partial x}&\frac{\partial h}{\partial y}&\frac{\partial h}{\partial z}\end{vmatrix}$ **B)** $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial h}\\\frac{\partial y}{\partial\rho}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial h}\\\frac{\partial z}{\partial\rho}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial h}\end{vmatrix}$ **C)** $J=6\rho$

D) $J=6\rho h$ **E)** $I=\iiint\limits_S 12h\rho^2\cos\theta\,d\rho d\theta dh$

10. Neka je $I_1 = \iiint\limits_S h^2 \cos^2\theta \, d\rho d\theta dh$, a $I_2 = \iiint\limits_S 12h\rho^2 \cos\theta \, dh d\rho d\theta$, gde je oblast S ograničena površima: $\rho = 1$, $\rho = 2$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$, $h = -1$ i $h = 1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1 = 0$ **B)** $I_1 = \frac{\pi}{3}$ **C)** $I_1 = \frac{2\pi^2}{3}$ **D)** $I_2 = 56$ **E)** $I_2 = -24\pi$

Test 2.9

1. Neka $T_1, T_2, \ldots, T_n$ čine podelu $\mathcal{P}_n$ trodimenzionalnog skupa T i neka $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Trostruki integral je definisan izrazom $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i = \iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je dijametar podele $\mathcal{P}_n$.

B) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je zapremina oblasti T_1.

C) $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je maksimalni dijametar među dijametrima podoblasti $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

D) $f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\Delta T_2$ je zapremina cilindričnog tela.

E) $f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ je visina cilindričnog tela.

2. Neka su funkcije f i g integrabilne nad oblašću $T \subset \mathbb{R}^3$, a funkcije F i G neprekidne realne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T f(x,y,z) \cdot g(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz \cdot \iiint\limits_T g(x,y,z)\, dxdydz$

B) $\iiint\limits_T (f(x,y,z) + g(x,y,z))\, dxdydz = \iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_T g(x,y,z)\, dxdydz$

C) Ako je $f(x,y,z) \geq 0$ za svako $(x,y,z) \in T$, tada je $\iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz \geq 0$.

D) Ako je $g(x,y,z) \geq 1$ za svako $(x,y,z) \in T$, tada je $\iiint\limits_T g(x,y,z)\, dxdydz \geq 1$.

E) $\iiint\limits_T F(x)G(y)\, dxdydz = F(x) \iiint\limits_T G(y)\, dxdydz$

3. Neka je u integral $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz$ uvedena smena na cilindrične koordinate ρ, θ i h, gde je $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $h \in \mathbb{R}$ i J Jakobijeva determinanta. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I = \iiint\limits_T f(\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, h)\, d\rho d\theta dh$

B) $I = \iiint\limits_T f(\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, h)\, \rho\, d\rho d\theta dh$

C) $J = \dfrac{\partial(\rho,\theta,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix}$

D) $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,h)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

E) $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = h$

4. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik realne funkcije dve realne promenljive je površ.

B) Grafik realne funkcije tri realne promenljive je površ.

C) Površ data jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ je parabola.

D) Površ data jednačinom $2x^2 - 3y^2 = 1$ je hiperbolički cilindar.

E) Elipsa je površ.

5. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Površi $x^2+y^2+z^2=1$ i $z=1$ se seku.

B) Presek površi $x^2-y^2-z^2=1$ i $y=0$ je kružnica.

C) Presek površi $x^2+y^2-z^2=1$ i $x=0$ je kružnica.

D) Translacijom konusa $z=\sqrt{x^2+y^2}$ duž z-ose u pozitivnom smeru za 2 jedinične duži dobija se konus sa jednačinom $z-2=\sqrt{x^2+y^2}$.

E) Translacijom konusa $z=\sqrt{x^2+y^2}$ duž y-ose u pozitivnom smeru za 2 jedinične duži dobija se konus sa jednačinom $z=\sqrt{x^2+(y+2)^2}$.

6. Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije zatvorena oblast određena ravnima: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=-1$ i $z=1$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)\,dy\right)dx\right)dz$

B) $\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-x} \sqrt{x}\,dy\right)dx\right)dz$

C) $\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-y}\left(\int_{-1}^1 \sqrt{y}\,dz\right)dx\right)dy$

D) $\int_1^{-1}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y-1)\,dx\right)dy\right)dz$

E) $\int_0^1\left(\int_0^{1-y}\left(\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\,dz\right)dx\right)dy$

7. Neka je $I_1=\int_0^1\left(\int_1^e\left(\int_0^1 (2+\ln y)\,dx\right)dy\right)dz$, a $I_2=\int_{-1}^1\left(\int_0^1\left(\int_{-1}^0 e^x\sin y\,dz\right)dx\right)dy$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I_1=2$ **B)** $I_1=2e+e^{-1}-3$ **C)** $I_1=2e-1$

D) $I_2=0$ **E)** $I_2=2(e-1)\cos 1$

8. Neka je $I=\int_0^2\left(\int_{-1}^0\left(\int_0^1 \frac{3z^2xy}{z^3+1}\,dz\right)dy\right)dx$ i $t=z^3+1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=\int_0^2\left(\int_{-1}^0\left(\int_0^1 \frac{xy}{t}\,dt\right)dy\right)dx$

B) $I=\int_0^2 \frac{3z^2}{z^3+1}\left(\int_{-1}^0 y\left(\int_0^1 x\,dz\right)dy\right)dx$

C) $I=\int_0^2\left(\int_{-1}^0 xy\left(\int_1^2 \frac{dt}{t}\right)dy\right)dx$

D) $I=\int_0^2\left(\int_{-1}^0\left(\int_0^1 \frac{3xy}{z+1}\,dz\right)dy\right)dx$

E) $I=\left(\int_0^2 x\,dx\right)\cdot\left(\int_{-1}^0 y\,dy\right)\cdot\left(\int_0^1 \frac{3z^2}{z^3+1}\,dz\right)$

9. Zaokružiti slova ispred integrala koji predstavljaju veličinu zapremine lopte.

A) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} dxdydz$

B) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2} (x+y+z)\,dxdydz$

C) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dxdydz$

D) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(4-x^2-y^2-z^2\right)\,dxdydz$

E) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 5} dxdydz$

10. Neka je $I=\int_{-2}^0\left(\int_0^1\left(\int_{-2}^1 (x+y^2)\,dz\right)dy\right)dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $I=-6$ **B)** $I=-4$ **C)** $I=-8$ **D)** $I=-\frac{20}{3}$ **E)** $I=\frac{8}{3}$

Test 2.10

1. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Grafik funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ je površ.

B) Grafik funkcije $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je površ.

C) Telo određeno površima: $1=x^2+y^2$, $z=-1$, $z=2$ je kupa.

D) Telo određeno površima: $1=x^2+y^2$, $z=-1$, $z=2$ je valjak.

E) Telo određeno površima: $1=x^2+y^2$, $z=-1$, $z=2$ je lopta.

2. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
U definiciji trostrukog integrala $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz=\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$ ...

A) $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$, $i=1,2,\ldots,n$, su zapremine kvadrova ili delova kvadrova koji čine podelu oblasti T.

B) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta T_i$, $i=1,2,\ldots,n$, je Rimanova integralna suma.

C) $\mathcal{P}_n$ je podela dvodimenzionalne oblasti T.

D) Funkcija f je ograničena.

E) Tačke $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, su proizvoljne tačke iz oblasti T.

3. ▷ Neka su funkcije f i g integrabilne nad oblašću $T\subset\mathbb{R}^3$, a oblasti $T_1,T_2\subset\mathbb{R}^3$ takve da je $T_1\cup T_2=T$ i $T_1\cap T_2$ najviše površ. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz+\iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dxdydz$

B) $\iiint\limits_T (7f(x,y,z)-g(x,y,z))\,dxdydz=7\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz-\iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz$

C) $\iiint\limits_T \frac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)}\,dxdydz=\frac{\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz}$

D) Ako je $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$ na T, tada je $\iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dxdydz\le\iiint\limits_{T_2} g(x,y,z)\,dxdydz$.

E) $\iiint\limits_T (f(x,y,z)+3g(x,y,z))\,dxdydz=3\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz+\iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz$

4. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je oblast integracije trostrana prizma ograničena ravnima $z=-1$ i $z=0$, pri čemu je projekcija prizme na xOy ravan trougao određen tačkama $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$ i $C(1,1)$.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x}\left(\int_{-1}^{0}\sqrt{x}\,dz\right)dy\right)dx$ **B)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{-x} x\,dy\right)dx\right)dz$

C) $\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x}\,dy\right)dx\right)dz$ **D)** $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x}\left(\int_{-1}^{0}\sqrt{y}\,dx\right)dz\right)dy$

E) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{y}^{1}\left(\int_{-1}^{0} y\,dz\right)dx\right)dy$

5. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Zapremina zatvorene oblasti određene površima $x=0$, $x=1$, $y=1$, $y=z$ i $z=0$ jednaka je ...

A) $\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{y}\left(\int_{0}^{1}dx\right)dz\right)dy$ **B)** $\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}dx\right)dy\right)dz$ **C)** $\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{y}\left(\int_{0}^{1}dx\right)dy\right)dz$

D) 1 **E)** $\frac{1}{2}$

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{y}\left(\int_{0}^{x} 3y\,dz\right)dx\right)dy = \frac{3}{4}$

B) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} x^2\,dz\right)dy\right)dx = 0$

C) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{y}\left(\int_{0}^{x} 3y\,dz\right)dx\right)dy = 0$

D) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} x^2\,dz\right)dy\right)dx = \frac{8}{3}$

E) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} z^2\,dz\right)dy\right)dx = 16$

7. Zaokružiti slova ispred integrala koji su jednaki integralu $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{2y} \sin y^2\,dx\right)dy\right)dz$.

A) $\int_{0}^{2y}\left(\int_{0}^{2}\left(\int_{-1}^{1} \sin y^2\,dz\right)dy\right)dx$

B) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2y}\left(\int_{0}^{2} \sin y^2\,dy\right)dx\right)dz$

C) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2} 2y\,\sin y^2\,dy\right)dz$

D) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2} \sin t\,dt\right)dz$ sa $t = y^2$

E) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{4} \sin t\,dt\right)dz$ sa $t = y^2$

8. Neka je V zapremina oblasti ograničene površima: $x = 1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3$, $z = -1$ i $z = 2$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $V = 2$

B) $V = 12$

C) $V = \int_{-1}^{3}\left(\int_{1}^{2} dx\right)dy$

D) $V = \int_{-1}^{2}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{-1}^{3} dz\right)dx\right)dy$

E) $V = \int_{1}^{2}\left(\int_{-1}^{3}\left(\int_{-1}^{2} dz\right)dy\right)dx$

9. Neka je u integral $I = \iiint\limits_{T} f(x,y,z)\,dxdydz$ uvedena smena na cilindrične koordinate: $\rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$ i $h \in \mathbb{R}$ i neka je S nova oblast integracije. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = h$

B) $I = \iiint\limits_{S} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, h)\rho\,d\rho d\theta dh$

C) $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,h)} = -\rho$

D) $x = \rho\sin\theta,\ y = \rho\cos\theta,\ z = h$

E) ρ predstavlja rastojanje tačke od koordinatnog početka u xyz koordinatnom sistemu.

10. Neka je T jedinična lopta, funkcija f neprekidna na T i neka je u integral $I = \iiint\limits_{T} dxdydz$ uvedena smena na sferne koordinate $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ i $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $x = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ y = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ z = \rho\cos\theta$

B) Nova podintegralna funkcija je 1.

C) $x = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ y = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ z = \rho\sin\varphi$

D) Oblast T se transformiše u kocku.

E) $I = \iiint\limits_{T} d\rho d\theta d\varphi$

2.3 Brojni i funkcionalni redovi

Test 3.1

1. Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

B) $S_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

D) Ako $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne postoji, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

E) Ako $\{S_n\}$ kovergira ka 3, tada je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 3$.

2. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ je alternativni red.

B) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+1}{a_n} = L$ sa $L < 1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = L$ sa $L < 1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

E) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

3. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred stepenih redova.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, 2^x$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^2+1\right) 2^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,(-1)^n$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$

4. Zaokružiti slova ispred redova koji konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{n!}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+2\right)$

5. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan brojni red sa nenegativnim članovima, a f_n realna funkcija jedne realne promenljive iz intervala $I \subset \mathbb{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $|f_n(x)| \le a_n$ za svako $x \in I$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na I.

B) Ako je $a_n \le |f_n(x)|$ za svako $x \in I$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na I.

C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na I, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tačkasto konvergira na I.

D) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tačkasto konvergira na I, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na I.

E) Ako $0 \in I$, tada je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ stepeni red sa centrom u nuli.

6. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ proizvoljan brojni red. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

D) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

E) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

7. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$, tada je $a_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+3}$.

B) Ako je $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$, tada je $a_{n+1} = \dfrac{2n+3}{n+3}$.

C) Ako je $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$, tada je $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2 \cdot 2^n}$.

D) Ako je $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, tada je $a_{n+1} = \dfrac{3n-1}{n}$.

E) Ako je $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, tada je $a_{n+1} = \dfrac{2n}{n+1}$.

8. Zaokružiti slova ispred vrednosti promenljive za koju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3}(x+2)^n$, $x \in \mathbb{R}$, konvergira.

A) $x = 3$ **B)** $x = -3$ **C)** $x = -2$ **D)** $x = 0$ **E)** $x = 2$

9. Dat je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Po Košijevom kriterijumu za konvergenciju, ako je $a_n \geq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tada dati red divergira.

B) Po Rabeovom kriterijumu za konvergenciju, ako je $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, tada dati red divergira.

C) Lajbnicov kriterijum za konvergenciju se može primeniti ako je $\{a_n\}$ monotono nerastući i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

D) Ako je $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tada je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

E) Po integralnom kriterijumu za konvergenciju, ako za funkciju f definisanu na intervalu $[1,\infty)$ takvu da je $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, važi da je neprekidna, nenegativna i monotono opadajuća na $[1,\infty)$ i ako $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergira, tada dati red konvergira.

10. Zaokružiti slova ispred redova za koje važi da apsolutno konvergiraju na intervalu $(-1,1)$ i divergiraju na skupu $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{8n^3}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$

Test 3.2

1. ▷ Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcionalni red sa $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

   A) Za $x = -1$ se dobija brojni red.

   B) Za $x = -1$ se dobija alternativni red.

   C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,(x-1)^2$ je stepeni red.

   D) $\sum\limits_{n=1}^{1000} f_n(x)$ je parcijalna suma datog funkcionalnog reda.

   E) $f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) - f_4(x) + \ldots + f_n(x)$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ je alternativni red.

2. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

   A) Ako opšti član brojnog reda konvergira, tada je taj brojni red konvergentan.

   B) Ako niz parcijalnih suma brojnog reda konvergira, tada je taj brojni red konvergentan.

   C) Ako niz parcijalnih suma brojnog reda divergira, tada je taj brojni red divergentan.

   D) Ako brojni red divergira, tada divergira i njegov opšti član.

   E) Funkcionalni red nema niz parcijalnih suma.

3. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

   A) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n^3}}{(-1)^n}$ konvergira. **B)** Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^3}}$ divergira. **C)** Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^3}}$ konvergira.

   D) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^5}} + 23\right)$ konvergira. **E)** Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^5}} + 23\right)$ divergira.

4. ▷ Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

   A) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

   B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

   C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

   D) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i apsolutno konvergira.

   E) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i uslovno konvergira.

5. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

   A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{n}\right)^2$ uniformno konvergira za $x \in \mathbb{R}$. **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{n}\right)^3$ divergira za $x \in \mathbb{R}$.

   C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{(-n)^3}$ ne konvergira uniformno za $x \in \mathbb{R}$. **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos x}{n^4}$ divergira za $x \in \mathbb{R}$.

   E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{n}\right)^{\frac{4}{3}}$ apsolutno konvergira za $x \in \mathbb{R}$.

6. Dat je stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred vrednosti za koje dati red konvergira.

A) $x=-4$ **B)** $x=-3$ **C)** $x=0$ **D)** $x=1$ **E)** $x=3$

7. Dati su funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $|f_n(x)|\ge a_n$ za $x\in\mathbb{R}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira nad $\mathbb{R}$.

B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $|f_n(x)|\le a_n$ za $x\in\mathbb{R}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira nad $\mathbb{R}$.

C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $f_n(x)\ge 0$ za $x\in\mathbb{R}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ uniformno konvergira nad $\mathbb{R}$.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\infty$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergira za $x\in\mathbb{R}$.

E) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\infty$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $x\in\mathbb{R}$.

8. Zaokružiti slova ispred redova koji apsolutno konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^n}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n}$

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}$ se može utvrditi Dalamberovim kriterijumom za konvergenciju.

B) Red $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot n}$ konvergira.

C) Red $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot n}$ divergira.

D) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{5\cdot(n!)^n}$ divergira.

E) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{5}$ konvergira.

10. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Na osnovu Rabeovog kriterijuma za konvergenciju dobija se da dati red divergira.

B) Na osnovu Rabeovog kriterijuma za konvergenciju dobija se da dati red konvergira.

C) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma za konvergenciju dobija se da dati red konvergira.

D) Na osnovu Lajbnicovog kriterijuma za konvergenciju dobija se da dati red konvergira.

E) Dati red apsolutno konvergira.

Test 3.3

1. Dat je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, gde niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono opada i $a_n>0$ za $n\in\mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) a_n je opšti član datog brojnog reda.

B) Iz divergencije niza $\{(-1)^n a_n\}$ sledi da dati brojni red divergira.

C) Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ sledi da dati brojni red divergira.

D) Iz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$ sledi da dati brojni red konvergira.

E) Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ sledi da dati brojni red konvergira.

2. ▷ Dat je brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz njegovih parcijalnih suma. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

B) $S_n = a_n$.

C) Iz konvergencije niza $\{a_n\}$ sledi konvergencija datog brojnog reda.

D) Iz divergencije niza $\{S_n\}$ sledi divergencija datog brojnog reda.

E) Iz divergencije niza $\{S_n\}$ sledi konvergencija datog brojnog reda.

3. ▷ Neka je $a_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, tada brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

B) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, tada brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, tada brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, tada brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

E) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, tada brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

4. ▷ Zaokružiti slova ispred konvergentnih redova.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.111}}$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.111}}$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{0.999}$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.023}}$

5. ▷ Zaokružiti slova ispred divergentnih redova.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^n}$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0.2^n}$

6. ▷ Dat je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n+2023}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $(n+1)$-i član datog reda je $\frac{n^2}{3n+2024}$.

B) $(n+1)$-i član datog reda je $\frac{n(n+2)}{3n+2026}$.

C) $(n-1)$-i član datog reda je $\frac{n^2}{3n+2022}$.

D) Dati red divergira.

E) Dati red konvergira.

7. ▷ Neka je $|f_n(x)| \leq c_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $x \in B \subset \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih definicija.

A) Za $c_n = \frac{n^2}{2^n}$ funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na skupu B.

B) Za $c_n = \sqrt{2}$ funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na skupu B.

C) Za $c_n = 1$ funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na skupu B.

D) Za $c_n = \frac{n!}{n^2}$ funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na skupu B.

E) Za $c_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^\pi}$ funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na skupu B.

8. ▷ Neka za $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \geq \frac{1}{n}$ i $0 < b_n \leq \frac{1}{2023^n}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. **B)** Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

C) Red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira. **D)** Red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

E) Iz navedenih uslova se ne može odrediti ni konvergencija ni divergencija datih redova.

9. ▷ Neka je pozitivan realan broj R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Centar datog stepenog reda je -1.

B) Centar datog stepenog reda je 1.

C) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(R-1)^n$ konvergira.

D) Za $x \in (-R, R)$ dati stepeni red apsolutno konvergira.

E) Za $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ dati stepeni red divergira.

10. ▷ Zaokružiti slova ispred redova koji apsolutno konvergiraju za $x \in (-3, 3)$.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} (x+3)^n n^2$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{3n^2}$

Test 3.4

1. ▷ Neka je $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred funkcionalnih redova.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + n!)$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^2+1}$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$

2. ▷ Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan brojni red sa pozitivnim članovima, a f_n realna funkcija jedne realne promenljive iz intervala $I \subset \mathbb{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $|f_n(x)| \leq a_n$ za svako $x \in I$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na I.

B) Ako je $a_n \leq |f_n(x)|$ za svako $x \in I$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na I.

C) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$ konvergira. **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ divergira.

3. ▷ Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. **B)** Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$.

C) Ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. **D)** Ako $\{S_n\}$ divergira, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

E) Ako $\{S_n\}$ kovergira, tada je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

4. ▷ Zaokružiti slova ispred redova koji apsolutno konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2021}{n^{12}}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2021}}$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\sqrt[2021]{n}}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{n^{12}}+1\right)$

5. ▷ Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2x)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati red je stepeni red sa centrom u -2. **B)** Dati red je funkcionalni red.

C) Poluprečnik konvergencije datog reda je -0.5. **D)** Za $x \in (-2,2)$ dati red apsolutno konvergira.

E) Za $x \in (-0.5, 0.5)$ dati red apsolutno konvergira.

6. ▷ Zaokružiti slova ispred vrednosti promenljive za koju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2}(x-4)^n$, $x \in \mathbb{R}$, konvergira.

A) $x=0$ **B)** $x=1$ **C)** $x=4$ **D)** $x=4.5$ **E)** $x=5$

7. ▷ Neka je interval $(-\infty, 0)$ oblast konvergencije funkcionalnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definisanog na skupu realnih brojeva. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(-2)$ je konvergentan. **B)** Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ je konvergentan.

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(-1)$ je alternativni red. **D)** Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(2)$ je divergentan.

E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ je funkcionalni red.

8. ▷ Zaokružiti slova ispred redova koji konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

9. ▷ Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ proizvoljan brojni red. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

E) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

10. ▷ Zaokružiti slova ispred redova za koje važi da divergiraju na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ i apsolutno konvergiraju na intervalu $(-1, 1)$.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n^2}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{-5}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}(x-1)^n$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{5}\, x^n$

Test 3.5

1. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{10000} \frac{1}{n}$ je brojni red.

B) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, je brojni red.

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je funkcionalni red.

D) $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, je stepeni red.

E) Ako se u funkcionalnom redu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, za promenljivu x uzme proizvoljan realan broj, tada se dobija brojni red.

2. ▷ Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, gde je S realan broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$

E) Ne može se odrediti zbir reda.

3. ▷ Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red, a $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ njegov niz parcijalnih suma. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

B) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -7$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

E) Ako $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne postoji, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sledi da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ konvergira.

B) Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sledi da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ konvergira.

C) Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sledi da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 2010\right)$ konvergira.

D) Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sledi da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2010}{n^2}\right)$ divergira.

E) Iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sledi da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ konvergira.

5. ▷ Zaokružiti slova ispred redova koji konvergiraju po Lajbnicovom kriterijumu.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\sqrt{n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{n^2}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}$

6. ▷ Dat je stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-(x+2)^n\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred vrednosti za koje dati red konvergira.

A) $x = -4$ **B)** $x = -3$ **C)** $x = -2$ **D)** $x = 0$ **E)** $x = 1$

7. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Iz $\left|\frac{\sin x}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4}$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ sledi da dati red apsolutno konvergira nad $\mathbb{R}$.

B) Po Vajerštrasovom kriterijumu za konvergenciju, iz $\left|\frac{\sin x}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n}$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ sledi da dati red uniformno konvergira nad $\mathbb{R}$.

C) Ako red $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^4}\right|$ konvergira nad $\mathbb{R}$, tada dati red apsolutno konvergira nad $\mathbb{R}$.

D) Iz konvergencije brojnog niza $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin 3}{k^4}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ sledi da dati red konvergira za $x = 3$.

E) Iz konvergencije brojnog niza $\left\{\frac{\sin 3}{n^4}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ sledi da dati red konvergira za $x = 3$.

8. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma dati red divergira.

B) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma se ne dobija odgovor o konvergenciji datog reda.

C) Na osnovu Košijevog kriterijuma dati red konvergira.

D) Na osnovu Rabeovog kriterijuma dati red divergira.

E) Na osnovu Rabeovog kriterijuma se ne dobija odgovor o konvergenciji datog reda.

9. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Lajbnicov kriterijum za konvergenciju se ne može primeniti.

B) Na osnovu Rabeovog kriterijuma se ne dobija odgovor o konvergenciji datog reda.

C) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma se ne dobija odgovor o konvergenciji datog reda.

D) Na osnovu Košijevog kriterijuma dobija se da dati red konvergira.

E) Na osnovu Košijevog kriterijuma dobija se da dati red divergira.

10. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n(n+x)}$, $x \in [0, \infty)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Apsolutna konvergencija datog reda na intervalu $[0, \infty)$ se može pokazati primenom Vajerštrasovog kriterijuma za konvergenciju sa majorizacijom $\frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

B) Apsolutna konvergencija datog reda na intervalu $[0, \infty)$ se može pokazati primenom Vajerštrasovog kriterijuma za konvergenciju sa majorizacijom $\frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n}$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

C) Uniformna konvergencija datog reda na intervalu $[0, \infty)$ se može pokazati primenom Vajerštrasovog kriterijuma za konvergenciju sa majorizacijom $\frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n}$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

D) Iz $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{-1}{n(n+x)} = 0$, $x \in [0, \infty)$, sledi da dati red divergira nad $[0, \infty)$.

E) Dati red divergira za svako $x \in [0, \infty)$.

Test 3.6

1. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ je alternativni red.

B) Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$ sa $L \in \mathbb{R}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

C) Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = L$ sa $L < 1$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

D) Ako je $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$ sa $L > 1$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

E) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n$ je stepeni red.

2. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan brojni red sa pozitivnim članovima takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, a neka je f_n realna funkcija jedne realne promenljive iz intervala $I \subset \mathbb{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $|f_n(x)| \le a_n$ za svako $x \in I$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na I.

B) Ako je $a_n \le |f_n(x)|$ za svako $x \in I$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na I.

C) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1) = A + 1$

E) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira

3. Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, tada je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

B) Ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

C) Ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D) Ako $\{S_n\}$ divergira, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

E) $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$

4. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ proizvoljan brojni red. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

B) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

C) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

E) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

5. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred stepenih redova.

A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n$ **B)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ **C)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{x^2+1}$ **D)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3\cdot(-1)^n$ **E)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$

6. Zaokružiti slova ispred redova koji divergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3}$

7. Zaokružiti slova ispred redova koji apsolutno konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2021}{n^{-22}}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{22}}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2021}}$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-22}{\sqrt[2021]{n}}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{22}} - 22\right)$

8. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2x)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati red je stepeni red sa centrom u 0.

B) Dati red nije funkcionalni red.

C) Poluprečnik konvergencije datog reda je 2.

D) Za $x \in (-\infty, -0.5) \cup (0.5, \infty)$ dati red divergira.

E) Za $x \in (-2, 2)$ dati red apsolutno konvergira.

9. Zaokružiti slova ispred vrednosti promenljive za koju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3}(x-3)^n$, $x \in \mathbb{R}$, konvergira.

A) $x = 0$ **B)** $x = 1$ **C)** $x = 2.5$ **D)** $x = 3.5$ **E)** $x = 5$

10. Zaokružiti slova ispred redova za koje važi da apsolutno konvergiraju na intervalu $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i divergiraju na $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3} x^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}(x+1)^n$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}\, x^n$

Test 3.7

1. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ je alternativni red.

B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

D) Za $x \in \mathbb{R}$, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x$ je funkcionalni red.

E) Za $x \in \mathbb{R}$, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ je stepeni red.

2. Neka brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira. **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira. **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

3. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ je stepeni red.

B) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = L$ sa $L<1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = L$ sa $L\in\mathbb{R}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$ sa $L<1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ je alternativni red.

4. Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

B) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako $\{S_n\}$ konvergira.

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

E) Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

5. Zaokružiti slova ispred redova koji divergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n!}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{n+1}$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^{n+1}}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

6. Zaokružiti slova ispred redova koji apsolutno konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2021}{n^3}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2021}}$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2021]{n}}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}-3\right)$

7. Zaokružiti slova ispred vrednosti promenljive za koju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2}(x+2)^n$, $x\in\mathbb{R}$, konvergira.

A) $x=-\frac{11}{6}$ **B)** $x=-4$ **C)** $x=-3$ **D)** $x=-2$ **E)** $x=\frac{1}{2}$

8. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati red je funkcionalni red. **B)** Dati red je brojni red.

C) Poluprečnik konvergencije datog reda je 2. **D)** Poluprečnik konvergencije datog reda je $-\frac{1}{2}$.

E) Poluprečnik konvergencije datog reda je -2.

9. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcionalni red definisan na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Vajerštrasov kriterijum se primenjuje za utvrđivanje divergencije datog reda na skupu A.

B) Ako je $|f_n(x)| \geq \frac{1}{n}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

C) Ako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

D) Ako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na A.

E) Ako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na A.

10. Zaokružiti slova ispred stepenih redova čiji je poluprečnik konvergencije beskonačno.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\,x^n}{n!}$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2}$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{7}\,x^n$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}(x-1)^n$

Test 3.8

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Brojni red je zbir elemenata svog niza parcijalnih suma.

B) Brojni red je proizvod elemenata svog niza parcijalnih suma.

C) Brojni red konvergira ako i samo ako divergira njegov niz parcijalnih suma.

D) Brojni red konvergira ako i samo ako konvergira njegov niz parcijalnih suma.

E) Brojni red divergira ako i samo ako divergira njegov niz parcijalnih suma.

2. Zaokružiti slova ispred konvergentnih brojnih redova.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

3. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa nenegativnim članovima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $a_n \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

B) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $a_n \geq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

C) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira i $a_n \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

D) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira i $a_n \geq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

E) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $a_n \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

4. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^n$ brojni red, gde su $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ njegov niz parcijalnih suma. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za $q < 1$ dati red divergira. **B)** Za $q < -1$ dati red konvergira. **C)** Za $|q| < 1$ dati red konvergira.

D) $S_n = aq\,\frac{1-q^n}{1-q}$. **E)** $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$.

5. Zaokružiti slova ispred brojnih redova za koje važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $f_n(x) \le \frac{1}{n}$ za svako $x \in B$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na B.

B) Ako je $f_n(x) \le \frac{1}{n^2}$ za svako $x \in B$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na B.

C) Ako je $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$ za svako $x \in B$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na B.

D) Ako je $f_n(x) \le \frac{1}{n^2}$ za svako $x \in B$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergira na B.

E) Ako je $f_n(x) \le \frac{1}{n}$ za svako $x \in B$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergira na B.

7. Dat je stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred vrednosti za koje dati red konvergira.

A) $x = \frac{7}{6}$ **B)** $x = \frac{3}{2}$ **C)** $x = \frac{5}{6}$ **D)** $x = -\frac{5}{6}$ **E)** $x = \frac{1}{2}$

8. Dat je funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(\pi x)}{n^{1.5}}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Iz $\frac{1+\cos^2(\pi x)}{n^{1.5}} \ge \frac{1}{n^{1.5}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sledi da dati red divergira nad $\mathbb{R}$.

B) Iz $\frac{1+\cos^2(\pi x)}{n^{1.5}} \le \frac{2}{n^{1.5}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sledi da dati red konvergira nad $\mathbb{R}$.

C) Iz $\frac{1+\cos^2(\pi x)}{n^{1.5}} \le \frac{2}{n^{1.5}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sledi da dati red divergira nad $\mathbb{R}$.

D) Iz $\frac{1+\cos^2(\pi x)}{n^{1.5}} \ge \frac{1}{n^{1.5}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sledi da dati red konvergira nad $\mathbb{R}$.

E) Za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ važi da je $\frac{1+\cos^2(\pi x)}{n^{1.5}} \le \frac{1}{n^{1.5}}$.

9. Dat je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, gde je $a_n = \frac{n}{2^n}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ **B)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ **C)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ **E)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

10. Dat je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, gde je $a_n = \frac{n!}{(1+1)(1+2)\dots(1+n)}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ **B)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ **C)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ **E)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$

Test 3.9

1.▷ Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **E)** $S_{2019} = \sum\limits_{k=1}^{2019} a_k$

2.▷ Neka je realna funkcija f nenegativna, neprekidna i monotono nerastuća nad intervalom $[1,\infty)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira, tada brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira.

B) Ako nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira, tada brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergira.

C) Ako nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergira, tada brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira.

D) Ako nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergira, tada brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergira.

E) Za ispitivanje konvergencije reda sa pozitivnim članovima se može primeniti Lajbnicov kriterijum.

3.▷ Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira apsolutno, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

D) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2019$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

E) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

4.▷ Dat je stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x-1)^n$ sa poluprečnikom konvergencije R. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (R+1)^n$ konvergira.

B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira.

C) Centar datog stepenog reda je 1.

D) Za $x \in (1-R, 1+R)$ dati stepeni red apsolutno konvergira.

E) Za $x \in (-R, R)$ dati stepeni red apsolutno konvergira.

5. Dati su funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i brojni redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sa pozitivnim članovima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $b_n \leq a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira i $b_n \geq a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

C) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergiraju, tada je $f_n(x) = a_n$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

D) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $|f_n(x)| \geq a_n$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira za $x \in \mathbb{R}$.

E) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $|f_n(x)| \leq a_n$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira nad $\mathbb{R}$.

6. Zaokružiti slova ispred redova koji konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2019}{\sqrt[3]{n}}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-2019}{n^2}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2019}{\sqrt{n}}$

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2019}}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} - 2019\right)$

7. Zaokružiti slova ispred redova koji divergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^9}\right)$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^9} - \dfrac{1}{n^2}\right)$

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2019}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n$

8. Dat je stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x+1}{3}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred vrednosti za koje dati red konvergira.

A) $x = -4$ **B)** $x = -3$ **C)** $x = 1$ **D)** $x = 3$ **E)** $x = 4$

9. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Na osnovu Rabeovog kriterijuma ne dobija se odgovor o konvergenciji datog reda.

B) Na osnovu Rabeovog kriterijuma dati red konvergira.

C) Na osnovu Rabeovog kriterijuma dati red divergira.

D) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma dati red konvergira.

E) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma ne dobija se odgovor o konvergenciji datog reda.

10. Dat je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(-n)^{2019}}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati red apsolutno konvergira.

B) Na osnovu Lajbnicovog kriterijuma dobija se da dati red konvergira.

C) Na osnovu Košijevog kriterijuma dobija se da dati red konvergira.

D) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma dobija se da dati red konvergira.

E) Dati red uslovno konvergira.

Test 3.10

1. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ je alternativni red.

B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

D) Za $x \in \mathbb{R}$ red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x$ je stepeni red.

E) Za $x \in \mathbb{R}$ red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ je stepeni red.

2. Neka je interval $[0,\infty)$ oblast konvergencije funkcionalnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ je funkcionalni red.

B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(-1)$ je brojni red.

C) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(2)$ je divergentan.

D) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ je konvergentan.

E) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(-2)$ je konvergentan.

3. Neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

B) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

C) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_n$

E) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, tada se ne može odrediti da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Zaokružiti slova ispred redova koji divergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

5. Neka brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

6. Zaokružiti slova ispred vrednosti promenljive za koju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2}(x-2)^n$, $x \in \mathbb{R}$, konvergira.

A) $x = \frac{13}{6}$ **B)** $x = 0$ **C)** $x = 1$ **D)** $x = 3$ **E)** $x = \frac{9}{2}$

7.▷ Neka je pozitivan realan broj R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $c_n \geq 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

B) Centar datog stepenog reda je c_n.

C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n R^n$ konvergira.

D) Za $x \in (-R, R)$ dati stepeni red apsolutno konvergira.

E) Za $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ dati stepeni red divergira.

8.▷ Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcionalni red definisan na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Vajerštrasov kriterijum se može primeniti za utvrđivanje divergencije datog reda na skupu A.

B) Ako je $|f_n(x)| \geq \frac{1}{n}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na A.

C) Ako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira na A.

D) Ako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

E) Ako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ za $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

9.▷ Zaokružiti slova ispred redova koji apsolutno konvergiraju.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2020}{n^2}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2020}}$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2020]{n}}$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^3} - 2\right)$

10.▷ Zaokružiti slova ispred stepenih redova čiji je poluprečnik konvergencije 1.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{5}$ **B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n^2}$ **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^n$ **D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{5}\, x^n$ **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} (x-1)^n$

2.4 Furijeovi redovi

Test 4.1

1. ▷ Zaokružiti slova ispred nizova funkcija koji su ortogonalni na intervalu $[0, 2\pi]$.

A) Niz funkcija $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ sa osobinom da je $\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 0$ za $n = 1, 2, 3, \dots$.

B) Niz funkcija: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ sa osobinom da je $\int_0^{2\pi} (f_n(x))^2\,dx = 1$ za $n = 1, 2, 3, \dots$.

C) $\cos x, 2\cos x, 3\cos x, \dots, n\cos x, \dots$

D) $\sin x, 2\sin x, 3\sin x, \dots, n\sin x, \dots$

E) $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \dots$

2. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx$ **B)** $\int_{\pi}^{3\pi} \cos^2 x\,dx$ **C)** $\int_{\pi}^{3\pi} \sin x \cos 2x\,dx$

D) $\int_0^{\pi} \cos 2x\,dx$ **E)** $\int_{2\pi}^{4\pi} \sin^2 x\,dx$

3. ▷ Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\cos(-n\pi) = -\cos(n\pi)$ **B)** $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ **C)** $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^n$

D) $\sin(n\pi) = 0$ **E)** $\cos(n\pi) = (-1)^n$

4. ▷ Neka je f periodična funkcija sa osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (0, 1], \\ x - 1, & x \in (1, 2). \end{cases}$ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f je parna. **B)** Funkcija f je neparna. **C)** $f(-1)$ nije definisano.

D) $f(-1) = 0$ **E)** $f(0) = 1$

5. ▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_{-1}^{1} \sin^2 x \cos x\,dx$ **B)** $\int_{-\pi}^{\pi} x^{22} \sin 23x\,dx$ **C)** $\int_{-4}^{4} \left(x^4 + 1\right) \sin 4x\,dx$

D) $\int_{-3}^{3} (x + 1) \sin x\,dx$ **E)** $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1) \cos x\,dx$

6. ▷ Zaokružiti slova ispred Furijeovog reda funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ 0, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$

A) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2}$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \sin n\pi x$

C) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \cos n\pi x$ **D)** $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\sin n - \sin\frac{n}{2}\right)}{n} \cos nx$

E) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{2}$

7. ▷ Zaokružiti slova ispred funkcija koje se mogu razviti u red sinusa.

A) $f_1(x) = x^3,\ x \in (-6, 6)$ **B)** $f_2(x) = x^2 + x,\ x \in (0, 2)$ **C)** $f_3(x) = x^4 - 1,\ x \in (-3, 3)$

D) $f_4(x) = \cos x,\ x \in (-1, 1)$ **E)** $f_5(x) = x^6,\ x \in (-2, 2)$

8. Neka su a_0, a_n i b_n, $n = 1, 2, \ldots$. Furijeovi koeficijenti funkcije $f(x) = \sin x$ sa $x \in (\pi, 4\pi)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $f(x) = -\dfrac{2}{3\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\dfrac{nx}{3} + b_n \sin\dfrac{nx}{3} \right)$

B) $f(x) = -\dfrac{2}{3\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\dfrac{2nx}{3} + b_n \sin\dfrac{2nx}{3} \right)$

C) Koeficijenti u kosinusnim članovima su $a_n = \dfrac{1}{3\pi} \displaystyle\int_{\pi}^{4\pi} \sin x \cos\dfrac{nx}{3}\, dx$.

D) Koeficijenti u kosinusnim članovima su $a_n = \dfrac{3\pi}{2} \displaystyle\int_{\pi}^{4\pi} \sin x \cos\dfrac{3n\pi x}{2}\, dx$.

E) Koeficijenti u sinusnim članovima su $b_n = \dfrac{2}{3\pi} \displaystyle\int_{\pi}^{4\pi} \sin x \sin\dfrac{2nx}{3}\, dx$.

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 2, & x \in [1,\pi), \end{cases}$ u Furijeov red dobija se red ...

A) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx)$, gde je
$a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx\, dx$, $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin 2nx\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\dfrac{nx}{2} + b_n \sin\dfrac{nx}{2} \right)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos\dfrac{nx}{2}\, dx$, $b_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin\dfrac{nx}{2}\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa.

E) kosinusa.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = -x$, $x \in (-2, 2)$, u Furijeov red dobija se red ...

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{4} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{4} \right)$ sa $a_n = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \cos\dfrac{n\pi x}{4}\, dx$, $b_n = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \sin\dfrac{n\pi x}{4}\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{2} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{2} \right)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$, $a_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \cos\dfrac{n\pi x}{2}\, dx$, $b_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \sin\dfrac{n\pi x}{2}\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$, $a_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \cos nx\, dx$, $b_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x) \sin nx\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa.

E) kosinusa.

Test 4.2

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_0^{\pi} \sin 3x\,dx = 0$ **B)** $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin 3x\,dx = 0$ **C)** $\int_0^{\pi} \sin 3x\,dx = \frac{\pi}{3}$

D) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos 3x\,dx = 0$ **E)** $\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 3x\,dx = 1$

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x\,dx = 0$ **B)** $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2(\cos 3x + 2)\,dx = 0$ **C)** $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\cos 3x\,dx = 0$

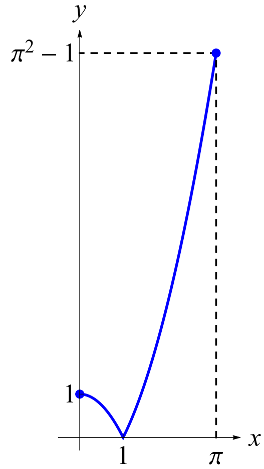
D) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^{2019} + 2018x) \sin 3x\,dx = 0$ **E)** $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^{2018} + 1) \sin 3x\,dx = 0$

3. Zaokružiti slova ispred koeficijenata koji se dobijaju razvijanjem funkcije $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0) \\ -x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ u Furijeov red $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

A) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx$ **B)** $a_n = 0$

C) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-x) \sin nx\,dx$ **D)** $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx$ **E)** $b_n = 0$

4. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Funkcija $f(x)$, sa $x \in [0, \pi]$, kojoj odgovara grafik prikazan na slici 2.4.1 ...
A) je neprekidna na intervalu $(0, \pi)$.
B) nije neprekidna u tački $x = 1$.
C) nije diferencijabilna u tački $x = 1$.
D) je diferencijabilna na intervalu $(0, \pi)$.
E) nije diferencijabilna u tački $x = 2$.



Slika 2.4.1

5. Zaokružiti slova ispred neparnih funkcija.
A) $f_1(x) = x^{2023}\cos(2022x)$ **B)** $f_2(x) = x^{2023}\sin(2022x)$
C) $f_3(x) = x^{2022}\cos(2023x)$ **D)** $f_4(x) = x^{2022}\sin(2023x)$
E) $f_5(x) = x^{2022} + x^{2023}$

6. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sin n\pi = (-1)^n$ **B)** $\sin n\pi = 0$ **C)** $\cos n\pi = (-1)^n$

D) $\cos n\pi = 0$ **E)** $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^n$

7. Neka su funkcije $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ i $g : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ diferencijabilne, pri čemu je funkcija f neparna, a g parna. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Razvijanjem funkcije f u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u sinusnim članovima.

B) Razvijanjem funkcije f u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u kosinusnim članovima.

C) Razvijanjem funkcije g u Furijeov red anuliraj se u Furijeovi koeficijenti u kosinusnim članovima.

D) Razvijanjem funkcije $f \cdot g$ u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u sinusnim članovima.

E) Razvijanjem funkcije $f \cdot g$ u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u kosinusnim članovima.

8. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je diferencijabilna funkcija f definisana na intervalu $(0,\pi]$, tada se razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija ...

A) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx)$, gde je
$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx,\ n=1,2,\dots$

B) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{nx}{2}+b_n\sin\frac{nx}{2}\right)$, gde je
$a_0=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f(x)\cos\frac{nx}{2}\,dx,\ b_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f(x)\sin\frac{nx}{2}\,dx,\ n=1,2,\dots$

C) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, gde je
$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,\dots$

D) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, gde je
$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,\dots$

E) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$, gde je
$a_0=\int_0^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\int_0^{\pi}f(x)\cos n\pi x\,dx,\ b_n=\int_0^{\pi}f(x)\sin n\pi x\,dx,\ n=1,2,\dots$

9. Data je funkcija $f(x)=1-x^2$, $x\in[0,\pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data funkcija se ne može razviti u red sinusa jer ona je parna funkcija.

B) Data funkcija se ne može razviti u red kosinusa jer ona je neparna funkcija.

C) Data funkcija se može razviti u red kosinusa njenim proširivanjem u parnu funkciju.

D) Data funkcija se može razviti u red sinusa njenim proširivanjem u neparnu funkciju.

E) Funkcija $|f(x)|$ se ne može razviti u Furijeov red jer nije diferencijabilna u tački $x=0$.

10. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^{1}|x^{2023}|\sin(2022x)\,dx=0$ **B)** $\int_{-\pi}^{\pi}x^{2023}\sin x\,dx=0$ **C)** $\int_0^1|x^3|\sin x\,dx=0$

D) $\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=-2$ **E)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\pi$

Test 4.3

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je niz funkcija: $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\dots$ ortonormiran na intervalu $[0,\pi]$, tada je $\int_0^{\pi}f_n(x)\,dx=1$ za svako $n=1,2,3,\dots$ i $\int_0^{\pi}f_n(x)f_m(x)\,dx=0$ za svako $n,m=1,2,3,\dots$.

B) Ako je niz funkcija: $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\dots$ normiran na intervalu $[-\pi,0]$, tada je $\int_{-\pi}^{0}(f_n(x))^2\,dx=1$ za svako $n=1,2,3,\dots$.

C) Niz funkcija: $\cos x, 2\cos x, 3\cos x,\dots$ je ortogonalan na intervalu $[-\pi,\pi]$.

D) Niz funkcija: $\cos x, 2\cos x, 3\cos x,\dots$ je ortogonalan na intervalu $[0,2\pi]$.

E) Niz funkcija: $\sin x, \sin 2x, \sin 3x,\dots$ je ortogonalan na intervalu $[\pi,3\pi]$.

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$ **B)** $\cos(-n\pi) = 0$ **C)** $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$

D) $\cos(n\pi) = 0$ **E)** $\cos(n\pi) = (-1)^n$

3. Neka je f periodična funkcija sa osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1,0), \\ 0, & x \in [0,1). \end{cases}$ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f je parna. **B)** Funkcija f je neparna. **C)** $f(3)$ nije definisano.

D) $f(1) = 1$ **E)** $f(2) = 0$

4. Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_{-1}^{1} e^{6x}\cos x\,dx$ **B)** $\int_{-6}^{6} x^{15}\cos 12x\,dx$ **C)** $\int_{-3}^{3}\left(x^4+1\right)\sin 6x\,dx$

D) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ **E)** $\int_{-1}^{1}(x^2-1)\cos x\,dx$

5. Zaokružiti slova ispred integrala čija vrednost je jedan.

A) $\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2 x}{\pi}\,dx$ **B)** $\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos x\,dx$ **C)** $\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\cos 2x\,dx$

D) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{\pi}\,dx$ **E)** $\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$

6. Zaokružiti slova ispred Furijeovog reda funkcije $f(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin 2n\pi x$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}\sin n\pi x$

C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)}{n\pi}\cos n\pi x$ **D)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$

E) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\cos\frac{1}{2}}{n\pi}\cos 2n\pi x$

7. Neka je funkcija f periodična s osnovnim periodom 4 takva da je $f(x) = x$ za $x \in (2,6)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Furijeov red funkcije f je oblika $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{4} + b_n\sin\frac{n\pi x}{4}\right)$, gde su a_0, a_n i b_n, $n \in \mathbb{N}$, odgovarajući koeficijenti.

B) Furijeov red funkcije f je oblika $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$, gde su a_0, a_n i b_n, $n \in \mathbb{N}$, odgovarajući koeficijenti.

C) Furijeov red funkcije f je $2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{4}$ sa $a_n = \frac{1}{4}\int_2^6 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx$, $b_n = \frac{1}{4}\int_2^6 f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$.

D) Furijeov red funkcije f je $4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{2}$ sa $a_n = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$, $b_n = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$.

E) Furijeov red funkcije f je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{2}$ sa $a_n = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$, $b_n = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$.

8. Zaokružiti slova ispred funkcija koje se mogu razviti u red kosinusa.

A) $f_1(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-1,1)$ **B)** $f_2(x) = x^4$, $x \in (-1,0]$ **C)** $f_3(x) = x^2$, $x \in (-3,3)$

D) $f_4(x) = e^x$, $x \in (0,2)$ **E)** $f_5(x) = x^5$, $x \in (-2,2)$

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (-1, 1)$, u Furijeov red dobija se red ...

A) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos nx\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{2} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{2}\right)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos \dfrac{n\pi x}{2}\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\sin \dfrac{n\pi x}{2}\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx$ i $b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa. **E)** kosinusa.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x^3 - 1$, $x \in (-\pi, \pi)$ u Furijeov red dobija se da je ...

A) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,
$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ i $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,
$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\pi x\,dx$ i $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\pi x\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

E) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{nx}{\pi} + b_n \sin \dfrac{nx}{\pi}\right)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \dfrac{nx}{\pi}\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \dfrac{nx}{\pi}\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

Test 4.4

1. Neka je n proizvoljan prirodan broj, a f_1, f_2, f_3, f_4 i f_5 realne funkcije sa jednom realnom promenljivom. Zaokružiti slova ispred neparnih funkcija.

A) $f_1(x) = \cos nx \cdot \sin n$ **B)** $f_2(x) = \sin nx \cdot \cos nx$ **C)** $f_3(x) = \ln x \cdot \sin nx$
D) $f_4(x) = x^{2020}\cos^2 nx$ **E)** $f_5(x) = x^{2019}\sin^2 nx$

2. Neka je f periodična funkcija s periodom 2 takva da je $f(x) = (x+2)^2$ za $x \in [-3, -1]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

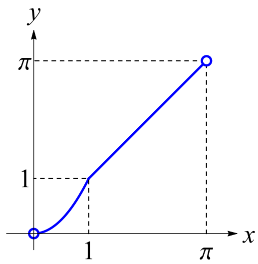
A) Funkcija f je parna. **B)** Funkcija f je neparna. **C)** $f(0)$ nije definisano.
D) $f(0) = 4$ **E)** $f(-3) = f(-1)$

3.▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (x^2+1)\sin 2x\,dx$ **B)** $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x-5)\cos\frac{x}{3}\,dx$ **C)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} x^{2020}\sin 5x\,dx$

D) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{2x}\cos 3\,dx$ **E)** $\displaystyle\int_{-\frac{5\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} x^2\left(\cos 5x+1\right)\,dx$

4.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Funkcija kojoj odgovara grafik prikazan na slici 2.4.2 se ...
A) ne može razviti u Furijeov red.
B) može razviti u Furijeov red.
C) ne može razviti u red kosinusa.
D) može razviti u red sinusa.
E) ne može razviti u red sinusa.



Slika 2.4.2

5.▷ Neka je $n\in\mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sin(-n\pi)=(-1)^n$ **B)** $\sin(-n\pi)=0$ **C)** $\cos n\pi=\cos 0$

D) $\cos(-n\pi)=0$ **E)** $\cos(-n\pi)=(-1)^n$

6.▷ Zaokružiti slova ispred Furijeovih koeficijenata dobijenih razvijanjem funkcije $f(x)=|x|$, $x\in(-2,2)$, u Furijeov red.

A) $a_0=0$ **B)** $a_0=1$ **C)** $a_0=2$

D) $\displaystyle a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$ **E)** $\displaystyle b_n=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|x|\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$

7.▷ Zaokružiti slova ispred funkcija za koje se za koeficijente u sinusnim članovima Furijeovog reda dobija vrednost $\dfrac{2((-1)^n-1)}{n\pi}$.

A) $f_1(x)=2,\ x\in(-2\pi,0)$ **B)** $f_2(x)=-2,\ x\in(0,2\pi)$

C) $f_3(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0]\\ -1, & x\in(0,\pi)\end{cases}$ **D)** $f_4(x)=\begin{cases}x, & x\in(-1,0]\\ -x, & x\in(0,1)\end{cases}$ **E)** $f_5(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,0]\\ -1, & x\in(0,1)\end{cases}$

8.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako trigonometrijski red uniformno konvergira ka funkciji f, tada je on Furijeov red funkcije f.

B) Furijeov red realne funkcije f_1 definisane na intervalu $[0,1)$, sa koeficijentima a_0, a_n i b_n, $n=1,2,\ldots$, ima oblik $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$.

C) Furijeov red realne funkcije f_2 definisane na intervalu $[0,\pi]$, sa koeficijentima a_0, a_n i b_n, $n=1,2,\ldots$, ima oblik $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$.

D) Ako su realne funkcije f i g integrabilne na intervalu $[a,b]\subset\mathbb{R}$ i pripadaju normiranom nizu funkcija, tada važi da je $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,dx=1$ i $\displaystyle\int_a^b (g(x))^2\,dx=1$.

E) Ako su realne funkcije f i g integrabilne na intervalu $[a,b]\subset\mathbb{R}$ i pripadaju ortonormiranom nizu funkcija, tada važi da je $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx=1$.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2020x\,dx = 0$

B) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2020x\,dx = 0$

C) $\int_{3\pi}^{5\pi} \cos 2020x\,dx = 0$

D) $\int_{0}^{2\pi} \sin 2020x \cos 2020x\,dx = 0$

E) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2019x \cos 2020x\,dx = \pi$

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0] \\ 0, & x \in (0, \pi) \end{cases}$ u Furijeov red dobija se ...

A) da su koeficijenti u kosinusnim članovima $a_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

B) da su koeficijenti u sinusnim članovima $b_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

C) da je $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx$.

D) da je $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx$.

E) da je $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin n\pi x$.

Test 4.5

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{2\pi}^{4\pi} \cos 21x\,dx = 0$

B) $\int_{\pi}^{3\pi} \sin 20x \cos 21x\,dx = 1$

C) $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\dfrac{\sin 2021x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1$

D) $\int_{0}^{2\pi} \cos^2 20x\,dx = 1$

E) $\int_{-3\pi}^{-\pi} \sin 20x \sin 21x\,dx = 1$

2. Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost različita od nule.

A) $\int_{-3}^{3} \sin 2x \cos x\,dx$

B) $\int_{-2}^{2} (x^6 + 1) \sin 8x\,dx$

C) $\int_{-5\pi}^{5\pi} x^2 \cos 5\,dx$

D) $\int_{-2\pi}^{0} \cos 3x \sin 2x\,dx$

E) $\int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{7}} \left(1 - x^4\right) \cos 3x\,dx$

3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Realna funkcija jedne realne promenljive koja je periodična s periodom 2 i po delovima neprekidno diferencijabilna na intervalu $(-1, 1)$ može se razviti u Furijeov red na $(-1, 1)$.

B) Realna funkcija jedne realne promenljive koja je periodična s periodom 2 i neprekidno diferencijabilna na intervalu $(-1, 1)$ ne može se razviti u Furijeov red na intervalu $(-1, 1)$.

C) Za dve proizvoljne različite funkcije iz niza funkcija normiranog na intervalu $[a, b]$ važi da je integral njihovog proizvoda na intervalu $[a, b]$ jednak 0.

D) Za dve proizvoljne različite funkcije iz niza funkcija normiranog na intervalu $[a, b]$ važi da je integral njihovog proizvoda na intervalu $[a, b]$ jednak 1.

E) Za proizvoljnu funkciju iz niza funkcija normiranog na intervalu $[a, b]$ važi da je integral njenog kvadrata na intervalu $[a, b]$ jednak 1.

4.▷ Neka je f periodična funkcija s osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = 2x - 4$ za $x \in [2,4)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $f(4)$ nije definisano. **B)** $f(x+2) = f(x)$ **C)** $f(x-2) \neq f(x)$

D) $f(-1) = -6$ **E)** $f(1) = 2$

5.▷ Zaokružiti slova ispred funkcija za koje je Furijeov koeficijent a_0, dobijen za interval na kojem je funkcija navedena, jednak sa 8.

A) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2 \\ 5, & 2 \le x < 5 \end{cases}$ **B)** $f_2(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x < 0 \\ 2, & 0 \le x < 3 \end{cases}$ **C)** $f_3(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \in (0,2] \\ 2\,, & x \in (2,4] \end{cases}$

D) $f_4(x) = |x|,\ x \in (-8,8)$ **E)** $f_5(x) = x^2,\ x \in (-5,5)$

6.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = |x|,\ x \in (-\pi,\pi)$ u Furijeov red dobija se red ...

A) $\dfrac{\pi^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ sa $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx,\ n \in \mathbb{N}$.

B) $\dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$ sa $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x\, dx,\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x\, dx,\ n \in \mathbb{N}$.

C) $\dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ sa $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx,\ n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa. **E)** kosinusa.

7.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x,\ x \in [-2,2]$, u Furijeov red dobija se red ...

A) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{1}\int_{-2}^{2} f(x)\, dx,\ a_n = \dfrac{1}{1}\int_{-2}^{2} f(x) \cos nx\, dx$ i $b_n = \dfrac{1}{1}\int_{-2}^{2} f(x) \sin nx\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{2} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{2}\right)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\, dx,\ a_n = \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{2}\, dx$ i $b_n = \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{2}\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{4} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{4}\right)$, gde je
$a_0 = \dfrac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\, dx,\ a_n = \dfrac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{4}\, dx$ i $b_n = \dfrac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{4}\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa. **E)** kosinusa.

8.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Neka je realna funkcija f neprekidno diferencijabilna i periodična. Ako je red $\dfrac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$ Furijeov red funkcije f, tada je ...

A) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} = f(0) - \dfrac{1}{3}$. **C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} = f(1) - \dfrac{1}{3}$.

D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2\pi^2} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{3}$. **E)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2\pi^2} = f(2) - \dfrac{1}{3}$.

9. Neka je funkcija f periodična s osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = \begin{cases} 2x-4, & x \in (2,3], \\ 2, & x \in (3,4]. \end{cases}$ Razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija se da je $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \right)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za svako $x \in \mathbb{R}$ važi da je $2x - 4 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \right)$.

B) Za svako $x \in (2,3]$ važi da je $2x - 4 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \right)$.

C) Za svako $x \in (1,2]$ važi da je $2 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \right)$.

D) Za svako $x \in (4,5]$ važi da je $2x - 4 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \right)$.

E) Za svako $x \in (4,5]$ važi da je $2 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi x - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \right)$.

10. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\cos n\pi = \begin{cases} 1, & n \text{ paran broj} \\ -1, & n \text{ neparan broj} \end{cases}$ **B)** $\sin n\pi = \begin{cases} 1, & n \text{ paran broj} \\ -1, & n \text{ neparan broj} \end{cases}$

C) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1$ **D)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$ **E)** $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$

Test 4.6

1. Zaokružiti slova ispred nizova funkcija koji su ortogonalni na intervalu $[0, 2\pi]$.

A) $x, 2x, 3x, \ldots$ **B)** $\cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \ldots$ **C)** $\sin x, \sin^2 x, \sin^3 x, \ldots$

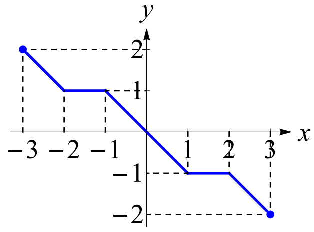
D) $x, \sin x, x^2, \sin 2x, x^3, \sin 3x, \ldots$ **E)** $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 9x \cos 7x \, dx = \pi$ **B)** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 7x \, dx = \pi$ **C)** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 9x \, dx = \pi$

D) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 9x \cos 7x \, dx = \pi$ **E)** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 9x \sin 7x \, dx = \pi$

3. Neka je f realna funkcija kojoj odgovara grafik prikazan na slici 2.4.3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.



Slika 2.4.3

A) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [-3,-2) \\ 1, & x \in [-2,-1) \\ x, & x \in [-1,1) \\ -1, & x \in [1,2] \\ x-1, & x \in (2,3] \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} -1-x, & x \in [-3,-2) \\ 1, & x \in [-2,-1) \\ -x, & x \in [-1,1) \\ -1, & x \in [1,2] \\ 1-x, & x \in (2,3] \end{cases}$ **D)** $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-3,-2) \\ 1, & x \in [-2,-1) \\ x, & x \in [-1,1) \\ 1, & x \in [1,2] \\ 1-x, & x \in (2,3] \end{cases}$

D) Funkcija f nije diferencijabilna. **E)** Funkcija f nije neprekidna.

4. Zaokružiti slova ispred koeficijenata koji se dobijaju razvijanjem funkcije $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ u Furijeov red $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

A) $a_0 = \frac{\pi + 2}{2}$ **B)** $a_n = \frac{n(\pi - 1)(-1)^n - 1}{n^2 \pi}$ **C)** $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}$

D) $b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{-\pi} \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right)$ **E)** $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\pi} \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$

5. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\cos n\pi = 0$ **B)** $\sin n\pi = 1$ **C)** $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^n$

D) $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$ **E)** $\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$

6. Neka je ℓ pozitivan realan broj i neka funkcija $f : (-\ell, \ell) \to \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f je parna ako i samo ako je $f(-x) = f(x)$ za svako $x \in (-\ell, \ell)$.

B) Funkcija f je neparna ako i samo ako je $f(-x) = f(x)$ za svako $x \in (-\ell, \ell)$.

C) Funkcija f ne može biti neparna na simetričnom intervalu $(-\ell, \ell)$.

D) Integral neparne funkcije na simetričnom intervalu je nula.

E) Razvijanjem neparne funkcije u Furijeov red dobija se red kosinusa.

7. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je f proizvoljna neprekidno diferencijabilna realna funkcija data na intervalu $[-1, 1]$, tada se razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija da je ...

A) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, sa $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \, dx$, $a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx$, $b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x \, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

B) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, sa $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx$, $a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx$, $b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x \, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

C) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, sa $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x \, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

D) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x)$, sa $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx$, $a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos 2n\pi x \, dx$, $b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin 2n\pi x \, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

E) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, sa $a_0 = 2 \int_{0}^{1} f(x) \, dx$, $a_n = 2 \int_{0}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

8. Zaokružiti slova ispred funkcija koje se mogu razviti u red sinusa.

A) $f_1(x) = x^2$, $x \in [-1, 1)$ **B)** $f_2(x) = e^x + e^{-x}$, $x \in [-1, 1)$ **C)** $f_3(x) = \cos x$, $x \in [-1, 1)$

D) $f_4(x) = x^2$, $x \in [0, \pi)$ **E)** $f_5(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1)$

9. Data je funkcija $f(x) = e^x - x^2$, $x \in [0, \pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f se može razviti u red sinusa njenim proširivanjem u neparnu funkciju.

B) Funkcija f se ne može razviti u red sinusa.

C) Funkcija f se može razviti u Furijeov red kao periodična funkcija sa periodom π.

D) Funkcija f se može razviti u Furijeov red kao periodična funkcija sa periodom $\frac{\pi}{2}$.

E) Razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija se red kosinusa.

10. Neka je $f(x) = ex$, $x \in [0, 1]$, periodična funkcija sa osnovnim periodom 1. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Furijeov red funkcije f je ...

A) $\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{e}{n\pi}\right) \sin 2n\pi x$

B) $\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2n\pi x - \frac{e}{2n\pi} \sin 2n\pi x\right)$ sa $a_n = \int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$

C) $\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$ sa $a_n = \int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx$, $b_n = \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$

D) $\frac{e}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2n\pi x - \frac{e}{2n\pi} \sin 2n\pi x\right)$ sa $a_n = \int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$

E) $\frac{e}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{e}{n\pi}\right) \sin 2n\pi x$

Test 4.7

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Realna funkcija jedne realne promenljive koja je periodična s periodom 2π i po delovima neprekidno diferencijabilna na intervalu $(-\pi, \pi)$ može se razviti u Furijeov red na $(-\pi, \pi)$.

B) Realna funkcija jedne realne promenljive koja je periodična s periodom 2π i neprekidno diferencijabilna na intervalu $(-\pi, \pi)$ ne može se razviti u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$.

C) Za dve proizvoljne različite funkcije iz niza funkcija ortogonalnog na intervalu $[a, b]$ važi da je integral njihovog proizvoda na intervalu $[a, b]$ jednak 0.

D) Za dve proizvoljne različite funkcije iz niza funkcija ortogonalnog na intervalu $[a, b]$ važi da je integral njihovog proizvoda na intervalu $[a, b]$ jednak 1.

E) Za proizvoljnu funkciju iz niza funkcija ortogonalnog na intervalu $[a, b]$ važi da je integral njenog kvadrata na intervalu $[a, b]$ jednak 1.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{\pi}^{3\pi} \cos 12x \, dx = 1$ **B)** $\int_0^{2\pi} \sin 22x \cos 12x \, dx = 0$ **C)** $\int_{-2\pi}^{0} \sin^2 2020x \, dx = \pi$

D) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 12x \, dx = 0$ **E)** $\int_{\pi}^{3\pi} \sin 2020x \sin 2021x \, dx = 1$

3. Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \sin 2x \sin x \, dx$ **B)** $\int_{-1}^{1} \left(x^{12} + 1\right) \sin 22x \, dx$ **C)** $\int_{-5\pi}^{5\pi} x^4 \sin 5 \, dx$

D) $\int_0^{2\pi} \cos 2x \sin 3x \, dx$ **E)** $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - x^2) \cos x \, dx$

4. Zaokružiti slova ispred funkcija za koje je Furijeov koeficijent a_0, dobijen za interval na kojem je funkcija navedena, jednak sa 3.

A) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$ **B)** $f_2(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 3 \end{cases}$ **C)** $f_3(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1] \\ 2, & x \in (1,2] \end{cases}$

D) $f_4(x) = |x|$, $x \in (-3,3)$ **E)** $f_5(x) = x^2$, $x \in (-3,3)$

5. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sin(-n\pi) = \sin(n\pi)$ **B)** $\sin(-n\pi) = 0$ **C)** $\sin(-n\pi) = (-1)^n$

D) $\cos(n\pi) = 0$ **E)** $\cos(n\pi) = (-1)^n$

6. Neka je f periodična funkcija sa periodom 2 takva da je $f(x) = 2x - 4$ za $x \in [2,4)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f je parna. **B)** Funkcija f je neparna. **C)** $f(0)$ nije definisano.

D) $f(0) = 0$ **E)** $f(1) = f(3)$

7. Neka je f periodična funkcija s osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1], \\ 2, & x \in (1,2]. \end{cases}$ Furijeov red funkcije f je $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \right)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za $x \in (0,1]$ važi da je $2x = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \right)$.

B) Za $x \in (2,3]$ važi da je $2x = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \right)$.

C) Za $x \in \mathbb{R}$ važi da je $2x = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \right)$.

D) Za $x \in (2,3]$ važi da je $2 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \right)$.

E) Za $x \in (1,2]$ važi da je $2 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x - \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \right)$.

8. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1,1]$, u Furijeov red dobija se red ...

A) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \cos nx\,dx$ i $b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$, gde je $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2}\,dx$ i $b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, $a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x\,dx$ i $b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa. **E)** kosinusa.

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x^2$, $x \in (0,1)$, u Furijeov red dobija se da je ...

A) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{0.5} + b_n \sin \frac{n\pi x}{0.5}\right)$ sa $a_0 = \frac{1}{0.5}\int_0^1 f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{0.5}\int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{0.5}\,dx$ i $b_n = \frac{1}{0.5}\int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{0.5}\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x)$ sa $a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx$, $a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x\,dx$ i $b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x)$ sa $a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x\,dx$ i $b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx$, $a_n = \int_0^1 f(x) \cos nx\,dx$ i $b_n = \int_0^1 f(x) \sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

E) $f(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ sa $a_n = \int_0^1 f(x) \cos nx\,dx$ i $b_n = \int_0^1 f(x) \sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x^3$, $x \in (-\pi, \pi)$ u Furijeov red dobija se red ...

A) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$ i $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x\,dx$ i $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$ i $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa. **E)** kosinusa.

Test 4.8

1. Neka je n proizvoljan prirodan broj. Zaokružiti slova ispred neparnih funkcija.

A) $f_1(x) = \cos^2 nx$ **B)** $f_2(x) = \sin^2 nx$ **C)** $f_3(x) = e^x \cos nx$
D) $f_4(x) = x^{2019} \cos nx$ **E)** $f_5(x) = x^{2019} \sin nx$

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sin n\pi = (-1)^n$ **B)** $\sin n\pi = 0$ **C)** $\cos n\pi = (-1)^n$
D) $\cos n\pi = 0$ **E)** $\cos(-n\pi) = -(-1)^n$

3.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{\pi}^{3\pi} \sin 2019x\,dx = 0$ **B)** $\int_{2\pi}^{4\pi} \sin 2019x \cos 2019x\,dx = 0$

C) $\int_{-3\pi}^{-\pi} \cos^2 2019x\,dx = 0$ **D)** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2019x\,dx = 0$

E) $\int_{0}^{2\pi} \sin 2019x \cos 2020x\,dx = \pi$

4.▷ Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (x-3)\,(\sin 2x - 1)\;dx$ **B)** $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x^2+1\right)(\cos 3x + 1)\;dx$ **C)** $\int_{-\frac{5\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} x^2 \sin 5x\,dx$

D) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{2x} \sin 3\,dx$ **E)** $\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} x^{2019} \cos 5x\,dx$

5.▷ Zaokružiti slova ispred Furijeovih koeficijenata dobijenih razvijanjem funkcije $f(x) = |x|,\ x \in (-1,1)$, u Furijeov red.

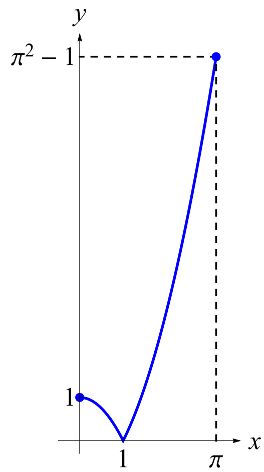
A) $a_0 = 0$ **B)** $a_0 = 1$ **C)** $a_0 = \dfrac{1}{2}$

D) Koeficijenti u kosinusnim članovima: $a_n = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x| \cos \dfrac{n\pi x}{2}\,dx,\ n \in \mathbb{N}$.

E) Koeficijenti u sinusnim članovima: $b_n = \int_{-1}^{1} |x| \sin n\pi x\,dx,\ n \in \mathbb{N}$.

6.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Funkcija kojoj odgovara grafik prikazan na slici 2.4.4 se ...

A) ne može razviti u Furijeov red.
B) može razviti u Furijeov red.
C) ne može razviti u red kosinusa.
D) može razviti u red kosinusa.
E) ne može razviti u red sinusa.



Slika 2.4.4

7.▷ Zaokružiti slova ispred funkcija za koje se za Furijeove koeficijente u sinusnim članovima dobija $\dfrac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$.

A) $f_1(x) = 1,\ x \in (0,\pi)$ **B)** $f_2(x) = -1,\ x \in (-\pi, 0]$

C) $f_3(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi,0] \\ 1, & x \in (0,\pi) \end{cases}$ **D)** $f_4(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-1,0] \\ 2, & x \in (0,1) \end{cases}$ **E)** $f_5(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0] \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$

8.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi,0] \\ 1, & x \in (0,\pi) \end{cases}$ u Furijeov red dobija se ...

A) da su koeficijenti u kosinusnim članovima $a_n = 0,\ n = 1,2,3,\ldots$.

B) da su koeficijenti u sinusnim članovima $b_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n\pi},\ n = 1,2,3,\ldots$.

C) da je $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx$.

D) da je $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx$.

E) da je $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin n\pi x$.

9. Neka je f periodična funkcija sa periodom 2 takva da je $f(x) = (x-4)^2$ za $x \in [3,5]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f je parna. **B)** Funkcija f je neparna. **C)** $f(0)$ nije definisano.

D) $f(0) = 16$ **E)** $f(-1) = f(3)$

10. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako trigonometrijski red uniformno konvergira ka funkciji f, tada je on Furijeov red funkcije f.

B) Funkcija f razvijena u Furijeov red na intervalu $[0,\pi]$, sa koeficijentima a_0, a_n i b_n, $n = 1,2,\ldots$, ima oblik $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

C) Funkcija f razvijena u Furijeov red na intervalu $[-\pi,0]$, sa koeficijentima a_0, a_n i b_n, $n = 1,2,\ldots$, ima oblik $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{2} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{2}\right)$.

D) Ako su realne funkcije f i g integrabilne na $[a,b] \subset \mathbb{R}$ i pripadaju ortonormiranom nizu funkcija, tada važi da je $\int_a^b (f(x))^2\, dx = 1$ i $\int_a^b (g(x))^2\, dx = 1$.

E) Ako su realne funkcije f i g integrabilne na $[a,b] \subset \mathbb{R}$ i pripadaju normiranom nizu funkcija, tada važi da je $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 1$.

Test 4.9

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Niz funkcija: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ je ortonormiran na intervalu $[-\pi,\pi]$ ako je $\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x))^2\, dx = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) f_m(x)\, dx = 0$ za svako $n, m \in \mathbb{N}$ sa $n \neq m$.

B) Niz funkcija: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ je ortogonalan na intervalu $[0,2\pi]$ ako je $\int_0^{2\pi} (f_n(x))^2\, dx = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

C) Niz funkcija: $\sin x, 2\sin x, 3\sin x, \ldots$ je normiran na intervalu $[-\pi,\pi]$.

D) Niz funkcija: $\sin x, 2\sin x, 3\sin x, \ldots$ je normiran na intervalu $[0,2\pi]$.

E) Niz funkcija: $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$ je normiran na intervalu $[-3\pi,-\pi]$.

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sin(2n\pi) = 1$ **B)** $\sin(-n\pi) = 0$ **C)** $\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$

D) $\sin(n\pi) = 0$ **E)** $\sin(n\pi) = (-1)^n$

3. Neka je f periodična funkcija sa osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1), \\ 2-x, & x \in [1,2). \end{cases}$ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f je neparna. **B)** Funkcija f je parna. **C)** $f(-1) = 1$

D) $f(2) = 0$ **E)** $f(3)$ nije definisano.

4. Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_{-6}^{6} x^{29} \cos 3x\, dx$ **B)** $\int_{-1}^{1} e^{6x} (\sin x + 1)\, dx$ **C)** $\int_{-1}^{1} x^3 \sin x\, dx$

D) $\int_{-6}^{6} \left(x^4 - 1\right) \sin 3x\, dx$ **E)** $\int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cos x\, dx$

5. Zaokružiti slova ispred integrala čija je vrednost jednaka nuli.

A) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ **B)** $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$ **C)** $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx$

D) $\int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx$ **E)** $\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx$

6. Zaokružiti slova ispred Furijeovog reda funkcije $f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1. \end{cases}$

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2}$ **B)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2}$ **C)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-4\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi} \sin n\pi x$ **E)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1-\cos n\pi\right)}{n\pi} \sin n\pi x$

7. Neka je f periodična funkcija s osnovnim periodom 4 takva da je $f(x) = x$ za $x \in (-6, -2)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Furijeov red funkcije f je oblika $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{4} + b_n \sin\frac{n\pi x}{4}\right)$, gde su a_0, a_n i b_n, $n \in \mathbb{N}$, odgovarajući koeficijenti.

B) Furijeov red funkcije f je oblika $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right)$, gde su a_0, a_n i b_n, $n \in \mathbb{N}$, odgovarajući koeficijenti.

C) Furijeov red funkcije f je $8 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{4}$, gde je $b_n = \frac{1}{4}\int_{-6}^{-2} f(x) \sin\frac{n\pi x}{4}\, dx$.

D) Furijeov red funkcije f je $-8 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$, gde je $b_n = \frac{1}{2}\int_{-6}^{-2} f(x) \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx$.

E) Furijeov red funkcije f je $-4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$, gde je $b_n = \frac{1}{2}\int_{-6}^{-2} f(x) \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx$.

8. Zaokružiti slova ispred funkcija koje se mogu razviti u red sinusa.

A) $f_1(x) = e^x$, $x \in (0,2)$ **B)** $f_2(x) = e^x + e^{-x}$, $x \in (-1,1)$ **C)** $f_3(x) = x^2$, $x \in (-3,3)$

D) $f_4(x) = |x|$, $x \in (-2,2)$ **E)** $f_5(x) = x^5$, $x \in (-2,2)$

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (-\pi, \pi)$, u Furijeov red dobija se red ...

A) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$,
$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$ i $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$,
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x\, dx$ i $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

C) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$,
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$ i $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) sinusa. **E)** kosinusa.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Razvijanjem funkcije $f(x) = x^3 - 1$, $x \in (-1, 1)$ u Furijeov red dobija se red ...

A) $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cos nx\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin nx\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

B) $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{2} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{2}\right)$, gde je $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cos \dfrac{n\pi x}{2}\,dx$ i $b_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin \dfrac{n\pi x}{2}\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

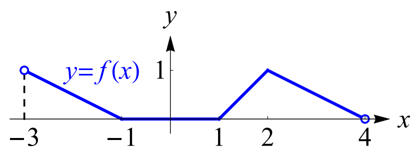
C) $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$, gde je $a_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx$ i $b_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

D) $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{2} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{2}\right)$, gde je $a_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cos \dfrac{n\pi x}{2}\,dx$ i $b_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin \dfrac{n\pi x}{2}\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

E) $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x)$, gde je $a_0 = 2\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$,
$a_n = 2\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2n\pi x\,dx$ i $b_n = 2\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin 2n\pi x\,dx$, za $n \in \mathbb{N}$.

Test 4.10

1. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Realna funkcija f, definisana na intervalu $(-3, 4)$, kojoj odgovara grafik prikazan na slici 2.4.5



Slika 2.4.5

A) ima tačke prekida.

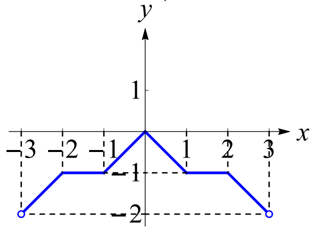
B) je neprekidna.

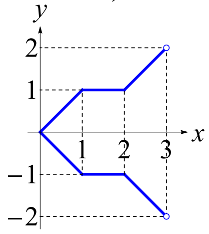
C) je deo po deo diferencijabilna.

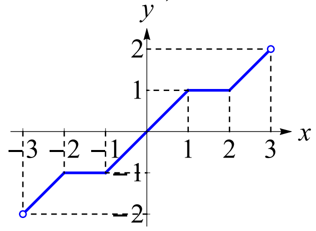
D) je definisana na simetričnom intervalu.

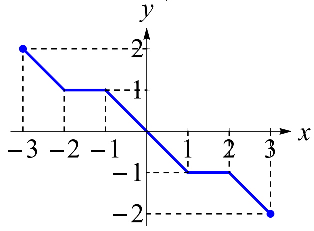
E) nije ograničena.

2. Zaokružiti slova koja odgovaraju graficima parnih funkcija.

A)


B)


C)


D)


E) Kriva $y = x^{2022}\cos(2023x)$.

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\sin n\pi = (-1)^n$

B) $\sin \dfrac{13\pi}{2} = 1$

C) $\sin \dfrac{n\pi}{2} = 1$

D) $\cos n\pi = 0$

E) $\cos \dfrac{(2n-1)\pi}{2} = 0$

4. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-1}^{1} |x^3| \sin 2x\, dx = 0$ **B)** $\int_{-1}^{1} x^3 \sin 2x\, dx = 0$ **C)** $\int_{-\pi}^{\pi} e^x (\cos x + 1)\, dx = 0$

D) $\int_{0}^{\pi} e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ **E)** $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x\, dx = 0$

5. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{0}^{\pi} \sin 2x\, dx = 0$ **B)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx = 1$ **C)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx = 0$

D) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = 1$ **E)** $\int_{0}^{2\pi} \sin 2x \cos 2x\, dx = 1$

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x)\, dx = 0$ **B)** $\int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \cos(2x)\, dx \neq 0$ **C)** $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(2x)\, dx = 0$

D) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 + 2) \sin(2x)\, dx = 0$ **E)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x) \sin(2x)\, dx = 0$

7. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je diferencijabilna funkcija f definisana na intervalu $(1,3]$, tada se razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija ...

A) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x)$,
$a_0 = 2\int_1^3 f(x)\, dx$, $a_n = 2\int_1^3 f(x) \cos 2n\pi x\, dx$, $b_n = 2\int_1^3 f(x) \sin 2n\pi x\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

B) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2}\right)$,
$a_0 = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_1^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_1^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

C) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_1^3 f(x)\, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_1^3 f(x) \cos nx\, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_1^3 f(x) \sin nx\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

D) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2}\right)$,
$a_0 = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\, dx$, $a_n = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$, $b_n = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

E) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$,
$a_0 = \int_1^3 f(x)\, dx$, $a_n = \int_1^3 f(x) \cos n\pi x\, dx$, $b_n = \int_1^3 f(x) \sin n\pi x\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

8. Zaokružiti slova ispred koeficijenata koji se dobijaju razvijanjem funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ -1, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ u Furijeov red $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

A) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx$ **B)** $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx$ **C)** $b_n = 0$

D) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx$ **E)** $a_0 = 2\pi$

9. Data je funkcija $f(x) = 1 - x^3$, $x \in [0, \pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data funkcija se ne može razviti u red kosinusa.

B) Data funkcija se ne može razviti u red sinusa.

C) Data funkcija se može razviti u red kosinusa njenim proširivanjem u parnu funkciju.

D) Data funkcija se može razviti u red sinusa njenim proširivanjem u neparnu funkciju.

E) Data funkcija se može razviti u red sinusa njenim proširivanjem u parnu funkciju.

10. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Razvijanjem parne funkcije u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u sinusnim članovima.

B) Razvijanjem parne funkcije u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u kosinusnim članovima.

C) Razvijanjem neparne funkcije u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u kosinusnim članovima.

D) Razvijanjem neparne funkcije u Furijeov red anuliraju se Furijeovi koeficijenti u sinusnim članovima.

E) Razvijanjem neparne funkcije u Furijeov red dobija se red kosinusa.

2.5 Numerička analiza

Test 5.1

1. ▷ Zaokružiti slova ispred približnih vrednosti broja 1.249830912 koji imaju četiri važeće cifre i 10^{-3} im je granica apsolutne greške.

A) 1.240 **B)** 1.24 **C)** 1.25 **D)** 1.250 **E)** 1.249

2. ▷ Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 4 decimale.

A) $\sin 8 \approx 0.1392$ **B)** $\log_2 24 \approx 4.5850$ **C)** $\cos 1 \approx 0.9998$
D) $\log_{\frac{3}{2}} 24 \approx 1.4464$ **E)** $\sin(-8) \approx -0.9894$

3. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Relativna greška približnog broja x^* broja x, $x \neq 0$, je $\Delta_R(x^*) = \dfrac{x - x^*}{x}$.

B) Granica relativne greške približnog broja x^* broja x, $x \neq 0$, je broj ρ sa osobinom $\dfrac{|x - x^*|}{|x|} \leq \rho$.

C) Apsolutna greška približne vrednosti f^*, $f^* \neq 0$, realne funkcije $f(x)$ je $\Delta_A(f^*) = \dfrac{|f(x) - f^*|}{|f^*|}$.

D) Broj δ za koji važi da je $|f(x) - f^*| \leq \delta$ je granica apsolutne greške približne vrednosti f^* realne funkcije $f(x)$.

E) Apsolutna greška proizvoljnog približnog broja je veća od njegove relativne greške.

4. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Linearna interpolaciona funkcija je linearna kombinacija baznih funkcija koje su linearno nezavisne.

B) Linearna interpolaciona funkcija je linearna kombinacija baznih funkcija koje su linearno zavisne.

C) Interpolacionom funkcijom funkcije $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se aproksimira rešenje jednačine $f(x) = 0$.

D) Interpolacioni polinom je jedinstveno određen za dati problem.

E) Interpolacionom funkcijom se aproksimira nula funkcije.

5. ▷ Neka funkcija $f : [x_0, x_n] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a neka je $P_n(x)$ interpolacioni polinom funkcije f određen čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sa osobinom $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $P_n(x_i) = f(x_i)$ za svako $i = 0, 1, \ldots, n$.

B) Kriva $y = P_n(x)$ prolazi kroz tačke $T_i(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

C) $P_n(x) = f(x)$ za svako $x \in [x_0, x_n]$.

D) P_n je polinom $(n + 1)$-vog stepena.

E) P_n je polinom $(n - 1)$-vog stepena.

6. ▷ Neka je $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, a za funkciju f je poznato da je $f(0) = 2$ i $f(1) = 1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom trapezne formule na I dobija se se veličina $\dfrac{3}{2}$.

B) Primenom trapezne formule na I dobija se veličina 1.

C) Simpsonova formula se ne može primeniti na I sa datim vrednostima.

D) Primenom Simpsonove formule na I dobija se veličina 1.

E) Primenom formule desnih pravougaonika na I dobija se ista veličina kao i primenom trapezne formule.

7. Neka je za realnu funkciju f, definisanu na intervalu $[1,3]$, poznato da je $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ i $f(3) = 1$, i neka je P površina zatvorene oblasti koja se nalazi između krive $y = f(x)$ i x-ose. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom trapezne formule sa datim vrednostima dobija se da je P približno jednako površini oblasti određene krivama $y = 2 - |x-2|$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 3$.

B) Veličina P se ne može približno odrediti formulom srednjih pravougaonika sa datim vrednostima.

C) Formulom srednjih pravougaonika sa datim vrednostima, veličina P se aproksimira zbirom površina dva pravougaonika sa stranicama dužine 1 jedinične duži i 1.5 jedinične duži.

D) Približnim određivanjem veličine P primenom trapezne formule i primenom formule levih pravougaonika dobijaju se različite vrednosti.

E) Primenom Simpsonove formule sa datim vrednostima dobija se da je P približno jednako površini oblasti određene krivama $y = 2 - (x-2)^2$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 3$.

8. Zaokružiti slova ispred intervala u kojima se nalazi rešenje jednačine $3^x + 2x - 2 = 0$.

A) $[1,2]$ **B)** $[0.3, 0.4]$ **C)** $[-0.5, 0.5]$ **D)** $[0.5, 1.5]$

E) Ne postoji takav interval.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $\log_2 x - x^3 = 0$ ima jedno rešenje.

B) Jednačina $\ln x - \cos x = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja.

C) Jednačina $e^x - \cos x = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja.

D) Jednačina $\log_2 x - 2^x = 0$ nema rešenja.

E) Jednačina $e^x + \log_2 x = 0$ nema rešenja.

10. Neka je f neprekidna realna funkcija jedne realne promenljive i neka su a i b proizvoljni realni brojevi iz domena funcije f takvi da je $a < b$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $f(a)f(b) > 0$, tada se za određivanje nule funkcije f može primeniti postupak polovljenja s početnim aproksimacijama a i b.

B) Ako je jednačina $f(x) = 0$ transcendentna, tada se bar jedno rešenje te jednačine nalazi u intervalu $[a,b]$.

C) Ako je $f(a)f(b) < 0$, tada je bar jedna nula funkcije f u intervalu $[a,b]$.

D) Ako u intervalu $[a,b]$ postoji bar jedno rešenja jednačine $f(x) = 0$, tada je $f(a)f(b) > 0$.

E) Ako je $f(a)f(b) < 0$, tada postoji rešenje jednačine $f(x) = 0$ koje se nalazi u intervalu $[a,b]$.

Test 5.2

Neka je u zadacima 1–7 funkcija $f(x) = x^x \sin x$, $I = \int_1^2 f(x)\,dx$ i $n \in \mathbb{N}$. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tačke koje interval $[1,2]$ dele na n jednakih podintervala tako da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Zaokruživanjem broja $f(2)$ na 6 decimala, dobija se broj 3.637190.

B) Zaokruživanjem broja $f(2)$ na 5 decimala, dobija se broj 0.13960.

C) Apsolutna greška koja se pravi zaokruživanjem broja $f(2)$ na 5 decimala je veća od 10^{-6}.

D) Relativna greška koja se pravi zaokruživanjem broja $f(2)$ na 5 decimala je manja od 10^{-7}.

E) Relativna greška koja se pravi zaokruživanjem broja $f(2)$ na 5 decimala je veća od apsolutne greške.

2. ▷ Neka je F interpolaciona funkcija funkcije f dobijena za čvorove interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Neka F ima oblik $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\phi_i$, pri čemu su ϕ_i, $i = 0,1,\ldots,n$, bazne funkcije, a $a_i \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je F interpolacioni polinom, tada je F jednoznačno određen.

B) Ako je $\begin{vmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \ldots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \ldots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \ldots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$, tada je funkcija F jednoznačno određena.

C) Funkcije ϕ_i, $i = 0,1,\ldots,n$, mogu biti $\phi_0 = \frac{1}{x}$, $\phi_1 = \frac{1}{2x}$, $\phi_2 = \frac{1}{3x}$, $\ldots$, $\phi_n = \frac{1}{(n+1)x}$.

D) Funkcije ϕ_i, $i = 0,1,\ldots,n$, mogu biti $\phi_0 = x$, $\phi_1 = x+1$, $\phi_2 = x+2$, $\ldots$, $\phi_n = x+n$.

E) Ako je F interpolacioni polinom, tada je $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = x$, $\phi_2 = x^2$, $\ldots$, $\phi_n = x^n$.

3. ▷ Neka je F interpolaciona funkcija funkcije f dobijena za $n = 1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je F interpolacioni polinom, tada je $F(x) = \frac{x - f(2)}{f(1) - f(2)} + 2 \cdot \frac{x - f(1)}{f(2) - f(1)}$.

B) Ako je F interpolacioni polinom, tada je $F(x) = f(2)(x-1) - f(1)(x-2)$.

C) $|F(x) - f(x)| = 0$ za $x \in \{1,2\}$.

D) Ako je x čvor interpolacije, tada je $|F(x) - f(x)| > 0$.

E) $F(3) = f(3)$

4. ▷ Neka je L_n Lagranžov interpolacioni polinom funkcije f dobijen za čvorove interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za svako $x \in [1,2]$ važi da je $|f(x) - L_3(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \max\limits_{1\leq x\leq 2} |f'''(x)|$.

B) Za svako $x \in [1,2]$ važi da je $|f(x) - L_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot \max\limits_{1\leq x\leq 2} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

C) $|f(1) - L_3(1)| < |f(2) - L_3(2)|$

D) $|f(1.7) - L_2(1.7)| \leq 0.0021 \cdot \max\limits_{1\leq x\leq 2} |f'''(x)|$

E) $|f(1.7) - L_2(1.7)| \leq 0.0035 \cdot \max\limits_{1\leq x\leq 2} |f'''(x)|$

5. ▷ Neka je $n = 2$ i $I \approx \int_1^2 g(x)\,dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Po Simpsonovoj formuli, $g(x) \approx 0.12174x^2 - 0.24308x + 0.13879$.

B) Po formuli desnih pravougaonika, $g(x) \approx \begin{cases} 0.04809, & x \in [1,1.5] \\ 3.63719, & x \in (1.5,2] \end{cases}$.

C) Po formuli levih pravougaonika, $g(x) \approx \begin{cases} 0.84147, & x \in [1,1.5) \\ 1.83252, & x \in [1.5,2] \end{cases}$.

D) Po trapeznoj formuli, g je stepenasta funkcija.

E) Po trapeznoj formuli, $g(x) \approx \begin{cases} 1.98209x - 1.14062, & x \in [1,1.5] \\ 3.60935x - 3.58151, & x \in [1.5,2] \end{cases}$.

6. ▷ Neka je h dužina podintervala $[x_0, x_1]$, $M_i = \max\limits_{1\leq x\leq 2} \left|f^{(i)}(x)\right|$, $i = 1,2,\ldots,n$, i S_n približna vrednost integrala I dobijena Simpsonovom formulom, koristeći čvorove integracije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $|I - S_n| \leq \frac{M_4}{2880}$ **B)** $|I - S_n| \leq \frac{h^4 M_4}{180}$ **C)** $|I - S_n| \geq \frac{h^5 M_4}{90}$

D) $|I - S_n| \leq \frac{M_4}{180n^4}$ **E)** $|I - S_n| \geq \frac{M_4}{180n^4}$

7. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je $\max\limits_{1\leq x\leq 2} \left|f''(x)\right| \approx 3.7696897$, tada, da bi apsolutna greška koja se dobija izračunavanjem integrala I pomoću trapezne formule, koristeći čvorove integracije $x_0, x_1, \ldots, x_n$, bila manja od 10^{-4} potrebno je da važi da je ...

A) $\dfrac{3.7696897}{12n^2} < 10^{-4}$ **B)** $\dfrac{3.7696897}{12n^2} > 10^{-4}$ **C)** $n \geq 57$ **D)** $n \leq 56$

E) n paran broj koji je najmanje 58.

8. ▷ Data je funkcija $F(x) = x - 1 - \sin x$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija F nema realne nule.

B) Postupak polovljenja se može primeniti za određivanje rešenja jednačine $F(x) = 0$ u intervalu $[-\pi, 0]$.

C) Postupak polovljenja se može primeniti za određivanje rešenja jednačine $F(x) = 0$ u intervalu $[2, \pi]$.

D) Postupak polovljenja se može primeniti za određivanje rešenja jednačine $F(x) = 0$ u intervalu $[1, 2]$.

E) Funkcija F ima realne nule.

9. ▷ Neka je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i neka je ξ jedina realna nula funkcije F na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je $F(a)F(b) < 0$, postupkom polovljenja se može odrediti rešenje jednačine $F(x) = 0$ iz intervala $[a, b]$.

B) Ako je $F(a)F(b) < 0$, ξ se može odrediti postupkom polovljenja.

C) Ako je ξ racionalna nula funkcije F, tada se ona ne može odrediti postupkom sečice.

D) Ako je ξ iracionalan koren jednačine $F(x) = 0$, tada se on ne može odrediti postupkom sečice.

E) Postupkom sečice se ne može odrediti rešenje jednačine $F(x) = 0$ iz intervala $[a, b]$.

10. ▷ Neka je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i neka su date tačke $S(x_0, F(x_0))$ i $T(x_1, F(x_1))$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako su x_0, x_1 i x_2 aproksimacije jedinstvenog rešenja jednačine $F(x) = 0$ dobijene ...

A) postupkom polovljenja, tada je x_2 presek x-ose i tangente krive $y = F(x)$ u tački T.

B) postupkom polovljenja, tada je x_2 presek x-ose i sečice krive $y = F(x)$ određene tačkom T.

C) postupkom polovljenja, tada je x_2 središte intervala $[x_0, x_1]$.

D) postupkom sečice, tada je x_2 presek x-ose i sečice krive $y = F(x)$ određene tačkama S i T.

E) postupkom sečice, tada je x_2 središte intervala $[x_0, x_1]$.

Test 5.3

1. ▷ Neka funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za interpolacioni polinom L_n funkcije f na intervalu $[a, b]$ važi da je $L_n(x) \neq f(x)$ za svako $x \in [a, b]$.

B) Ako je funkcija f tabelarno data na intervalu $[a, b]$, tada se ne može odrediti interpolaciona funkcija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

C) Za svaku funkciju f za koju su poznate vrednosti funkcije u čvorovima interpolacije iz intervala $[a, b]$ može se naći interpolaciona funkcija na intervalu $[a, b]$.

D) Ako je $y_i = f(x_i)$ za $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tada za interpolacioni polinom L_n funkcije f na intervalu $[a, b]$, određen čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$, važi da je $L_n(x_i) \neq y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

E) Ako je $y_i = f(x_i)$ za $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tada za interpolacioni polinom L_n funkcije f na intervalu $[a, b]$, određen čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$, važi da je $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

2.▷ Neka je $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, gde je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, podela intervala $[a,b]$ na n podintervala. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

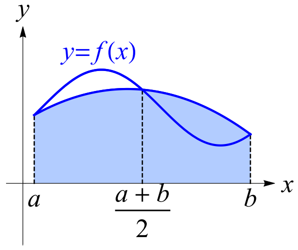
A) Ne postoji ekvidistantna podela intervala.

B) Podela $\mathcal{P}$ je ekvidistantna ako je $x_i = \dfrac{b-a}{i}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$.

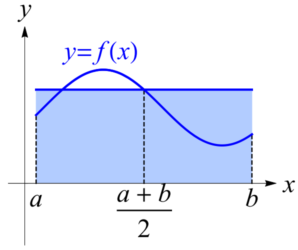
C) Podela $\mathcal{P}$ je ekvidistantna ako je $x_i = x_0 + hi$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, gde je $h = \dfrac{b-a}{n}$.

D) Kod ekvidistantne podele intervala svi podintervali imaju istu dužinu.

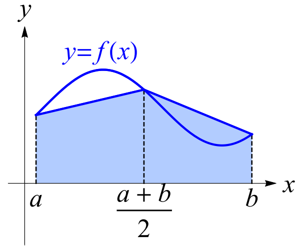
E) Kod ekvidistantne podele intervala postoje podintervali različite dužine.



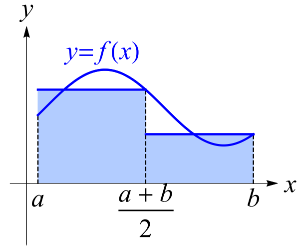
Slika 2.5.1



Slika 2.5.2



Slika 2.5.3



Slika 2.5.4

Neka je u zadacima 3–6 funkcija $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i sa grafikom prikazanim na slikama 2.5.1–2.5.4 i neka je $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

3.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Veličina integrala I, deleći interval integracije na dva jednaka dela, koristeći ...

A) formulu srednjih pravougaonika ne odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.2.

B) formulu srednjih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.4.

C) formulu levih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.2.

D) formulu desnih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.2.

E) formulu desnih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.4.

4.▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Veličina integrala I, deleći interval integracije na dva jednaka dela, koristeći ...

A) formulu levih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.4.

B) trapeznu formulu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.3.

C) trapeznu formulu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.1.

D) Simpsonovu formulu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.3.

E) Simpsonovu formulu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.1.

5.▷ Neka je funkcija f četiri puta neprekidno diferencijabilna, $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$ i $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right|$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je P veličina obeležene površine na slici 2.5.1, tada je $|I-P| \le \dfrac{M_4(b-a)^5}{2880}$.

B) Ako je P veličina obeležene površine na slici 2.5.1, tada je $|I-P| \le \dfrac{M_4(b-a)^5}{180}$.

C) Ako je P veličina obeležene površine na slici 2.5.3, tada je $|I-P| \le \dfrac{M_2(b-a)^3}{192}$.

D) Ako je P veličina obeležene površine na slici 2.5.2, tada je $|I-P| \le \dfrac{M_2(b-a)^3}{24}$.

E) Ako je P veličina obeležene površine na slici 2.5.4, tada je $|I-P| \le \dfrac{M_2(b-a)^3}{192}$.

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Trapezna formula se ne može primeniti na proizvoljnu ekvidistantnu podelu intervala integracije.

B) Simpsonova formula se može primeniti samo kada je broj čvorova integracije neparan.

C) Simpsonova formula se može primeniti samo kada je broj čvorova integracije paran.

D) Primenom trapezne formule se dobija približna vrednost integrala I.

E) Primenom trapezne formule se dobija tačna vrednost integrala I.

7. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna, ali ne i diferencijabilna, i neka jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje u intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Može se primeniti postupak sečice s početnim aproksimacijama $x_0 = a - 1$ i $x_1 = b + 1$.

B) Ne može se primeniti postupak sečice s početnim aproksimacijama $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

C) Može se primeniti Njutnov postupak s početnom aproksimacijom $x_0 = b$.

D) Može se primeniti Njutnov postupak s početnom aproksimacijom $x_0 = a$.

E) Može se primeniti postupak polovljenja s početnim aproksimacijama $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Neka je ξ rešenje jednačine

$$\log_3 x + x^3 = 0. \tag{2.5.1}$$

8. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina (2.5.1) ima dva rešenja.

B) Jednačina (2.5.1) ima jedno rešenje.

C) Jednačina (2.5.1) je nelinearna jednačina.

D) ξ je apscisa tačke preseka krivih $y = \log_3 x$ i $y = x^3$.

E) ξ je ordinata tačke preseka krivih $y = \log_3 x$ i $y = x^3$.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\xi \in [0.74, 1]$ **B)** $\xi \in [0.1, 1]$ **C)** $\xi \in [0.1, 0.5]$ **D)** $\xi \in [0.1, 0.74]$ **E)** $\xi \in [0.7, 1]$

10. Neka su $x_0 = 1$ i $x_1 = 0.74426$ prve dve aproksimacije rešenja jednačine (2.5.1). Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za date početne aproksimacije može se primeniti postupak polovljenja.

B) Po Njutnovom postupku dobija se da je $x_2 = 0.69455$.

C) Po Njutnovom postupku dobija se da je $x_2 = 0.63392$.

D) Po postupku sečice dobija se da je $x_2 = 0.78708$.

E) Po postupku sečice dobija se da je $x_2 = 0.70144$.

Test 5.4

1. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 5 decimala.

A) $\cos 3\pi \approx -3.11015$ **B)** $\operatorname{tg} 8 \approx -6.79971$ **C)** $e^{2+\sin\pi} \approx 0.00000$

D) $\log_{0.5} 9 \approx -3.16993$ **E)** $\log_5 9 \approx 0.73249$

2. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 5 važećih cifara.

A) $\dfrac{1001}{6} \approx 166.83$ **B)** $\dfrac{101}{6} \approx 16.83333$ **C)** $e \approx 2.7183$

D) $\dfrac{6}{111} \approx 0.05405$ **E)** $\dfrac{6}{1003} \approx 0.0060$

3. Zaokružiti slova ispred zaokruženih vrednosti za koje važi da im je 10^{-3} granica apsolutne greške.

A) $3.13728721004 \approx 3.13$ **B)** $1405.408347023 \approx 1405.41$ **C)** $-0.31546487678 \approx -0.3154$

D) $1.36521238897 \approx 1.36$ **E)** $-4.083470239145 \approx -4.08$

4. Neka je realan broj x, različit od nule, zapisan u decimalnom obliku sa pokretnom decimalnom tačkom oblika $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot 0.a_1 a_2 \dots a_t \cdot 10^e$ i neka je x^* njegov približan broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $a_t \neq 0$

B) $a_1 \in \{1, \dots, 9\}$

C) Broj e definiše broj važećih cifara broja x.

D) Broj δ za koji važi da je $|x - x^*| \leq \delta$ je granica relativne greške broja x^*.

E) Relativna greška broja x^* je $|x - x^*|$.

5. Neka je $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ i $x_i = x_{i-1} + h$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Neka su za funkciju f poznate samo vrednosti: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $\dots$, $f(x_n) = y_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom formule levih pravougaonika na integral I dobija se da je $I \approx h \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i$.

B) Primenom formule desnih pravougaonika na integral I dobija se da je $I \approx h \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i$.

C) Primenom formule srednjih pravougaonika na integral I dobija se da je $I \approx h \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$.

D) Primenom trapezne formule na integral I dobija se da je $I \approx \dfrac{h}{2}\left(y_0 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right)$.

E) Primenom Simpsonove formule na integral I dobija se da je $I \approx \dfrac{h}{3}\left(y_0 + 4\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i-1} + y_n\right)$.

6. Data je funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Numeričkom integracijom se može aproksimirati veličina integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

B) Numeričkom integracijom se može aproksimirati funkcija f na intervalu $[a, b]$.

C) Numeričkom integracijom se može odrediti približna nula funkcije f.

D) Interpolacija funkcije f na intervalu $[a, b]$ predstavlja aproksimaciju površine između grafika funkcije f, x-ose i pravih $x = a$ i $x = b$.

E) Interpolacija funkcije f na intervalu $[a, b]$ predstavlja aproksimaciju funkcije f na tom intervalu.

7. Neka funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i $y_i = f(x_i)$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Da bi se odredio interpolacioni polinom određen tačkama x_0, x_1, $\dots$, x_n, funkcija f treba da bude diferencijabilna na (a, b).

B) Lagranžov interpolacioni polinom određen datim tačkama je polinom $(n+1)$-og stepena.

C) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ je interpolacioni polinom.

D) Lagranžov interpolacioni polinom je linearna interpolaciona funkcija.

E) Vrednost interpolacione funkcije u tačkama x_0, x_1, $\dots$, x_n je nula.

8. Neka je $P_n(x)$ interpolacioni polinom funkcije f zadate sa tačkama: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $|P_n(x) - f(x)| = 0,\ x \in [x_0, x_n]$

B) Kriva $y = P_n(x)$ je grafik funkcije f na $[a, b]$.

C) $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx P_n(x)$

D) $P_n(x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,\ i = 1, 2, \ldots, n$

E) $P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Postupak polovljenja je numerički postupak za određivanje rešenja jednačine $f(x, y) = 0$.

B) Njutnovim postupkom se dobija tačno rešenje jednačine $f(x) = 0$.

C) Postupak sečice je iterativni postupak za određivanje približnog rešenja jednačine $f(x) = 0$.

D) Postupak polovljenja je numerički postupak za izračunavanje integrala $I = \int_a^b f(x)dx$.

E) Ako su x_{k-1} i x_k redom $(k-1)$-va i k-ta aproksimacija iz Njutnovog postupka za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, tada je $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$.

10. Zaokružiti slova ispred jednačina koje imaju tačno jedno rešenje.

A) $0.5^x + x^2 - 2 = 0$

B) $\sin x - x^2 = 0$

C) $\sin x - e^x = 0$

D) $\cos x - x^3 = 0$

E) $\cos x - \ln x = 0$

Test 5.5

Neka je u zadacima 1–7 funkcija $f(x) = x^x \log_2 x$, gde je $x > 0$. Neka je $I = \int_1^3 f(x)\,dx$ i neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tačke koje interval $[1, 3]$ dele na n jednakih podintervala ($n \in \mathbb{N}$) tako da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Relativna greška broja 42.794, približne vrednosti broja $f(3)$, je veća od 10^{-5}.

B) Apsolutna greška broja 42.794, približne vrednosti broja $f(3)$, je manja od 10^{-5}.

C) Apsolutna greška broja 42.794, približne vrednosti broja $f(3)$, je veća od 10^{-5}.

D) Zaokruživanjem broja $f(3)$ na 5 decimala, dobija se broj 42.794.

E) Zaokruživanjem broja $f(3)$ na 4 decimale, dobija se broj 42.7940.

2. Neka je L_n Lagranžov interpolacioni polinom funkcije f dobijen za čvorove interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $|f(x) - L_n(x)| \leq \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max\limits_{1 \leq x \leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ za svako $x \in [1, 3]$.

B) $|f(x) - L_n(x)| \geq \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \min\limits_{1 \leq x \leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ za svako $x \in [1, 3]$.

C) Apsolutna greška koja se dobija aproksimiranjem vrednosti $f(1.5)$ sa vrednošću $L_n(1.5)$ je manja ili jednaka sa $\dfrac{1}{(n+1)!} \cdot \max\limits_{1 \leq x \leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \prod\limits_{i=0}^{n} |1.5 - x_i|$.

D) Apsolutna greška koja se dobija aproksimiranjem vrednosti $f(1.5)$ sa vrednošću $L_n(1.5)$ je manja ili jednaka sa $\dfrac{1}{(n+1)!} \cdot \left|f^{(n+1)}(1.5)\right| \prod\limits_{i=0}^{n} |1.5 - x_i|$.

E) $|f(3.5) - L_n(3.5)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \cdot \max\limits_{1 \leq x \leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \prod\limits_{i=0}^{n} |3.5 - x_i|$

3. Neka je F interpolaciona funkcija funkcije f dobijena za čvorove interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je F interpolacioni splajn, tada je F polinom n-tog stepena.

B) Ako je F interpolacioni polinom, tada je F jednak Lagranžovom interpolacionom polinomu.

C) $I = \int_1^3 F(x)\,dx$

D) Ako je F interpolacioni splajn, tada je $F(x_0) = f(x_0), F(x_1) = f(x_1), \ldots, F(x_n) = f(x_n)$.

E) Ako je F Lagranžov interpolacioni polinom, tada je $F(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - f(x_j)}{f(x_i) - f(x_j)}$.

4. Neka je S interpolacioni prirodni kubni splajn funkcije f, sa čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija S je neprekidna na (x_0, x_n).

B) $S(x_0) = S(x_n)$

C) $S_i'''(x_{i+1}) = S_{i+1}'''(x_{i+1})$ za svako $i = 0, 1, \ldots, n-2$.

D) Funkcija S je dva puta neprekidno diferencijabilna na (x_0, x_n).

E) Funkcija S nije diferencijabilna na (x_0, x_n).

5. Neka je $n = 2$ i $I \approx \int_1^3 g(x)\,dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Po formuli levih pravougaonika, $g(x) = \begin{cases} f(2), & x \in [1,2] \\ f(3), & x \in [2,3] \end{cases}$.

B) Po formuli desnih pravougaonika, g je linearna funkcija.

C) Po trapeznoj formuli, $g(x) = \frac{f(3)}{2}(x-1)$.

D) Po trapeznoj formuli, $g(x) = \begin{cases} 4(x-1), & x \in [1,2] \\ (f(3) - f(2))(x-2) + f(2), & x \in [2,3] \end{cases}$.

E) Po Simpsonovoj formuli, $g(x) \approx 17.39699x^2 - 48.19098x + 30.79399$.

6. Neka je T_n približna vrednost integrala I dobijena trapeznom formulom, koristeći čvorove integracije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i neka je $M = \max_{1\le x\le 3} \left|f''(x)\right|$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $|I - T_n| \le \frac{8M}{45n^4}$ **B)** $|I - T_n| \ge \frac{M}{3n^2}$ **C)** $|I - T_n| \le \frac{M}{3n^2}$

D) $|I - T_n| \ge \frac{2M}{3n^2}$ **E)** $|I - T_n| \le \frac{2M}{3n^2}$

7. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.

Ako je $\max_{1\le x\le 3} \left|f^{(4)}(x)\right| \approx 1666.09888$, tada, da bi apsolutna greška koja se pravi prilikom izračunavanja vrednosti integrala I pomoću Simpsonove formule, koristeći čvorove integracije $x_0, x_1, \ldots, x_n$, bila manja od 10^{-3} potrebno je da važi da je ...

A) $\frac{8 \cdot 1666.09888}{45n^4} > 10^{-3}$ **B)** $\frac{8 \cdot 1666.09888}{45n^4} < 10^{-3}$ **C)** $n < 24$

D) $n = 23$ **E)** $n \ge 24$

8. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja. Primenom postupka polovljenja s početnim aproksimacijama $x_0 = -6$ i $x_1 = -4$ za određivanje rešenja jednačine $2^x = \cos x$ dobija se da je ...

A) $x_3 = -5.5$. **B)** $x_3 = -4.5$. **C)** $x_4 = -4.75$. **D)** $x_4 = -4.25$. **E)** $x_4 = -5.25$.

Neka je ξ rešenje jednačine

$$\ln x = \cos x. \tag{2.5.2}$$

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina (2.5.2) je linearna jednačina. **B)** Jednačina (2.5.2) je algebarska jednačina.

C) Jednačina (2.5.2) je transcendentna jednačina. **D)** Jednačina (2.5.2) ima jedno rešenje.

E) Jednačina (2.5.2) ima dva rešenja.

10. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\xi \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

B) ξ je apscisa tačke preseka krivih $y = \ln x$ i $y = \cos x$.

C) Za Njutnov postupak potrebne su dve početne aproksimacije.

D) Za postupak polovljenja potrebna je jedna početna aproksimacija.

E) Za postupak sečice potrebna je jedna početna aproksimacija.

Test 5.6

1. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 5 decimala.

A) $\log_2 \frac{9}{5} \approx 0.63399$ **B)** $\log_{\frac{2}{9}} 5 \approx -1.07005$ **C)** $\operatorname{tg} \frac{7}{3} \approx -1.04680$

D) $\cos \frac{5}{3} \approx 0.99958$ **E)** $\cos \frac{2}{3} \approx -0.13872$

2. Zaokružiti slova ispred brojeva koji imaju četiri važeće cifre.

A) 4.1830 **B)** 0.1770 **C)** 41.107 **D)** 0.0005178 **E)** 40.1800

3. Neka je realan broj x, različit od nule, zapisan u decimalnom obliku sa pokretnom decimalnom tačkom oblika $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot 0.a_1a_2 \dots a_t \cdot 10^e$ i neka je x^* njegov približan broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Broj $0.a_1a_2 \dots a_t$ je manstisa broja x.

B) Broj x ima t važećih cifara.

C) Broj e definiše preciznost broja x.

D) Granica apsolutne greške broja x^* je broj ρ s osobinom $\frac{x - x^*}{x} \le \rho$.

E) Apsolutna greška broja x^* je $\Delta_A(x^*) = \frac{|x - x^*|}{|x|}$.

4. Neka su za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ poznate vrednosti: $y_0, y_1, \dots, y_n$ redom u tačkama: $x_0, x_1, \dots, x_n$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Neka je $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Determinanta sistema linearnih jednačina definisanih interpolacionim uslovima za interpolacioni uslov je jednaka nuli.

B) Interpolacioni polinom određen datim tačkama jednak je polinomu $\sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - y_k}{y_i - y_k}$.

C) Ako je F interpolaciona funkcija, tada je $F(x_i) = y_i$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

D) Interpolacioni polinom određen datim tačkama je polinom n-tog stepena.

E) Interpolacioni polinom funkcije f nije jedinstveno određen za date tačke.

5.▷ Neka je L_n Lagranžov interpolacioni polinom funkcije f zadate sa čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sa osobinom da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ moraju biti ekvidistantno raspoređeni.

B) L_n je aproksimacija funkcije f na intervalu $[x_0, x_n]$.

C) L_n je aproksimacija integrala $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$.

D) $L_n(x) = f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

E) $L_n(x_i) = f(x_i)$ za svako $i = 0, 1, \ldots, n$.

6.▷ Neka su za funkciju f poznate vrednosti: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$ i neka je $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, pri čemu je $h = \dfrac{b-a}{n}$ i $x_i = a + ih$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je funkcija f neprekidno diferencijabilna, $\dfrac{(b-a)h^2}{180} \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$ je granica apsolutne greške trapezne formule.

B) Ako je funkcija f neprekidno diferencijabilna, $\dfrac{(b-a)h^4}{180} \cdot \min\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$ je granica apsolutne greške Simpsonove formule.

C) Primenom formule desnih pravougaonika na I dobija se da je $I \approx \dfrac{h}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$.

D) Primenom formule levih pravougaonika na I dobija se da je $I \approx h\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i$.

E) Simpsonova formula se može primeniti na I samo ako je n parno.

7.▷ Neka su za funkciju f poznate vrednosti: $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$ i $f(4) = 1$ i neka se $I = \displaystyle\int_1^4 (f(x))^2\,dx$ određuje na osnovu tih datih vrednosti. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom formule levih pravougaonika dobija se da je $I \approx 5$

B) Primenom formule desnih pravougaonika dobija se da je $I \approx 6$.

C) Primenom formule srednjih pravougaonika dobija se da je $I \approx 4$.

D) Primenom trapezne formule dobija se da je $I \approx 5$.

E) Primenom Simpsonove formule dobija se da je $I \approx \dfrac{8}{3}$.

8.▷ Zaokružiti slova ispred algebarskih jednačina.

A) $x^7 - 3x^4 + \pi = 0$ **B)** $\cos x - x = 0$ **C)** $20x^3 + 21x^2 = 2021$

D) $\ln x + \sin x = 0$ **E)** $2^x = \operatorname{tg} x$

9.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija $f(x) = \ln x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ima tačno jednu nulu.

B) Funkcija $f(x) = \ln x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nema nijednu nulu u intervalu $[1, 4]$.

C) Funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sin x$ nema nijednu nulu u intervalu $[1, 4]$.

D) Funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sin x$ ima tačno dve nule.

E) Funkcija $f(x) = \ln x - x^2$ nema nijednu nulu u intervalu $[1, 4]$.

10. Neka su $x_0 = 1$ i $x_1 = 1.29341$ prve dve aproksimacije rešenja jednačine $\ln x = \cos x$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Po Njutnovom postupku dobija se da je $x_2 = 2.22648$.

B) Po Njutnovom postupku dobija se da je $x_2 = 1.20561$.

C) Po Njutnovom postupku dobija se da je $x_2 = 1.30296$.

D) Po postupku sečice dobija se da je $x_2 = 2.13979$.

E) Po postupku sečice dobija se da je $x_2 = 1.30269$.

Test 5.7

1. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 5 decimala.

A) $\sin\dfrac{3}{2} \approx 0.02617$ **B)** $\cos(-4) \approx 0.99756$ **C)** $\mathrm{tg}\, 3 \approx -0.14255$

D) $\log_4 \dfrac{3}{2} \approx 0.39624$ **E)** $\log_{\frac{3}{2}} 4 \approx 3.41902$

2. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana na intervalu $[a, b]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Linearna interpolaciona funkcija je određena linearno zavisnim baznim funkcijama.

B) Linearna interpolaciona funkcija je određena linearno nezavisnim baznim funkcijama.

C) Interpolaciona funkcija funkcije f na $[a, b]$ se može primeniti samo za ekvidistantne tačke intervala $[a, b]$.

D) Svaka interpolaciona funkcija je polinom.

E) Pod polinomnom interpolacijom funkcije f na intervalu $[a, b]$ se podrazumeva određivanje integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana na intervalu $[a, b]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Interpolaciona funkcija funkcije f na intervalu $[a, b]$ se može odrediti samo ako je funkcija f zadata formulom.

B) Za interpolacioni polinom P_n funkcije f na intervalu $[a, b]$ važi da je $P_n(x) = f(x)$ za svako $x \in [a, b]$.

C) Ako je funkcija f tabelarno data na intervalu $[a, b]$, tada se može odrediti interpolaciona funkcija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

D) Ako je $y_i = f(x_i)$ za $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tada za interpolacioni polinom P_n funkcije f dobijen sa čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ važi da je $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

E) Ako je $y_i = f(x_i)$ za $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tada za interpolacioni polinom P_n funkcije f dobijen sa čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ne mora da važi da je $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

4. Neka su za funkciju f poznate vrednosti: $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ i $f(5) = 4$ i neka je $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

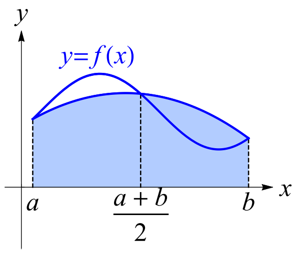
A) Primenom trapezne formule sa datim vrednostima dobija se da je $I \approx 7$.

B) Primenom trapezne formule sa datim vrednostima dobija se ista vrednost kao i primenom Simpsonove formule sa datim vrednostima.

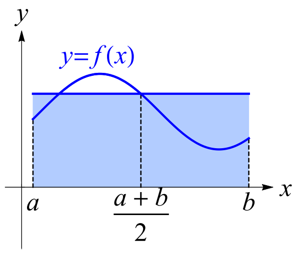
C) Primenom formule levih pravougaonika sa datim vrednostima dobija se ista vrednost kao i primenom formule desnih pravougaonika sa datim vrednostima.

D) Sa datim vrednostima se ne može primeniti formula srednjih pravougaonika.

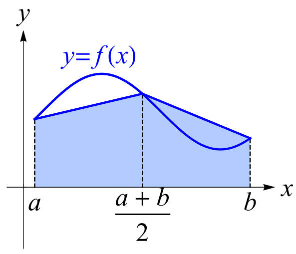
E) Primenom formule srednjih pravougaonika sa datim vrednostima dobija se zbir površina dva različita pravougaonika.



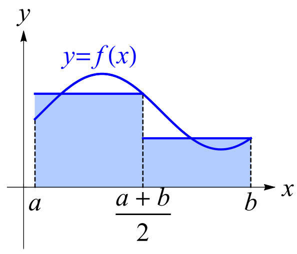
Slika 2.5.5



Slika 2.5.6



Slika 2.5.7



Slika 2.5.8

5. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Veličina integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, deleći interval integracije na dva jednaka dela, koristeći ...

A) Simpsonovu metodu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.5.

B) Simpsonovu metodu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.6.

C) trapeznu metodu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.5.

D) trapeznu metodu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.6.

E) trapeznu metodu odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.7.

6. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Veličina integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, deleći interval integracije na dva jednaka dela, koristeći ...

A) formulu srednjih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.6.

B) formulu desnih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.6.

C) formulu levih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.7.

D) formulu srednjih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.8.

E) formulu desnih pravougaonika odgovara obeleženoj površini prikazanoj na slici 2.5.8.

7. ▷ Zaokružiti slova ispred intervala za koje se, ispitivanjem krajeva intervala, može utvrditi da se u njima nalazi rešenje jednačine $\dfrac{\ln x+2}{x+1}-\dfrac{1}{2}=0$.

A) $[5,6]$ **B)** $[6,8]$ **C)** $[4,6]$ **D)** $[6,7]$ **E)** $[7,9]$

8. ▷ Neka funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Postupkom sečice se mogu odrediti realne nule realne funkcije jedne realne promenljive.

B) Postupak polovljenja za rešavanje jednačine $f(x)=0$ se može primeniti na proizvoljnu funkciju f.

C) Njutnov postupak za rešavanje jednačine $f(x)=0$ se može primeniti na proizvoljnu funkciju f.

D) Njutnov postupak za rešavanje jednačine $f(x)=0$ se može primeniti ako je funkcija f diferencijabilna.

E) Njutnov postupak za rešavanje jednačine $f(x)=0$ se može primeniti ako je funkcija f neprekidna.

9. ▷ Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana na intervalu $[a,b]$. Neka su x_0, x_1 i x_2 aproksimacije rešenja jednačine $f(x)=0$ i neka su date tačke $A(x_0,f(x_0))$ i $B(x_1,f(x_1))$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Njutnovim postupkom se x_2 određuje kao presek x-ose i tangente krive $y=f(x)$ u tački B.

B) Postupkom sečice se x_2 određuje kao presek x-ose i sečice krive $y=f(x)$ određene tačkama A i B.

C) Postupkom polovljenja se x_2 određuje kao presek x-ose i sečice krive $y=f(x)$ određene tačkama A i B.

D) Postupkom sečice se x_2 određuje kao presek x-ose i tangente krive $y=f(x)$ u tački B.

E) Njutnovim postupkom se x_2 određuje kao presek x-ose i sečice krive $y=f(x)$ određene tačkom B.

10.▷ Data je funkcija $f(x) = x^4 + x^2 - 1$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija f ima 4 realne nule.

B) Funkcija f ima 2 realne nule.

C) Postupak polovljenja se može primeniti za određivanje rešenja jednačine $f(x) = 0$ u intervalu $[0,1]$.

D) Postupak polovljenja se može primeniti za određivanje rešenja jednačine $f(x) = 0$ u intervalu $[-2,-1]$.

E) Postupak polovljenja se može primeniti za određivanje rešenja jednačine $f(x) = 0$ u intervalu $[1,2]$.

Test 5.8

1.▷ Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 5 decimala.

A) $\sin\dfrac{7}{2} \approx -0.35078$ **B)** $\sin 4 \approx 0.06976$ **C)** $\operatorname{ctg} 4 \approx 14.30067$

D) $\log_5 \dfrac{2}{3} \approx 0.14356$ **E)** $\log_{\frac{5}{2}} 3 \approx 1.19898$

2.▷ Zaokružiti slova ispred zaokruživanja za koja važi da im je 10^{-3} granica apsolutne greške.

A) $4.1830 \approx 4.18$ **B)** $0.1770 \approx 0.2$ **C)** $41.107 \approx 41.1$

D) $0.005178 \approx 0.005$ **E)** $40.1800 \approx 40.2$

3.▷ Neka je realan broj x, koji nije nula, zapisan u decimalnom obliku sa pokretnom decimalnom tačkom oblika $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot 0.a_1a_2\ldots a_t \cdot 10^e$ i neka je x^* njegov približan broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) a_1 je cifra koja može da bude 0, 1, …, 8 ili 9.

B) Broj x ima e značajnih cifara.

C) Broj e definiše preciznost broja x.

D) Granica apsolutne greške broja x^* je broj δ s osobinom $|x - x^*| \le \delta$.

E) Apsolutna greška broja x^* je $\Delta_A(x^*) = |x - x^*|$.

4.▷ Neka su za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ poznate vrednosti: $y_0, y_1, \ldots, y_n$ redom u tačkama: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, za neko $n \in \mathbb{N}$, s tim da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Interpolacioni polinom određen datim tačkama je polinom $(n+1)$-og stepena.

B) Interpolacioni polinom određen datim tačkama jednak je polinomu $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$.

C) Kod polinomne interpolacije, interpolaciona funkcija se traži u obliku $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, gde su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nepoznati koeficijenti.

D) Kod polinomne interpolacije, interpolaciona funkcija se traži u obliku $a_0 \cdot a_1x \cdot a_2x^2 \cdot \ldots \cdot a_nx^n$, gde su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nepoznati koeficijenti.

E) Vrednost interpolacionog polinoma u tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je nula.

5.▷ Neka je P_n interpolacioni polinom funkcije f zadate sa čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ za koje važi da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\,dx$ **B)** $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx P_n(x)$

C) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx P_n(x_i),\ i = 0,1,\ldots,n$ **D)** $P_n(x_i) = f(x_i)$ za svako $i = 0,1,\ldots,n$.

E) $P_n(x) \neq f(x)$ za svako $x \in [x_0, x_n]$.

6. Neka su za funkciju f poznate vrednosti: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$ i neka je $I = \int_a^b f(x)\,dx$, pri čemu je $h = \dfrac{b-a}{n}$ i $x_i = a + ih$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom trapezne formule na I dobija se da je $I \approx \dfrac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right)$.

B) Primenom Simpsonove formule na I dobija se da je $I \approx \dfrac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i-1} + y_n\right)$.

C) Granice apsolutnih grešaka za formulu levih i desnih pravougaonika su jednake.

D) Granice apsolutnih grešaka za formulu srednjih pravougaonika i trapeznu formulu su jednake.

E) Formula srednjih pravougaonika može se primeniti na I samo za neparno n.

7. Neka su za funkciju f poznate vrednosti: $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$ i $f(4) = 1$ i neka se $I = \int_1^4 f(x)\,dx$ određuje na osnovu tih datih vrednosti. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom formule levih pravougaonika dobija se da je $I \approx 3$

B) Primenom formule desnih pravougaonika dobija se da je $I \approx 3$.

C) Primenom formule srednjih pravougaonika dobija se da je $I \approx 2$.

D) Primenom trapezne formule dobija se da je $I \approx 2$.

E) Primenom Simpsonove formule dobija se da je $I \approx 2$.

8. Neka je f realna funkcija jedne realne promenljive i neka su a i b proizvoljni realni brojevi takvi da je $a < b$. Zaokružiti slova ispred uslova koji moraju biti zadovoljeni da bi se približno rešenje jednačine $f(x) = 0$ moglo odrediti postupkom polovljenja s početnim aproksimacijama a i b.

A) Funkcija f je diferencijabilna.

B) $f(a)f(b) < 0$

C) $f(a)f(b) > 0$

D) $f(a)$ i $f(b)$ moraju biti istog znaka.

E) Funkcija f je neprekidna.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x^2$ ima tačno jedno rešenje.

B) Jednačina $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x^2$ nema nijedno rešenje u intervalu $[0, 3]$.

C) Jednačina $\ln x = \sin x$ ima rešenje u intervalu $[1, 3]$.

D) Jednačina $\ln x = \sin x$ ima beskonačno mnogo rešenja.

E) Jednačina $\sin x = x^2$ nema nijedno rešenje u intervalu $[1, 3]$.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja. Primenom postupka polovljenja s početnim aproksimacijama $x_0 = -3$ i $x_1 = -1$ za određivanje rešenja jednačine ...

A) $2^x - \cos 2x = 0$ dobija se da je $x_3 = -1.50000$.

B) $2^x - \cos 2x = 0$ dobija se da je $x_3 = -2.50000$.

C) $2^x - \cos 2x = 0$ dobija se da je $x_3 = -1.25000$.

D) $x + \ln(x+4) = 0$ dobija se da je $x_3 = -2.50000$.

E) $x + \ln(x+4) = 0$ dobija se da je $x_3 = -2.00000$.

Test 5.9

1. Zaokružiti slova ispred približnih brojeva broja 0.035982 koji imaju tri značajne cifre i 10^{-3} im je granica apsolutne greške.

A) 0.036 **B)** 0.0359 **C)** 0.04 **D)** 0.0360 **E)** 0.035

2. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 4 decimale.

A) $\cos^2 2 \approx 0.1732$ **B)** $\operatorname{tg} 3 \approx 0.0524$ **C)** $\sin 1 \approx 0.0175$

D) $\log_4 \dfrac{3}{2} \approx 0.3962$ **E)** $\log_3 24 \approx 2.8928$

3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Relativna greška približnog broja x^* broja x je $\Delta_R(x^*) = |x - x^*|$.

B) Ako je ρ granica relativne greške približnog broja x^* broja x, $x \neq 0$, tada je $\dfrac{|x - x^*|}{|x|} \leq \rho$.

C) Apsolutna greška približne vrednosti f^*, $f^* \neq 0$, realne funkcije $f(x)$ je $\Delta_A(f^*) = |f(x) - f^*|$.

D) Ako je δ granica apsolutne greške približne vrednosti f^* realne funkcije $f(x)$, tada je $\delta \leq f(x) - f^*$.

E) Ako je x^* približna vrednost broja x, a f realna funkcija jedne promenljive, tada je $f(x) = f(x^*)$.

4. Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koeficijenti, a funkcije $\phi_i : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, bazne funkcije linearne interpolacione funkcije F funkcije f. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija F je oblika $F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_n\phi_n(x)$.

B) Funkcija F je oblika $F(x) = a_0\phi_0(x) \cdot a_1\phi_1(x) \cdot \ldots \cdot a_n\phi_n(x)$.

C) Funkcije $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ su linearno nezavisne.

D) Koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ su linearno nezavisni.

E) Bazne funkcije mogu biti $\phi_0(x) = 1$, $\phi_{2k-1}(x) = k \sin x$ i $\phi_{2k}(x) = k \cos x$, $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$.

5. Neka je F interpolaciona funkcija funkcije $f : [x_0, x_n] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadate sa čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takve da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $F(x) = f(x)$ za svako $x \in [x_0, x_n]$.

B) Kriva $y = F(x)$ prolazi kroz tačke $T_0(x_0, f(x_0))$, $T_1(x_1, f(x_1))$, $\ldots$, $T_n(x_n, f(x_n))$.

C) $F(x_i) = x_i$ za svako $i = 0, 1, \ldots, n$.

D) $F(x_0 - 1) = f(x_0 - 1)$ i $F(x_n + 1) = f(x_n + 1)$.

E) Ako je F interpolacioni polinom, tada je $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

6. Neka je $I = \int_0^2 f(x)\,dx$, a za funkciju f je poznato da je $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ i $f(2) = 3$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom trapezne formule sa datim vrednostima dobija se da je $I \approx 2$.

B) Primenom formule srednjih pravougaonika sa datim vrednostima dobija se da je $I \approx \dfrac{7}{2}$.

C) Simpsonova formula se ne može primeniti sa datim vrednostima.

D) Primenom Simpsonove formule sa datim vrednostima dobija se da je $I \approx 3$.

E) Primenom formule levih pravougaonika sa datim vrednostima dobija se ista vrednost kao i primenom Simpsonove formule sa datim vrednostima.

7. Neka je za realnu funkciju f, definisanu na intervalu $[1,3]$, poznato da je $f(1) = 1$ i $f(3) = 5$, i neka je P površina oblasti koja se nalazi između krive $y = f(x)$ i x-ose. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom trapezne formule sa datim vrednostima dobija se da je P približno jednako površini oblasti određene krivama $y = 2x-1$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 3$.

B) Formula srednjih pravougaonika se ne može primeniti za izračunavanje veličine P sa datim vrednostima.

C) Formulom srednjih pravougaonika sa datim vrednostima, veličina P se aproksimira površinom pravougaonika sa stranicama dužine 2 jedinične duži i 3 jedinične duži.

D) Formulom desnih pravougaonika sa datim vrednostima, veličina P se aproksimira površinom pravougaonika sa stranicama dužine 5 jediničnih duži i 3 jedinične duži.

E) Primenom Simpsonove formule sa datim vrednostima dobija se da je P približno jednako površini oblasti određene krivama $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 3$.

8. Zaokružiti slova ispred intervala u kojima se nalazi nula funkcije $f(x) = 2^x + 3x - 3$.

A) $[0.4, 0.5]$ **B)** $[0.6, 0.7]$ **C)** $[0.5, 1]$ **D)** $[0, 0.4]$

E) Ne postoji takav interval.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $x^3 - \log_2 x = 0$ nema rešenja.

B) Jednačina $\ln x - \sin x = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja.

C) Jednačina $e^x - \sin x = 0$ ima tačno jedno rešenje.

D) Jednačina $\log_{0.5} x - 2^x = 0$ ima tačno jedno rešenje.

E) Jednačina $e^x + x^2 = 0$ ima tačno jedno rešenje.

10. Neka je f neprekidna realna funkcija jedne realne promenljive i neka su a i b proizvoljni realni brojevi iz domena funkcije f takvi da je $a < b$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Da bi se primenio Njutnov postupak za određivanje rešenja jednačine $f(x) = 0$, potrebne su dve početne aproksimacije.

B) Ako je $f(a)f(b) > 0$, tada se za određivanje rešenja jednačine $f(x) = 0$ može primeniti postupak polovljenja s početnim aproksimacijama $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

C) Ako u intervalu $[a,b]$ postoji jedno rešenje jednačine $f(x) = 0$, tada je $f(a)f(b) < 0$.

D) Ako je $f(a)f(b) < 0$, tada se bar jedno rešenje jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[a,b]$.

E) Za određivanje rešenja jednačine $f(x) = 0$, može se primeniti postupak sečice s početnim aproksimacijama $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Test 5.10

1. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 5 decimala.

A) $\sin 0.5\pi \approx 0.02742$ **B)** $\operatorname{ctg} 8 \approx 7.11537$ **C)** $e^{2+\sin 1} \approx 17.14096$

D) $\log_5 8 \approx 1.29203$ **E)** $\log_{\frac{1}{2}+\frac{3}{7}} 2 \approx -2.61984$

2. Zaokružiti slova ispred vrednosti čije su približne vrednosti dobijene zaokruživanjem na 4 važeće cifre.

A) $\dfrac{2022}{129} \approx 15.67$ **B)** $\dfrac{1}{29} \approx 0.03448$ **C)** $\dfrac{29}{2022} \approx 0.0143422$

D) $\dfrac{1}{2022} \approx 0.0005$ **E)** $\dfrac{2022}{29} \approx 69.7241$

3.▷ Zaokružiti slova ispred zaokruživanja za koja važi da im je 10^{-4} granica apsolutne greške.

A) $-3.137287210 \approx -3.1373$ **B)** $1405.408347 \approx 1405.408$

C) $-0.315464876 \approx -0.3154$ **D)** $1.365212388 \approx 1.365$

E) $4.083470239 \approx 4.08$

4.▷ Neka je $x = 0.3110150 \cdot 10^4$ i neka je x^* njegov približni broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) 3110150 je mantisa broja x.

B) Broj x ima 6 važećih cifara.

C) Broj x je zapisan u decimalnom obliku sa pokretnom decimalnom tačkom.

D) Ako je g je granica relativne greške broja x^*, tada je $|x - x^*| \leq g$.

E) Ako je g je granica apsolutne greške broja x^*, tada je $|x - x^*| \leq g$.

5.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Njutnov postupak je numerički postupak za izračunavanje integrala $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

B) Njutnov postupak je iterativni postupak za određivanje približnog rešenja jednačine $f(x) = 0$.

C) Ako su x_{k-2}, x_{k-1} i x_k redom $(k-2)$-ga, $(k-1)$-va i k-ta aproksimacija iz postupka sečice za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, tada je $x_k = x_{k-1} - \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} f(x_{k-1})$.

D) Ako su x_{k-2}, x_{k-1} i x_k redom $(k-2)$-ga, $(k-1)$-va i k-ta aproksimacija iz postupka polovljenja za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, tada je $x_k = \dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_{k-2})}{2}$.

E) Ako su x_{k-2}, x_{k-1} i x_k redom $(k-2)$-ga, $(k-1)$-va i k-ta aproksimacija iz postupka polovljenja za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, tada je $x_k = \dfrac{x_{k-1} + x_{k-2}}{2}$.

6.▷ Zaokružiti slova ispred jednačina koje imaju tačno dva rešenja.

A) $\cos x + x^2 = 0$ **B)** $\cos x - e^x = 0$ **C)** $e^x - x^2 = 0$

D) $1 - x^2 - \sin x = 0$ **E)** $1 - x^2 - \cos x = 0$

7.▷ Data je funkcija $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Trapeznom formulom se može aproksimirati veličina integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

B) Simpsonovom formulom se može aproksimirati funkcija f na intervalu $[a,b]$.

C) Primitivnim kvadraturnim formulama se može odrediti približna nula funkcije f.

D) Interpolacioni splajn funkcije f na intervalu $[a,b]$ predstavlja aproksimaciju površine između grafika funkcije f, x-ose i pravih $x = a$ i $x = b$.

E) Interpolacioni splajn funkcije f na intervalu $[a,b]$ predstavlja aproksimaciju funkcije f na tom intervalu.

8.▷ Neka je L_n Lagranžov interpolacioni polinom funkcije f zadate sa tačkama: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, s osobinom da je $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} y_k \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$

B) Kriva $y = L_n(x)$ je grafik funkcije f na $[a,b]$.

C) $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx L_n(x)$

D) $L_n(x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,\ i = 1,2,\ldots,n$

E) $L_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,\ldots,n$

9. ▷ Neka funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $y_i = f(x_i)$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n$ i $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Da bi se odredio interpolacioni polinom određen tačkama x_0, x_1, ..., x_n, funkcija f treba da bude neprekidna na intervalu (a, b).

B) Interpolacioni polinom određen datim tačkama je polinom n-tog stepena.

C) Grafik interpolacione funkcije funkcije f se poklapa sa grafikom funkcije f.

D) Trigonometrijska interpolacija je linearna interpolacija.

E) Interpolacioni polinom određen datim tačkama nije jedinstven.

10. ▷ Neka je $I = \int_a^b f(x)\,dx$, n paran prirodan broj, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ i $x_i = x_{i-1} + h$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Neka su za funkciju f poznate samo vrednosti: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, ..., $f(x_n) = y_n$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Primenom formule levih pravougaonika s datim vrednostima dobija se da je $I \approx h \sum_{i=0}^{n} y_i$.

B) Primenom formule desnih pravougaonika s datim vrednostima dobija se da je $I \approx h \sum_{i=1}^{n} y_i$.

C) Primenom formule srednjih pravougaonika s datim vrednostima dobija se da je $I \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$.

D) Primenom trapezne formule s datim vrednostima dobija se da je $I \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) + y_n\right)$.

E) Primenom Simpsonove formule s datim vrednostima dobija se da je $I \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}\right) + \right.$ $\left. + 2\left(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}\right) + y_n\right)$.

2.6 Parcijalne diferencijalne jednačine

Test 6.1

1.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Nepoznata u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini je uređen par realnih brojeva.

B) Nepoznata u običnoj diferencijalnoj jednačini je realan broj.

C) U običnoj diferencijalnoj jednačini figuriše izvod nepoznate funkcije jedne promenljive.

D) Parcijalna diferencijalna jednačina je i obična diferencijalna jednačina.

E) Obična diferencijalna jednačina je i parcijalna diferencijalna jednačina.

2.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Red diferencijalne jednačine je najviši red izvoda nepoznate funkcije koji se javlja u jednačini.

B) Linearna obična diferencijalna jednačina je linearna po nepoznatoj funkciji i po njenim izvodima.

C) Linearna parcijalna diferencijalna jednačina je linearna po nezavisnim promenljivama nepoznate funkcije.

D) U linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini ne može da figuriše proizvod nezavisnih promenljivih nepoznate funkcije.

E) Svaka nehomogena linearna obična diferencijalna jednačina ima trivijalno rešenje.

3.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Red parcijalne diferencijalne jednačine je najviši stepen nepoznate koji se javlja u jednačini.

B) Partikularno rešenje obične diferencijalne jednačine se dobija iz opšteg rešenja posmatrane jednačine.

C) Singularno rešenje obične diferencijalne jednačine se dobija iz opšteg rešenja posmatrane jednačine.

D) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine se dobija iz partikularnog rešenja posmatrane jednačine.

E) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine sadrži proizvoljne funkcije.

4.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Uslovi u rubnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku.

B) Rubni problem se ne može definisati za obične diferencijalne jednačine.

C) Konturni problem se ne može definisati za parcijalne diferencijalne jednačine.

D) Rešenje graničnog problema sa običnom diferencijalnom jednačinom je partikularno rešenje posmatrane jednačine koje zadovoljava konturne uslove problema.

E) Rešenje mešovitog problema je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine problema koje zadovoljava granične i početne uslove posmatranog problema.

5.▷ Zaokružiti slova ispred linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

A) $y'' + yy' = 0,\ y = y(x)$ **B)** $y^2 + y = e^x,\ y = y(x)$ **C)** $y''_{xx} + ty'_x + xe^t = 0,\ y = y(x,t)$

D) $xy'' + x^3 y = e^x,\ y = y(x)$ **E)** $ty'_x + xyy'_t = xt,\ y = y(x,t)$

6.▷ Zaokružiti slova ispred homogenih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

A) $y''_{xt} + e^x y'_t = y,\ y = y(x,t)$ **B)** $y'' - y' + y = 0,\ y = y(x)$

C) $y''_{xx} + y'_t + y + x = 0,\ y = y(x,t)$ **D)** $e^x y' + x^3 y = 0,\ y = y(x)$

E) $ty''_{xx} + xy''_{tt} = tx,\ y = y(x,t)$

7. ▷ Zaokružiti slova ispred uslova koji mogu biti uslovi konturnog problema sa jednačinom $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ definisanom na skupu $D = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$, gde je $u = u(x, y)$.

A) $u(0, y) = 0$, $u'_x(0, y) = 0$, za $-1 \le y \le 1$

B) $u(x, 1) = 1$, $u(x, -1) = 1$, za $0 \le x \le 1$

C) $u(0, y) = u(1, y) = 0$, za $-1 \le y \le 1$

D) $u(0, y) = f(y)$, za $-1 \le y \le 1$ i neprekidnu funkciju f

E) $u(x, -1) = u'_x(x, -1) = 0$, za $0 \le x \le 1$

8. ▷ Neka je $u = u(x, y)$, F i G proizvoljne dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije jedne realne promenljive, a C_1 i C_2 proizvoljne realne konstante. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $u = 0.5x^2 + yx + F(y)$ je potpuno rešenje jednačine $u'_x = x + y$.

B) $u = 0.5x^2 + yx + F(y)$ je opšte rešenje jednačine $u'_x = x + y$.

C) $u = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ je opšte rešenje jednačine $u''_{xx} - u = 0$.

D) $u = F(x) \sin y + G(x) \cos y$ je rešenje jednačine $u''_{yy} = u$.

E) $u = e^y \sin x + C_1 \cos x$ je rešenje jednačine $u''_{xx} + u = 0$.

9. ▷ Dat je problem $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$, pri čemu je $y = y(x)$, $x \in [0, \pi]$ i $k \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Trivijalno rešenje nije rešenje datog problema.

B) Dati problem je mešoviti problem.

C) Za svako $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ je rešenje datog problema za $k = 1$.

D) $y = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je sopstvena funkcija datog problema za $k = 4$.

E) $y = C_1 \sin 6x + C_2 \cos 6x$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je karakteristična funkcija datog problema za $k = 3$.

10. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda važi princip superpozicije.

B) Po principu superpozicije, proizvod dva partikularna rešenja parcijalne diferencijalne jednačine je takođe rešenje te jednačine.

C) Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih nepoznata funkcija $u(x)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = e^x$.

D) Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih nepoznata funkcija $y(x, t)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $y = x \cdot t$.

E) Furijeova metoda razdvajanja promenljivih se može primeniti na rešavanje talasne jednačine.

Test 6.2

1. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Red diferencijalne jednačine je broj nezavisnih promenljivih u nepoznatoj funkciji.

B) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija dve promenljive, tada je ta jednačina obična diferencijalna jednačina.

C) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija dve promenljive, tada je ta jednačina parcijalna diferencijalna jednačina.

D) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija dve promenljive, tada je ta jednačina diferencijalna jednačina drugog reda.

E) Ako je drugi izvod nepoznate funkcije najviši izvod koji učestvuje u diferencijalnoj jednačini, tada je ta jednačina diferencijalna jednačina drugog reda.

2. ▷ Data je jednačina $xy'' + y' - 2y = f(x)$ sa nepoznatom funkcijom $y = y(x)$ i neprekidnom funkcijom f. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data jednačina je nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

B) Data jednačina je linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

C) Data jednačina sa $f(x) \equiv 0$ je nehomogena linearna obična diferencijalna jednačina.

D) Data jednačina sa $f(x) \equiv 0$ je homogena linearna obična diferencijalna jednačina.

E) Data jednačina sa je linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda.

3. ▷ Data je jednačina $u''_{xx} = \dfrac{1}{c^2}\, u'_t$, gde je $u = u(x,t)$ nepoznata funkcija i c ($c \neq 0$) realan broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data jednačina je linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda.

B) Data jednačina je linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

C) Data jednačina je linearna obična diferencijalna jednačina prvog reda.

D) Data jednačina je linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

E) Data jednačina je jednačina provođenja toplote.

4. ▷ Dat je problem s jednačinom $y'' + k^2 y = 0$, $y = y(x)$, $x \in [0,\pi]$, $k \in \mathbb{R}$, i uslovima $y(0) = y(\pi) = 0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati problem je početni problem.

B) Dati problem je mešoviti problem.

C) Dati problem je konturni problem.

D) Dati problem je granični problem.

E) Dati problem nema rešenje.

5. ▷ Data je diferencijalna jednačina $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^{-2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ sa $u = u(x,t)$ i $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Data diferencijalna jednačina je ...

A) parcijalna diferencijalna jednačina.

B) obična diferencijalna jednačina.

C) talasna jednačina.

D) Laplasova jednačina.

E) jednačina provođenja toplote.

6. ▷ Neka je a ($a \neq 0$) realan broj, a $u = u(x,t)$ nepoznata funkcija. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $u''_{xx} = a^{-2}u'_t$ je hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina.

B) Jednačina $u''_{xx} = a^{-2}u'_t$ je parabolična parcijalna diferencijalna jednačina.

C) Jednačina $u''_{xx} = a^{-2}u''_{tt}$ je hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina.

D) Jednačina $u''_{xx} = a^{-2}u''_{tt}$ je parabolična parcijalna diferencijalna jednačina.

E) Jednačina $u''_{xx} = a^{-2}u''_{tt}$ je eliptična parcijalna diferencijalna jednačina.

7. ▷ Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Metodom razdvajanja promenljivih ...

A) rešava se linearna parcijalna diferencijalna jednačina.

B) rešava se obična diferencijalna jednačina.

C) nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = X(x) + Y(y)$.

D) nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = X(x) \cdot Y(y)$.

E) nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = X(x)^{Y(y)}$.

8. Neka je k realan broj. Dat je problem $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$, gde je $y = y(x)$, $x \in [0, \pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Rešenje diferencijalne jednačine datog problema se traži u obliku $y(x) = e^{rx}$, gde je r konstanta.

B) Trivijalno rešenje je sopstvena funkcija datog problema.

C) Jedino rešenje datog problema je trivijalno rešenje.

D) Sopstvene vrednosti datog problema su funkcije $y(x) = C\cos kx$, gde je C realan broj, a k ceo broj.

E) Sopstvene vrednosti datog problema su $k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm 2n, \ldots$, gde je $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $u = u(x,y)$, $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je data diferencijalna jednačina

$$a(x,y)u''_{xx} + b(x,y)u''_{xy} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x + e(x,y)u'_y + f(x,y)u = g(x,y), \tag{2.6.3}$$

gde su a, b, c, d, e, f i g date funkcije neprekidne na skupu D.

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Jednačina (2.6.3) je ...

A) linearna parcijalna diferencijalna jednačina.

B) hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina na D ako je $b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y) > 0$, $(x,y) \in D$.

C) parabolična parcijalna diferencijalna jednačina na D ako je $b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y) < 0$, $(x,y) \in D$.

D) eliptična parcijalna diferencijalna jednačina na D ako je $b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y) = 0$, $(x,y) \in D$.

E) obična diferencijalna jednačina drugog reda.

10. Neka je (DJ) diferencijalna jednačina (2.6.3) sa $g(x,y) \equiv 0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina (DJ) je homogena obična diferencijalna jednačina.

B) Ako su u_1 i u_2 dva linearno nezavisna rešenja jednačine (DJ), tada je $u(x,y) = c_1 u_1(x,y) + c_2 u_2(x,y)$ takođe rešenje jednačine (DJ) za proizvoljno $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

C) Ako su u_1 i u_2 dva linearno nezavisna rešenja jednačine (DJ), tada je $u(x,y) = u_1(x,y) \cdot u_2(x,y)$ takođe rešenje jednačine (DJ).

D) Za jednačinu (DJ) važi princip superpozicije.

E) Za jednačinu (DJ) ne važi princip superpozicije.

Test 6.3

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Rešenje diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja zajedno sa svojim izvodima zadovoljava datu jednačinu.

B) Rešenje parcijalne diferencijalne jednačine je svaka funkcija jedne promenljive koja zajedno sa svojim izvodima zadovoljava datu jednačinu.

C) Rešenje obične diferencijalne jednačine je svaka funkcija dve promenljive koja zajedno sa svojim parcijalnim izvodima zadovoljava datu jednačinu.

D) Rešenje obične diferencijalne jednačine je svaka funkcija jedne promenljive koja zajedno sa svojim izvodima zadovoljava datu jednačinu.

E) Geometrijsko značenje rešenja obične diferencijalne jednačine je površ u prostoru.

2. Zaokružiti slova ispred običnih diferencijalnih jednačina.

A) $y''_{xx} + y'_t = 0$, $y = y(x,t)$ **B)** $y'' + y' \sin x = 0$, $y = y(x)$ **C)** $xy' + y = 0$, $y = y(x)$

D) $y'_x + y'_t = 0$, $y = y(x,t)$ **E)** $\cos y + \sin x = 0$, $y = y(x)$

3. Zaokružiti slova ispred nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina.

A) $x^2y'' + xy = \sin x,\ y = y(x)$ **B)** $x^2y'' + xy' = 0,\ y = y(x)$ **C)** $x^2y'_x + xy'_t = y,\ y = y(x,t)$

D) $x^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x + y,\ y = y(x,t)$ **E)** $x^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\ y = y(x,t)$

4. Zaokružiti slova ispred linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

A) $y''_{xx} + y''_{tt} = \sin x,\ y = y(x,t)$ **B)** $y'_x + \sqrt{y'_t} = \sin x,\ y = y(x,t)$ **C)** $y'_x + y'_t = \sin x,\ y = y(x,t)$

D) $y'' + y' + y = \sin x,\ y = y(x)$ **E)** $x^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2 = f(x,y),\ y = y(x,t)$

5. Posmatrajmo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,t)$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih, ...

A) rešenje posmatrane jednačine se traži u obliku $u(x,t) = e^{X(x,t)}e^{T(x,t)}$.

B) rešenje posmatrane jednačine se traži u obliku $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

C) rešenje posmatrane jednačine se traži u obliku $u(x,t) = \sin(X(x)) + \cos(T(t))$.

D) rešenje posmatrane jednačine se traži u obliku $u(x,t) = C_1X(x) + C_2T(t)$, gde su C_1 i C_2 konstante.

E) $u(x,t) \equiv 0$ je jedno rešenje posmatrane jednačine.

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Talasna jednačina je obična diferencijalna jednačina.

B) Red obične diferencijalne jednačine je najviši stepen nepoznate u jednačini.

C) Obična diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina.

D) Svaka funkcija koja je rešenje obične diferencijalne jednačine je opšte rešenje posmatrane jednačine.

E) Red parcijalne diferencijalne jednačine je red najvišeg parcijanog izvoda u jednačini.

7. Neka je k proizvoljan realan broj. Zaokružiti slova ispred početnih problema.

A) $y'' + k^2y = 0,\ y = y(x),\ x \in [0,\pi],\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

B) $y'' + k^2y = 0,\ y = y(x),\ x \in [0,\pi],\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

C) $y'' + k^2y = 0,\ y = y(x),\ x \in [0,\pi],\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$

D) $y''_{xx} + y'_t = 0,\ y = y(x,t),\ x \in [0,\pi],\ t \geq 0,\ y(0,t) = 0,\ y(\pi,t) = 0\ (t \geq 0)$

E) $y''_{xx} + y'_t = 0,\ y = y(x,t),\ x \in [0,\pi],\ t \geq 0,\ y(x,0) = \sin x\ (0 \leq x \leq \pi)$

8. Neka je k realan broj. Dat je konturni problem $y'' + k^2y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0$, gde je $y = y(x),\ x \in [0,\pi]$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jedino rešenje datog problema je trivijalno rešenje.

B) Svako rešenje datog problema je netrivijalno rešenje.

C) Sopstvene vrednosti datog problema su vrednosti parametra k za koje postoje netrivijalna rešenja tog problema.

D) Sopstvene funkcije datog problema su funkcije $y(x) = C\sin kx$, gde $C \in \mathbb{R}$, a $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

E) Sopstvene funkcije datog problema su funkcije $y(x) = C\cos kx$, gde $C \in \mathbb{R}$, a $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

9. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je početni problem s parcijalnom diferencijalnom jednačinom dobro postavljen tada ...

A) problem ima rešenje. **B)** problem nema rešenje. **C)** problem ima opšte rešenje.

D) problem ima beskonačno mnogo rešenja. **E)** problem ima samo jedno rešenje.

10. Data je diferencijalna jednačina $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = u(x,y)$, gde je a data realna konstanta. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $u = x^2 + xy + a^2y^2$ je potpuno rešenje date jednačine.

B) $u = x^2 + xy + a^2y^2$ je opšte rešenje date jednačine.

C) $u = Ax^2 + Bxy + Aa^2y^2 + Cx + Dy + E$ je opšte rešenje date jednačine, gde su A, B, C, D i E proizvoljne konstante.

D) $u = Ax^2 + Bxy + Aa^2y^2 + Cx + Dy$ je rešenje date jednačine, gde su A, B, C i D proizvoljne konstante.

E) $u = x^2 + xy + a^2y^2 + Ax + By + C$ je rešenje date jednačine, gde su A, B i C proizvoljne konstante.

Test 6.4

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Nepoznata u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini je funkcija jedne promenljive.

B) Nepoznata u običnoj diferencijalnoj jednačini je funkcija jedne promenljive.

C) Nepoznata u običnoj diferencijalnoj jednačini je realan broj.

D) Svaka diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina.

E) Svaka funkcionalna jednačina je diferencijalna jednačina.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Parcijalna diferencijalna jednačina je specijalan oblik obične diferencijalne jednačine.

B) Opšte rešenje obične diferencijalne jednačine se može dobiti iz opšteg rešenja parcijalne diferencijalne jednačine.

C) Opšte rešenje obične diferencijalne jednačine se može dobiti iz partikularnog rešenja posmatrane jednačine.

D) Partikularno rešenje obične diferencijalne jednačine se može dobiti iz opšteg rešenja posmatrane jednačine.

E) Singularno rešenje obične diferencijalne jednačine se može dobiti iz opšteg rešenja posmatrane jednačine.

3. Neka je a realan broj različit od nule. Zaokružiti slova ispred parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

A) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial y}{\partial t} = f(x,t), y = y(x,t)$

B) $a^2 y'_x + y'_t = 0, y = y(x,t)$

C) $y''_{xx} + y''_{tt} = \sin x, y = y(x,t)$

D) $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = 0, y = y(t)$

E) $a^2 y'' + y' = 0, y = y(x)$

4. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Rešenje konturnog problema je opšte rešenje obične diferencijalne jednačine problema.

B) Rešenje mešovitog problema je funkcija koja je rešenje obične diferencijalne jednačine problema i zadovoljava rubne i početne uslove posmatranog problema.

C) Rešenje mešovitog problema je funkcija koja je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine problema i zadovoljava konturne i početne uslove posmatranog problema.

D) Uslovi u konturnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku.

E) Uslovi u graničnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na početnu i krajnju tačku intervala na kojem se rešava problem.

5. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Metodom razdvajanja promenljivih ...

A) rešavaju se linearne obične diferencijalne jednačine.

B) rešavaju se linearne parcijalne diferencijalne jednačine.

C) nepoznata funkcija $u(x)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = e^x$.

D) nepoznata funkcija $u(x, y)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = x \cdot y$.

E) nepoznata funkcija $u(x, y)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $u = X(x) \cdot Y(y)$.

6. Zaokružiti slova ispred nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina.

A) $y''_{xx} \sin t + y'_t = 0$, $y = y(x, t)$

B) $y'' + y' \sin y = 0$, $y = y(x)$

C) $y'_x + y'_t + y + t = 0$, $y = y(x, t)$

D) $xy' + y = \sin x$, $y = y(x)$

E) $ty''_{xx} + xy''_{tt} = 0$, $y = y(x, t)$

7. Zaokružiti slova ispred uslova koji mogu biti uslovi graničnog problema sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom sa nepoznatom funkcijom $u(x, t)$ definisanom na skupu $D = \{(x, t) \ : \ 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0\}$.

A) $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = \pi$, za $t \ge 0$

B) $u(x, 0) = 0$, $u'_x(x, 0) = 0$, za $0 \le x \le \pi$

C) $u'_x(0, t) = u(\pi, t) = 0$, za $t \ge 0$

D) $u(0, t) = u'_x(0, t) = 0$, za $t \ge 0$

E) $u(x, 0) = u'_x(x, 0) = 0$, za $0 \le x \le \pi$

8. Neka je $u = u(x, y)$, F i G proizvoljne dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije jedne realne promenljive, a a, b, c, d, e proizvoljne realne konstante. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y)$ je opšte rešenje jednačine $u''_{xy} - 2x + y = 0$.

B) $u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y)$ je partikularno rešenje jednačine $u''_{xy} - 2x + y = 0$.

C) $u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + e^x + y^3 - 7$ nije rešenje jednačine $u''_{xy} - 2x + y = 0$.

D) $u = a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2 + cx + dy + e$ je opšte rešenje jednačine $u''_{xx} u''_{yy} - \left(u''_{xy}\right)^2 = 0$.

E) $u = a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2 + cx + dy + e$ je potpuno rešenje jednačine $u''_{xx} u''_{yy} - \left(u''_{xy}\right)^2 = 0$.

9. Data je jednačina $u''_{xx} + u''_{yy} = f(x, y)$ sa nepoznatom funkcijom $u = u(x, y)$ i neprekidnom funkcijom f. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data jednačina je eliptična.

B) Data jednačina je homogena i linearna za $f(x, y) \equiv 0$.

C) Data jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

D) Za $f(x, y) = x^2 y^3$ data jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina.

E) Trivijalno rešenje je rešenje date jednačine.

10. Dat je problem sa jednačinom $y'' + k^2 y = 0$, $y = y(x)$, $x \in [0, \pi]$, $k \in \mathbb{R}$, i uslovima $y(0) = y(\pi) = 0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Trivijalno rešenje nije rešenje datog problema.

B) Dati problem ima homogene konturne uslove.

C) $y = C \cdot \sin 21x$ sa $C \in \mathbb{R}$ je rešenje datog problema za $k = 21$.

D) $y = C \cdot \sin 2x$ sa $C \in \mathbb{R}$ je sopstvena vrednost datog problema za $k = 2$.

E) $y = C \cdot \cos 12x$ sa $C \in \mathbb{R}$ je karakteristična funkcija datog problema za $k = 12$.

Test 6.5

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ne postoji konturni problem za parcijalne diferencijalne jednačine.

B) Rešenje mešovitog problema je funkcija koja je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine problema koje zadovoljava konturne i početne uslove posmatranog problema.

C) Rešenje mešovitog problema je funkcija koja je rešenje obične diferencijalne jednačine problema koje zadovoljava konturne i početne uslove posmatranog problema.

D) Uslovi u konturnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku intervala na kojem se rešava problem.

E) Uslovi u početnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Parcijalna diferencijalna jednačina sa početnim uslovima čini rubni problem.

B) Svaka funkcija koja je rešenje obične diferencijalne jednačine je opšte rešenje posmatrane jednačine.

C) Ako su u_1 i u_2 rešenja homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, tada je i $u = u_1 - u_2$ rešenje posmatrane jednačine.

D) Ako su u_1 i u_2 rešenja jednačine $u''_{xx} + u = x$, $u = u(x,y)$, tada je i $u = u_1 + u_2$ rešenje posmatrane jednačine.

E) Obična diferencijalna jednačina sa graničnim uslovima čini rubni problem.

3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Parcijalna diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina.

B) Obična diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina u kojoj figurišu nepoznata funkcija dve promenljive i njeni izvodi.

C) Svaka funkcionalna jednačina je diferencijalna jednačina.

D) Red diferencijalne jednačine je stepen najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji figuriše u jednačini.

E) Za diferencijalnu jednačinu $y'' = y$, $y = y(x)$, funkcija $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, je rešenje u implicitnom obliku.

4. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Opšte rešenje diferencijalne jednačine drugog reda sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,y)$ sadrži dve proizvoljne realne konstante.

B) Opšte rešenje diferencijalne jednačine drugog reda sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,y)$ sadrži dve proizvoljne dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije.

C) Opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda sa nepoznatom funkcijom $y = y(x)$ sadrži jednu proizvoljnu neprekidno diferencijabilnu funkciju.

D) Opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda sa nepoznatom funkcijom $y = y(x)$ sadrži jednu proizvoljnu realnu konstantu.

E) Singularno rešenje obične diferencijalne jednačine se može dobiti iz opšteg rešenja jednačine.

5. Zaokružiti slova ispred uslova koji mogu biti uslovi konturnog problema sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom sa nepoznatom funkcijom $u(x,t)$ definisanom na skupu $D = \{(x,t) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ t \geq 0\}$.

A) $u(0,t) = u'_x(0,t)$ za $t \geq 0$ i $u(1,t) = 0$ za $t \geq 0$

B) $u(x,0) = 0$ za $0 \leq x \leq 1$ i $u'_x(x,0) = 0$ za $0 \leq x \leq 1$

C) $u(0,t) = u'_x(1,t) = 0$ za $t \geq 0$

D) $u(0,t) = u'_x(0,t) = 0$ za $t \geq 0$

E) $u(x,0) = u'_x(x,0) = 0$ za $0 \leq x \leq 1$

6. Zaokružiti slova ispred homogenih linearnih diferencijalnih jednačina.

A) $y''_{xx}\cos t + y'_t = 0,\, y = y(x,t)$ **B)** $y'' + y'\cos y = 0,\, y = y(x)$ **C)** $y'_x y'_t + y + t = 0,\, y = y(x,t)$
D) $xy' + y + x = 0,\, y = y(x)$ **E)** $ty''_{xx} + xy''_{tt} = 0,\, y = y(x,t)$

7. Data je diferencijalna jednačina $u''_{xx} = c^{-2}u''_{tt}$ sa pozitivnom konstantom c i nepoznatom funkcijom $u = u(x,t)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data diferencijalna jednačina je jednačina provođenja toplote.

B) Data diferencijalna jednačina je talasna jednačina.

C) Data jednačina je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

D) Data jednačina je nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

E) Za datu diferencijalnu jednačinu ne važi princip superpozicije.

8. Dat je problem sa diferencijalnom jednačinom $y'' + k^2 y = 0$, $y = y(x)$, $x \in [0,\pi]$, $k \in \mathbb{R}$, i uslovima $y(0) = 0$ i $y(\pi) = 0$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati problem je početni problem.

B) Dati problem ima nehomogene konturne uslove.

C) Za svako $C \in \mathbb{R}$, $y = C \cdot \cos 7x$ je rešenje datog problema za $k = 7$.

D) Za svako $C \in \mathbb{R}$, $y = C \cdot \sin 2x$ je rešenje datog problema za $k = 2$.

E) Trivijalno rešenje je rešenje datog problema.

9. Data je jednačina $u''_{xx} + u''_{yy} = f(x,y)$ sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,y)$ i neprekidnom funkcijom f. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data diferencijalna jednačina je eliptična linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

B) $u = \sin(\pi x)\,(C_1 e^{\pi y} + C_2 e^{-\pi y})$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je rešenje date jednačine sa $f(x,y) \equiv 0$.

C) $u = \sin x \cos y$ je rešenje date jednačine sa $f(x,y) = 2\sin x \cos y$.

D) $u = \sin x \cos y$ je rešenje date jednačine sa $f(x,y) \equiv 0$.

E) Za $f(x,y) = xy$ data jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih ...

A) rešavaju se obične diferencijalne jednačine prvog reda.

B) rešavaju se obične diferencijalne jednačine drugog reda.

C) rešenje parcijalne diferencijalne jednačine se traži u obliku proizvoda funkcija jedne promenljive.

D) rešenje parcijalne diferencijalne jednačine se traži u obliku zbira funkcija jedne promenljive.

E) rešenje parcijalne diferencijalne jednačine se traži u obliku eksponencijalne funkcije.

Test 6.6

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Uslovi u početnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na početnu i krajnju tačku intervala na kojem se rešava problem.

B) Uslovi u početnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku.

C) Rešenje konturnog problema je funkcija koja je rešenje diferencijalne jednačine problema i zadovoljava rubne uslove posmatranog problema.

D) Rešenje konturnog problema je funkcija koja je rešenje diferencijalne jednačine problema i zadovoljava početne uslove posmatranog problema.

E) Rešenje mešovitog problema je opšte rešenje obične diferencijalne jednačine problema.

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Diferencijalna jednačina sa nepoznatom funkcijom sa dve promenljive je parcijalna diferencijalna jednačina.

B) Nepoznata u običnoj diferencijalnoj jednačini je funkcija dve promenljive.

C) Nepoznata u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini je realan broj.

D) Parcijalna diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina.

E) Funkcionalna jednačina je obična diferencijalna jednačina.

3. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine sadrži proizvoljne konstante.

B) Opšte rešenje obične diferencijalne jednačine sadrži proizvoljne konstante.

C) Singularno rešenje obične diferencijalne jednačine se može dobiti iz partikularnog rešenja posmatrane jednačine.

D) Partikularno rešenje obične diferencijalne jednačine se ne može dobiti iz opšteg rešenja posmatrane jednačine.

E) Singularno rešenje obične diferencijalne jednačine se ne može dobiti iz opšteg rešenja posmatrane jednačine.

4. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Red obične diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda u jednačini.

B) Red parcijalne diferencijalne jednačine je najviši stepen nepoznate u jednačini.

C) Rešenje parcijalne diferencijalne jednačine je funkcija koja identički zadovoljava posmatranu jednačinu.

D) Svaka funkcija koja je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine je opšte rešenje posmatrane jednačine.

E) Svaka funkcija koja je rešenje obične diferencijalne jednačine je singularno rešenje posmatrane jednačine.

5. Zaokružiti slova ispred homogenih linearnih diferencijalnih jednačina.

A) $y'_x e^t + y'_t = y,\ y = y(x,t)$ **B)** $y'' + y'y = 0,\ y = y(x)$ **C)** $ty''_{xx} + xy''_{tt} + tx = 0,\ y = y(x,t)$

D) $xy' + ye^x - x = 0,\ y = y(x)$ **E)** $y''_{xx} + ty'_x + e^x y'_t = 0,\ y = y(x,t)$

6. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih ...

A) rešavaju se nelinearne obične diferencijalne jednačine.

B) rešavaju se nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine.

C) nepoznata funkcija $y(x)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $y = e^x$.

D) nepoznata funkcija $y(x,t)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $y = X(x) \cdot T(t)$.

E) nepoznata funkcija $y(x,t)$ diferencijalne jednačine traži se u obliku $y = e^x \cdot e^t$.

7. Data je jednačina $u'_x u'_y - u = 0$, gde je $u = u(x,y)$, a a i b su proizvoljne konstante. Neka su F i G proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije jedne realne promenljive. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) $u = xy + ax + by + ab$ je opšte rešenje date jednačine.

B) $u = xy + ax + by + ab$ je potpuno rešenje date jednačine.

C) $u = xy + F(x) + G(y)$ je opšte rešenje date jednačine.

D) $u = xy + ax + by$ je potpuno rešenje date jednačine.

E) $u = xy - 2x + 3y - 6$ je rešenje date jednačine.

8. Zaokružiti slova ispred uslova koji mogu biti uslovi početnog problema sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom sa nepoznatom funkcijom $u(x,t)$ definisanom na skupu $D = \{(x,t)\ :\ 1 \le x \le 2,\ t \ge 0\}$.

A) $u(1,t) = 0$ i $u(2,t) = 1$ za $t \ge 0$ **B)** $u(x,0) = 0$ i $u'_x(x,0) = 0$ za $1 \le x \le 2$

C) $u'_x(1,t) = 0$ i $u(2,t) = 1$ za $t \ge 0$ **D)** $u(1,t) = 0$ i $u'_x(1,t) = 0$ za $t \ge 0$

E) $u(x,0) = 0$ za $1 \le x \le 2$ i $u(1,t) = u(2,t) = 0$ za $t \ge 0$

9. Data je diferencijalna jednačina $u''_{xx} - u''_{tt} = f(x,t)$ sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,t)$ i neprekidnom funkcijom f. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

B) Data diferencijalna jednačina je eliptična.

C) Data jednačina je homogena i linearna za $f(x,t) \equiv 0$.

D) Za $f(x,t) = x^3t^2$ data jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina.

E) Trivijalno rešenje je rešenje date diferencijalne jednačine.

10. Neka je k realan parametar. Dat je problem sa jednačinom $y'' + k^2y = 0$, $y = y(x)$, $x \in [0,\pi]$, i uslovima $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Trivijalno rešenje je rešenje datog problema.

B) Za $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, rešenje datog problema je $y = C_1 \sin 2nx + C_2 \cos 2nx$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

C) $y = \sin x + \cos x$ je rešenje datog problema za $k = 1$.

D) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je karakteristična vrednost datog problema za $k = 2$.

E) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je sopstvena funkcija datog problema za $k = 1$.

Test 6.7

1. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija jedne promenljive, tada je jednačina obična diferencijalna jednačina.

B) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija jedne promenljive, tada je jednačina parcijalna diferencijalna jednačina.

C) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija dve promenljive, tada je jednačina parcijalna diferencijalna jednačina.

D) Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija dve promenljive, tada je jednačina neobična diferencijalna jednačina.

E) Red diferencijalne jednačine je broj nezavisnih promenljivih u nepoznatoj funkciji.

2. Neka je $y = y(x)$ nepoznata funkcija. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $xy'' + y' - 2y = 0$ je nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

B) Jednačina $xy'' + y' - 2y = 0$ je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

C) Jednačina $xy'' + y' - 2y = 0$ je homogena linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda.

D) Jednačina $xy'' + y' - 2y = 0$ je nehomogena linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda.

E) Jednačina $xy'' + y' - 2y = x^2 + 1$ je nehomogena linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda.

3. Neka je $u = u(x,t)$ nepoznata funkcija i a ($a \neq 0$) realan broj. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $u''_{xx} = \dfrac{1}{a^2}u'_t$ je linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda.

B) Jednačina $u''_{xx} = \dfrac{1}{a^2}u'_t$ je linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

C) Jednačina $u''_{xx} = \dfrac{1}{a^2}u'_t$ je linearna obična diferencijalna jednačina prvog reda.

D) Jednačina $u''_{xx} = \dfrac{1}{a^2}u'_t$ je linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

E) Jednačina $u'_x = \dfrac{1}{a^2}u'_t$ je linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

4.▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Početni problem postoji i za obične i za parcijalne diferencijalne jednačine.

B) Početni problem je isto što i konturni problem.

C) Granični problem postoji i za obične i za parcijalne diferencijalne jednačine.

D) Granični problem je isto što i mešoviti problem.

E) Mešoviti problem postoji i za obične i za parcijalne diferencijalne jednačine.

5.▷ Data je diferencijalna jednačina $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ sa $u=u(x,y)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data jednačina je talasna jednačina.

B) Data jednačina je Laplasova jednačina.

C) Data jednačina je jednačina provođenja toplote.

D) Funkcija $u=\sin(n\pi x)\left(ae^{n\pi y}+be^{-n\pi y}\right)$ sa $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ je rešenje date jednačine.

E) Funkcija $u=\cos x\left(ae^{\pi y}+be^{-\pi y}\right)$ sa $a,b\in\mathbb{R}$ je rešenje date jednačine.

6.▷ Neka je a ($a\neq 0$) realan broj, a $u=u(x,t)$ nepoznata funkcija. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Jednačina $u''_{xx}=a^{-2}u''_{tt}$ je hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina.

B) Jednačina $u''_{xx}=a^{-2}u''_{tt}$ je parabolična parcijalna diferencijalna jednačina.

C) Jednačina $u''_{xx}=a^{-2}u''_{tt}$ je eliptična parcijalna diferencijalna jednačina.

D) Jednačina $u''_{xx}=a^{-2}u'_{t}$ je hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina.

E) Jednačina $u''_{xx}=a^{-2}u'_{t}$ je parabolična parcijalna diferencijalna jednačina.

7.▷ Neka su a, b, c, d, e, f i g realne funkcije dve promenljive neprekidne na skupu $D\subset\mathbb{R}^2$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Jednačina

$$a(x,y)u''_{xx}+b(x,y)u''_{xy}+c(x,y)u''_{yy}+d(x,y)u'_{x}+e(x,y)u'_{y}+f(x,y)u=g(x,y),$$

$u=u(x,y)$, je ...

A) linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

B) hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina na D ako je $(b(x,y))^2-4a(x,y)c(x,y)>0$, $(x,y)\in D$.

C) parabolična parcijalna diferencijalna jednačina na D ako je $(b(x,y))^2-4a(x,y)c(x,y)<0$, $(x,y)\in D$.

D) eliptična parcijalna diferencijalna jednačina na D ako je $(b(x,y))^2-4a(x,y)c(x,y)=0$, $(x,y)\in D$.

E) obična diferencijalna jednačina drugog reda.

8.▷ Data je diferencijalna jednačina

$$a(x,y)u''_{xx}+b(x,y)u''_{xy}+c(x,y)u''_{yy}+d(x,y)u'_{x}+e(x,y)u'_{y}+f(x,y)u=0, \tag{2.6.4}$$

$u=u(x,y)$, gde su funkcije a, b, c, d, e i f neprekidne na $D\subset\mathbb{R}^2$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Diferencijalna jednačina (2.6.4) je homogena obična diferencijalna jednačina.

B) Ako su u_1 i u_2 dva rešenja jednačine (2.6.4), tada je $u(x,y)=c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)$ takođe rešenje za (2.6.4) za proizvoljno $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

C) Ako su u_1 i u_2 dva rešenja jednačine (2.6.4), tada $u(x,y)=c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)$ nije rešenje jednačine (2.6.4) za proizvoljno $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

D) Ako je u_1, u_2, $\ldots$, u_n, $\ldots$ niz rešenja jednačine (2.6.4), tada $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x,y)$, za proizvoljan niz konstanti $c_1,c_2,\ldots$ za koji gornji red konvergira, nije rešenje jednačine (2.6.4).

E) Za homogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda (2.6.4) važi princip superpozicije.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Furijeova metoda razdvajanja promenljivih se odnosi na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine.

B) Po Furijeovoj metodi razdvajanja promenljivih nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine se traži u obliku zbira $u = X + Y$, gde je $X = X(x)$ i $Y = Y(y)$.

C) Po Furijeovoj metodi razdvajanja promenljivih nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine se traži u eksponencijalnom obliku.

D) Po Furijeovoj metodi razdvajanja promenljivih nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine se traži u obliku proizvoda $u = XY$, gde je $X = X(x)$ i $Y = Y(y)$.

E) Po Furijeovoj metodi razdvajanja promenljivih nepoznata funkcija $u(x,y)$ parcijalne diferencijalne jednačine se traži u obliku količnika $u = \dfrac{X}{Y}$, gde je $X = X(x)$ i $Y = Y(y)$.

10. Neka je $k \in \mathbb{R}$. Data je diferencijalna jednačina $y'' + k^2 y = 0$, $y = y(x)$, $x \in [0, \pi]$, sa dodatnim uslovima $y(0) = 0$ i $y(\pi) = 0$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Data jednačina sa dodatnim uslovima čini ...

A) početni problem. **B)** mešoviti problem. **C)** konturni problem.
D) granični problem. **E)** problem bez rešenja.

Test 6.8

1. Zaokružiti slova ispred parcijalnih diferencijalnih jednačina.

A) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^2,\ y = y(x)$ **B)** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin x\,\dfrac{dy}{dx} = 0,\ y = y(x)$ **C)** $\dfrac{\partial y}{\partial x} + xy = x^2,\ y = y(x,t)$

D) $y'' + y' + y = \sin x,\ y = y(x)$ **E)** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sin x\,\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0,\ y = y(x,t)$

2. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini funkcija ...

A) jedne promenljive, tada je jednačina parcijalna diferencijalna jednačina.

B) jedne promenljive, tada je jednačina obična diferencijalna jednačina.

C) jedne promenljive, tada je jednačina parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

D) dve promenljive, tada je jednačina parcijalna diferencijalna jednačina.

E) dve promenljive, tada je jednačina obična diferencijalna jednačina drugog reda.

3. Zaokružiti slova ispred parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

A) $\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{y}{x} = f(x),\ y = y(x,t)$ **B)** $a^2 y'_x + y'_t = 0,\ y = y(x,t)$ **C)** $a^2 y''_{xx} + y'_x = 0,\ y = y(x,t)$

D) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = f(x),\ y = y(x)$ **E)** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (x^2 + y^2)\dfrac{\partial y}{\partial t} = g(x,t),\ y = y(x,t)$

4. Zaokružiti slova ispred linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

A) $x^2 (y')^2 + xy' = 0,\ y = y(x)$ **B)** $x^2 y'' + xy^2 = 0,\ y = y(x)$

C) $x^2 (y'_x)^2 + x(y'_t)^2 = 0,\ y = y(x,t)$ **D)** $x^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial y}{\partial t} = f(x,y),\ y = y(x,t)$

E) $x^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\ y = y(x,t)$

5. Data je diferencijalna jednačina $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ sa $u = u(x,t)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Funkcija $u = \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$ sa $n \in \mathbb{N}$ je opšte rešenje date jednačine.

B) Funkcija $u = \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$ sa $n \in \mathbb{N}$ je rešenje date jednačine.

C) Funkcija $u = e^{-\frac{t}{4}} \sin\frac{x}{2}$ je partikularno rešenje date jednačine.

D) Funkcija $u = e^{-\frac{t}{4}} \sin\frac{x}{2}$ nije rešenje date jednačine.

E) Trivijalno rešenje nije rešenje date jednačine.

6. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda je funkcija dve promenljive koja sadrži jednu proizvoljnu funkciju i zadovoljava datu jednačinu.

B) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine je funkcija jedne promenljive koja sadrži jednu proizvoljnu konstantu i zadovoljava datu jednačinu.

C) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda je funkcija dve promenljive koja sadrži jednu proizvoljnu funkciju i zadovoljava datu jednačinu.

D) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda je funkcija dve promenljive koja sadrži dve proizvoljne konstante i zadovoljava datu jednačinu.

E) Partikularno rešenje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda ne sadrži proizvoljnu funkciju.

7. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) U početnom problemu sa parcijalnom diferencijalnom uslovi mogu biti zadati na traženu funkciju i njene parcijalne izvode.

B) U početnom problemu sa parcijalnom diferencijalnom uslovi mogu biti zadati samo na traženu funkciju.

C) U graničnom problemu sa parcijalnom diferencijalnom uslovi mogu biti zadati samo na traženu funkciju.

D) U rubnom problemu sa parcijalnom diferencijalnom uslovi mogu biti zadati na traženu funkciju i njene parcijalne izvode.

E) U mešovitom problemu sa parcijalnom diferencijalnom uslovi ne mogu biti zadati na parcijalne izvode tražene funkcije.

8. Dat je problem $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$, $k \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Sopstvene vrednosti datog problema su njegova trivijalna rešenja.

B) Sopstvene vrednosti datog problema su njegova netrivijalna rešenja.

C) Sopstvene funkcije datog problema su njegova netrivijalna rešenja.

D) Karakteristične funkcije datog problema su njegova netrivijalna rešenja.

E) Ne postoje karakteristične funkcije konturnog problema.

9. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Konturni problem $y'' + 4y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$, ima netrivijalna rešenja.

B) Konturni problem $y'' + 4y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$, ima samo trivijalno rešenje.

C) Konturni problem $y'' - 4y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$, ima samo trivijalno rešenje.

D) Konturni problem $y'' - 4y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$, ima netrivijalna rešenja.

E) $y = \pi\cos 2x$ je rešenje konturnog problema $y'' - 4y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$.

10. Posmatrajmo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,y)$. Zaokružiti slova ispred oblika u kojima se po Furijeovoj metodi razdvajanja promenljivih traži rešenje posmatrane jednačine.

A) $u(x,y) = X \cdot Y$, gde su X i Y konstante
B) $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$
C) $u(x,y) = e^{X(x)Y(y)}$
D) $u(x,y) = e^{X(x)} + e^{Y(y)}$
E) $u(x,y) = e^X e^Y$, gde su X i Y konstante

Test 6.9

1. Zaokružiti slova ispred linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

A) $\sin t \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \sin x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = x^2,\ y = y(x,t)$
B) $\sin \frac{\partial y}{\partial x} + \sin \frac{\partial y}{\partial x} = x^2,\ y = y(x,t)$
C) $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + xy = x^2,\ y = y(x,t)$
D) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sin x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,\ y = y(x,t)$
E) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t} = 0,\ y = y(x,t)$

2. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Algebarska jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju kao parametar je diferencijalna jednačina.

B) Funkcionalna jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju, nezavisnu promenljivu nepoznate funkcije i izvode nepoznate funkcije je diferencijalna jednačina.

C) Funkcionalna jednačina koja sadrži nepoznate parametre je diferencijalna jednačina.

D) Funkcionalna jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju jedne promenljive, nezavisnu promenljivu nepoznate funkcije i prvi izvod nepoznate funkcije je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

E) Funkcionalna jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju dve promenljive, nezavisne promenljive nepoznate funkcije i prve i druge parcijalne izvode nepoznate funkcije je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

3. Zaokružiti slova ispred diferencijalnih jednačina prvog reda.

A) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{x} = f(x),\ y = y(x,t)$
B) $a^2 y' - y'' = 0,\ y = y(x),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
C) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = f(x),\ y = y(x)$
D) $a^2 y''_{xx} + y'_x = 0,\ y = y(x,t),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
E) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (x^2 + y^2)\frac{\partial y}{\partial t} = f(x,t),\ y = y(x,t)$

4. Zaokružiti slova ispred homogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

A) $x^2 (y')^2 + xy' = x^2,\ y = y(x)$
B) $x^2 y'' + xy^2 = 0,\ y = y(x)$
C) $x^2 (y'_x)^2 + x(y'_t)^2 = 0,\ y = y(x,t)$
D) $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\ y = y(x,t)$
E) $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial t} = f(x,y),\ y = y(x,t)$

5. Neka je $D = \{(x,t) \mid 0 < x < \pi, t > 0\}$. Dat je problem

$$u''_{xx} = u'_t,\ (x,t) \in D,\ \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi. \tag{2.6.5}$$

Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Ako je problem (2.6.5) dobro postavljen tada ...

A) postoji rešenje problema (2.6.5).
B) postoje bar dva rešenja problema (2.6.5).
C) ne postoji rešenje problema (2.6.5).
D) postoji jedinstveno rešenje problema (2.6.5).
E) postoji beskonačno mnogo rešenja problema (2.6.5).

6. Neka je $y = y(x)$. Zaokružiti slova ispred konturnih problema koji imaju samo trivijalna rešenja.

A) $y'' + 16y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$

B) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$

C) $y'' - 2y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$

D) $y'' = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$

E) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$

7. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Svaka linearna parcijalna diferencijalna jednačina ima rešenje koje je trivijalno.

B) Za svaku običnu diferencijalnu jednačinu važi da je linearna kombinacija bilo koja dva rešenja posmatrane jednačine takođe rešenje jednačine.

C) Za homogenu linearnu običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda važi da je linearna kombinacija dva linearno nezavisna rešenja posmatrane jednačine takođe rešenje jednačine.

D) Za svaku parcijalnu diferencijalnu jednačinu važi da je linearna kombinacija bilo koja dva rešenja posmatrane jednačine takođe rešenje jednačine.

E) Za homogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda važi princip superpozicije.

8. Neka je $D_1 = \{(x,t) \mid 0 < x < \pi,\ t > 0\}$ i $D_2 = \{(x,t) \mid 0 < x < \ell,\ t > 0\}$. Zaokružiti slova ispred rubnih problema.

A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ za $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$ za $0 \le x \le \pi$, gde je $(x,t) \in D_1$

B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ za $t > 0$, gde je $(x,t) \in D_1$

C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u(x,0) = f(x)$ za $0 \le x \le \pi$, gde je $(x,t) \in D_1$

D) $c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u(0,t) = 0$, $u(\ell,t) = 0$ za $t > 0$, $c > 0$, $(x,t) \in D_2$

E) $c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u(x,0) = f(x)$, $u'_t(x,0) = 0$ za $0 \le x \le \ell$, gde je $c > 0$, $(x,t) \in D_2$

9. Dat je konturni problem $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, gde je $y = y(x)$ i $k \in \mathbb{R}$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Rešenje diferencijalne jednačine $y'' + k^2 y = 0$ traži se u obliku proizvoda dve funkcije.

B) Rešenje diferencijalne jednačine $y'' + k^2 y = 0$ traži se u obliku eksponencijalne funkcije.

C) Sopstvene funkcije su netrivijalna rešenja datog konturnog problema.

D) Sopstvene vrednosti su netrivijalna rešenja datog konturnog problema.

E) Funkcija $y(x) \equiv 0$ za $0 \le x \le \pi$ je netrivijalno rešenje datog konturnog problema.

10. Posmatrajmo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa nepoznatom funkcijom $y = y(x,t)$. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Kod Furijeove metode razdvajanja promenljivih rešenje parcijalne diferencijalne jednačine traži se u obliku ...

A) $y = X + T$, gde je X funkcija od promenljive x, a T funkcija od promenljive t.

B) $y = X \cdot T$, gde je X funkcija od promenljive x, a T funkcija od promenljive t.

C) $y = e^{XT}$, gde su X i T konstante.

D) $y = e^{XT}$, gde je X funkcija od promenljive x, a T funkcija od promenljive t.

E) $y = e^{kx}e^{kt}$, gde je k konstanta.

Test 6.10

1. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Svaka diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina.

B) Obična diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina u kojoj figurišu nepoznata funkcija jedne promenljive i njeni izvodi.

C) Parcijalna diferencijalna jednačina je funkcionalna jednačina u kojoj figurišu nepoznata funkcija jedne promenljive i njeni parcijalni izvodi.

D) Red diferencijalne jednačine je stepen najnižeg izvoda nepoznate funkcije koji figuriše u jednačini.

E) Nijedna obična diferencijalna jednačina nema singularno rešenje.

2. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sadrži jednu proizvoljnu konstantu.

B) Opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sadrži jednu proizvoljnu funkciju.

C) Potpuno rešenje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sadrži jednu proizvoljnu funkciju.

D) Potpuno rešenje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sadrži jednu proizvoljnu konstantu.

E) Partikularno rešenje obične diferencijalne jednačine se dobija iz opšteg rešenja jednačine.

3. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Parcijalna diferencijalna jednačina sa konturnim uslovima čini rubni problem.

B) Svaka funkcija koja je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine je opšte rešenje posmatrane jednačine.

C) Ako su u_1, u_2 i u_3 rešenja homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, tada je i funkcija $u = u_1 + u_2 + u_3$ rešenje posmatrane jednačine.

D) Ako su u_1 i u_2 rešenja homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, tada $u = u_1 + u_2$ nije rešenje posmatrane jednačine.

E) Obična diferencijalna jednačina sa početnim uslovima čini rubni problem.

4. ▷ Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Mešoviti problem je početni problem.

B) Rešenje početnog problema je funkcija koja je rešenje diferencijalne jednačine problema koje zadovoljava konturne i početne uslove posmatranog problema.

C) Rešenje konturnog problema je funkcija koja je rešenje diferencijalne jednačine problema koje zadovoljava konturne i početne uslove posmatranog problema.

D) Uslovi u graničnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na početnu i krajnju tačku intervala na kojem se rešava problem.

E) Uslovi u konturnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku.

5. ▷ Zaokružiti slova ispred uslova koji mogu biti uslovi početnog problema sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom sa nepoznatom funkcijom $u(x,y)$ definisanom na skupu $D = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1, \ y \ge 0\}$.

A) $u(x,0) = u'_y(x,0) = 0, 0 \le x \le 1$

B) $u(0,y) = u'_x(0,y), y \ge 0$ i $u(1,y) = 0, y \ge 0$

C) $u(x,0) = u'_x(x,0) = 0, 0 \le x \le 1$ i $u(0,y) = u(1,y) = 0, y \ge 0$

D) $u(0,y) = u'_x(1,y) = 0, y \ge 0$

E) $u(x,0) = u'_x(x,0) = 0, 0 \le x \le 1$

6. Zaokružiti slova ispred nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina.

A) $y''_{xx}\cos t + y'_t = 0,\ y = y(x,t)$ **B)** $y'' + y'\sin y = \sin x,\ y = y(x)$

C) $y'_x + y'_t - y + t = 0,\ y = y(x,t)$ **D)** $xy' + y = x,\ y = y(x)$

E) $ty''_{xx} - xy''_{tt} = 0,\ y = y(x,t)$

7. Data je diferencijalna jednačina $a^2u''_{xx} = u'_t$ sa pozitivnom konstantom a i nepoznatom funkcijom $u = u(x,t)$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Data diferencijalna jednačina je talasna jednačina.

B) Data diferencijalna jednačina je jednačina provođenja toplote.

C) Data jednačina je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

D) Data jednačina je nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

E) Za datu diferencijalnu jednačinu ne važi princip superpozicije.

8. Data je jednačina $u''_{xx} - u''_{tt} = f(x,t)$ sa nepoznatom funkcijom $u = u(x,t)$ i neprekidnom funkcijom f. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Za $f(x,t) = x\cos t$ data jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina.

B) Data jednačina je eliptična linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

C) $u = \sin 2x\,(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je rešenje date jednačine sa $f(x,y) \equiv 0$.

D) $u = \sin x\,(C_1\cos t + C_2\sin t)$ sa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je opšte rešenje date jednačine sa $f(x,y) \equiv 0$.

E) $u = \sin 3x\,(\cos 3t - \sin 3t)$ je rešenje date jednačine sa $f(x,y) \equiv 0$.

9. Dat je problem sa diferencijalnom jednačinom $y'' + k^2y = 0$, $y = y(x)$, $x \in [0,\pi]$, $k \in \mathbb{R}$, i uslovima $y(0) = 0$ i $y(\pi) = \pi$. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja.

A) Dati problem ima nehomogene konturne uslove.

B) Dati problem je početni problem.

C) $y = \pi\cdot\cos\dfrac{5x}{2}$ za $C \in \mathbb{R}$ je rešenje datog problema za $k = \dfrac{5}{2}$.

D) $y = \pi\cdot\sin\dfrac{x}{2}$ za $C \in \mathbb{R}$ je rešenje datog problema za $k = \dfrac{1}{2}$.

E) Trivijalno rešenje je rešenje datog problema.

10. Zaokružiti slova ispred završetaka rečenice kojima se dobijaju tačna tvrđenja.
Metodom razdvajanja promenljivih ...

A) rešavaju se obične diferencijalne jednačine reda.

B) nepoznata funkcija $y(x,t)$ jednačine $y''_{xx} = y'_t$ traži se u obliku $y = X(x) + T(t)$.

C) nepoznata funkcija $y(x,t)$ jednačine $y''_{xx} = y'_t$ traži se u obliku $y = e^x\cdot e^t$.

D) nepoznata funkcija $y(x,t)$ jednačine $y''_{xx} - y''_{tt} = 0$ traži se u obliku $y = x\cdot t$.

E) nepoznata funkcija $y(x,t)$ jednačine $y''_{xx} - y''_{tt} = 0$ traži se u obliku $y = X(x)\cdot T(t)$.

Glava 3

Rešenja testova

3.1 Dvostruki integrali

Test 1.1

1. B, D

   Površi pod A i C su ravni, pod B je parabolički cilindar, pod D je eliptički cilindar, a pod E su ravni $z = x$ i $z = -x$.

2. A, B

   Na osnovu definicija 1.3-1.5, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenja pod C i D su netačna. Tvrđenje pod E nije tačno jer je ΔD_i površina podoblasti D_i, a $f(\xi_i, \eta_i)$ visina cilindričnog tela sa osnovom D_i, te je $f(\xi_i, \eta_i)\Delta D_i$ zapremina tog cilindričnog tela. Pošto su podoblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$ dobijene podelom oblasti D, tvrđenje pod B je tačno.

3. A, C

   Data tvrđenja su primeri primene osobina dvostrukog integrala, teorema 1.6. Pod A je primenjena osobina (1.1.2) sa $f(x,y) = x + y$. Pošto je $x^2 + y^2 + 1 > 0$, pod C je primenjena osobina (1.1.4) sa $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$. U tvrđenju pod D nije definisan $D_1 \cap D_2$, tako da nije zadovoljen uslov za primenu osobine (1.1.3), pa tvrđenje pod D nije tačno. Tvrđenja pod B i E su netačna jer je podintegralna funkcija $f(x,y) = x \cdot y$.

4. C, D

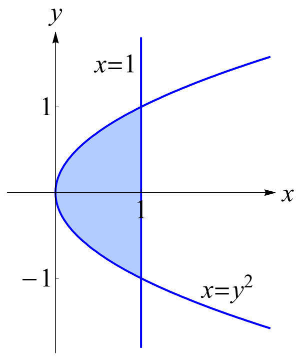
   Pošto je oblast integracije integrala I kvadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ i podintegralna funkcija je 1, tvrđenje pod C je tačno, pa je tvrđenje pod A netačno. Površina jediničnog kruga je manja od površine jediničnog kvadrata, pa je tvrđenje pod B netačno.

   Zapremina jedinične kocke s osnovom $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 0\}$ i odozgo ogranične s ravni $z = 1$ je upravo integral I, te je tvrđenje pod D tačno. Pošto je zapremina jedinične lopte manja od zapremine jedinične kocke, tvrđenje pod E je netačno.

5. C, E

   Tvrđenje pod B ne može biti tačno jer se u spoljašnjim granicama ne može nalaziti promenljiva.

   Presek krivih $x = y^2$ i $x = 1$ se dobija rešavanjem jednačine $y^2 = 1$. Kako su njena rešenja $y_1 = 1$ i $y_2 = -1$, presečne tačke su $(1,1)$ i $(1,-1)$. Oblast integracije je prikazana na slici 3.1.1.
   Pošto se oblast integracije nalazi u traci određenoj pravama $y = -1$ i $y = 1$ i za svako $y \in [-1,1]$ važi da je $y^2 \le x \le 1$, data oblast definiše unutrašnji integral po promenljivoj x sa granicama od y^2 do 1 i spoljašnji integral po promenljivoj y sa granicama od -1 do 1. To znači da je tvrđenje pod C tačno, a pod A netačno.
   Oblast integracije se nalazi i u traci određenoj pravama $x = 0$ i $x = 1$ i za svako $x \in [0,1]$ važi da je $-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}$, te data oblast definiše unutrašnji integral po promenljivoj y sa granicama od $-\sqrt{x}$ do $\sqrt{x}$ i spoljašnji integral po promenljivoj x sa granicama od 0 do 1, tako da je tvrđenje pod E tačno, a pod D netačno.

   Slika 3.1.1

6. A, D

   Pošto je oblast integracije integrala I_1 pravougaonik, a podintegralna funkcija je proizvod funkcija jedne realne promenljive: $f_1(x) = x$ i $f_2(y) = e^y$, može se priomeniti teorema 1.10, tako da je

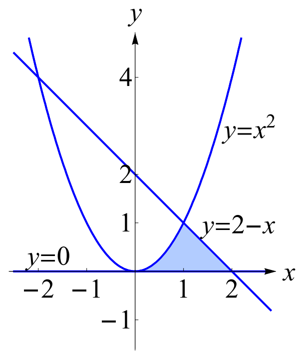
$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_2^4 x\, e^y\, dx \right) dy = \left(\int_2^4 x\, dx \right) \left(\int_0^1 e^y\, dy \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_2^4 \cdot \left[e^y \right] \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot (16-4) \cdot \left(e - e^0\right) = 6\,(e-1)\,.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} (\cos x + 1)\ dy \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1) \left(\int_0^{\pi} dy \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1) \left[y \right] \Bigg|_0^{\pi} dx = \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)\, dx = \pi \Big[\sin x + x \Big] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \pi \left(1 + \frac{\pi}{2} - \left(-1 - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi\,(2+\pi) = 2\pi + \pi^2 \end{aligned}$$

7. A, E

Presek krivih $y = x^2$ i $y = 2 - x$ se može dobiti rešavanjem jednačine $x^2 = 2 - x$, odnosno $x^2 + x - 2 = 0$. Pošto su njena rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$, presečne tačke su $(1,1)$ i $(-2,4)$. Prava $y = 2 - x$ seče pravu $y = 0$ u tački $(2,0)$, dok se parabola $y = x^2$ i prava $y = 0$ seku u tački $(0,0)$. Tako je oblast integracije obeležena oblast na slici 3.1.2.

Oblast integracije se nalazi u traci određenoj pravama $y = 0$ i $y = 1$ i za svako $y \in [0,1]$ važi da je $\sqrt{y} \le x \le 2 - y$, tako da data oblast definiše unutrašnji integral po promenljivoj x sa granicama od $\sqrt{y}$ do $2 - y$ i spoljašnji integral po promenljivoj y sa granicama od 0 do 1. To implicira da je tvrđenje pod A tačno, a pod B netačno. Da bi se odredile granice za unutrašnji integral po promenljivoj y i spoljašnji po promenljivoj x, potrebno je primeniti osobinu (1.1.3), odnosno da se oblast integracije podeli na dva dela pravom $x = 1$. To znači da tvrđenja pod C i D ne mogu biti tačna. Granice prvog sabirka u tvrđenju pod E odgovaraju oblasti između prave $y = 0$ i parabole $y = x^2$ za $x \in [0,1]$, dok granice drugog sabirka odgovaraju oblasti između pravih $y = 0$ i $y = 2 - x$ za $x \in [1,2]$, tako da je tvrđenje pod E tačno.



Slika 3.1.2

8. B, E

Na osnovu definicije polarnih koordinata, tvrđenja pod B i E su tačna, a tvrđenja pod A i C netačna. Pošto je

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta = \rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \rho^2,$$

i tvrđenje pod D je netačno.

9. B, C

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}(2x-4y)\,dy\right)dx &= \int_{-1}^{1}\left[2xy - 4\cdot\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{2} dx = \int_{-1}^{1}(4x - 8 - (2x-2))\,dx = \\ &= \int_{-1}^{1}(2x-6)\,dx = \left[(2\cdot\frac{x^2}{2} - 6x\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 1 - 6 - (1+6) = -12\end{aligned}$$

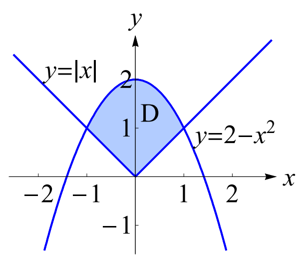
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}6xy^2\,dx\right)dy = \int_{0}^{1}6x\,dx\cdot\int_{-1}^{1}y^2\,dy = 6\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{0}^{1}\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \left[x^2\right]\Big|_{0}^{1}\cdot\left[y^3\right]\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{1}^{2}\sqrt{y^5}\,dx\right)dy = \int_{0}^{1}y^{\frac{5}{2}}\left(\int_{1}^{2}dx\right)dy = \int_{0}^{1}y^{\frac{5}{2}}\left[x\right]\Big|_{1}^{2}dy = \int_{0}^{1}y^{\frac{5}{2}}dy = \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{7}\cdot y^{\frac{7}{2}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{7}$$

10. D, E

Oblast integracije integrala pod A i B su kvadrati čije su stranice paralelne koordinatnim osama, tako da ta tvrđenja ne mogu biti tačna.

Pošto je $|x| = x$ za $x \ge 0$ i $|x| = -x$ za $x < 0$, presek parabole $y = 2 - x^2$ sa krivom $y = |x|$ su tačke $(1,1)$ i $(-1,1)$, dobijene na osnovu pozitivnog rešenja jednačine $x = 2 - x^2$ i negativnog rešenja jednačine $-x = 2 - x^2$. Grafik oblasti D je prikazan na slici 3.1.3. Na osnovu grafika se može zaključiti da se za određivanje granica integrala I, oblast integracije mora podeliti na dva dela: pravom $y = 1$ ili pravom $x = 0$. To znači da ni tvrđenje pod C ne može biti tačno.
Granice tvrđenja pod D odgovaraju podeli oblasti D pravom $y = 1$. Prvi sabirak odgovara oblasti između pravih $x = -y$ i $x = y$ za $y \in [0,1]$, a drugi oblasti između lukova parabole: $x = -\sqrt{2-y}$ i $x = \sqrt{2-y}$ za $y \in [1,2]$.



Slika 3.1.3

Granice tvrđenja pod E odgovaraju podeli oblasti D pravom $x = 0$. Prvi sabirak odgovara oblasti između prave $y = -x$ i parabole $y = 2 - x^2$ za $x \in [-1,0]$, a drugi oblasti između prave $y = x$ i parabole $y = 2 - x^2$ za $x \in [0,1]$.

Test 1.2

1. B, D

   Na osnovu definicija 1.3-1.5, tvrđenja pod B i D su tačna. Pošto je $D \subset \mathbb{R}^2$, oblast D je dvodimenzionalna, tako da je tvrđenje pod A netačno. Sa $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je označena dužina najdužeg dijametra među dijametrima podoblasti, a dijametar pravougaonika je dužina njegove dijagonale, tako da $\lambda(\mathcal{P}_n)$ ne može biti najkraća stranica pravougaonika, pa tvrđenje pod C nije tačno. Tvrđenje pod E je netačno jer je, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, tačka (ξ_i, η_i) proizvoljna tačka iz podoblasti D_i, a ne iz cele oblasti D.

2. A, E

   Oblast integracije integrala I je pravougaonik $\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 \mid c \le x \le d,\ a \le y \le b\}$, tako da je pod A integral I napisan sa obrnutim redosledom integraljenja.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)\,dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d g(y)\,dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y)\,dx \right) dy = \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b f(x)\,dy \right) dx + \int_a^b g(y) \left(\int_c^d dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y)\,dx \right) dy = \\
&= \int_c^d f(x) \left(\int_a^b dy \right) dx + \int_a^b g(y) \left(\int_c^d dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y)\,dx \right) dy = \qquad (3.1.1) \\
&= \int_c^d f(x) \Big[y\Big]\Big|_a^b dx + \int_a^b g(y) \Big[x\Big]\Big|_c^d dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y)\,dx \right) dy = \\
&= \int_c^d f(x)\,(b-a)\,dx + \int_a^b g(y)\,(d-c)\,dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y)\,dx \right) dy = \\
&= (b-a) \int_c^d f(x)\,dx + (d-c) \int_a^b g(y)\,dy + \int_a^b \left(\int_c^d h(x,y)\,dx \right) dy,
\end{aligned}
$$

   tako da su tvrđenja pod B i D netačna. Na osnovu (3.1.1), tvrđenje pod E je tačno. Tvrđenje pod C je netačno jer je

$$
-\int_a^b \left(\int_c^d (-f(x) + g(y) + h(x,y))\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d (f(x) - g(y) - h(x,y))\,dx \right) dy.
$$

3. C, D

   Presek površi pod A se dobija rešavanjem sistema jednačina $z = 0,\ z = y^2$, odakle je $0 = y^2$, odnosno $y = 0$, što je prava.

   Presek površi pod B se dobija rešavanjem sistema jednačina $z = 0,\ z = x^2$, te je $0 = x^2$, što je prava $x = 0$.

   Kako je presek površi $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ i $z = 2$ elipsa $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ u ravni $z = 2$, tvrđenje pod C je tačno.

   Presek površi $x = 1$ i $z = 0$ je prava $x = 1$ u ravni $z = 0$, te je tvrđenje pod D tačno.

   Pošto je rešenje sistema jednačina $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0$ prazan skup, površi pod E se ne seku.

4. D

   Oblast integracije je skup

$$
\left\{ (x, y) \subset \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -\frac{x}{\pi} - \frac{3}{2} \le y \le \cos 2x \right\},
$$

   tako da je ograničena pravama: $x = -\frac{x}{\pi}$, $x = \frac{x}{\pi}$ i $y = -\frac{x}{\pi} - \frac{3}{2}$ i krivom $y = \cos 2x$. Oblasti pod C i E su odozgo ograničene parabolom, a oblast pod B sinusoidom, tako da se one mogu isključiti. Oblast pod A nije data oblast integracije jer je odozdo ograničena pravom koja prolazi kroz tačke $\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$, tako da je u pitanju prava

$$
y + 2 = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}, \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{x}{\pi} - \frac{3}{2}.
$$

   Oblast pod D je odozdo ograničena pravom koja prolazi kroz tačke $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$, te je u pitanju prava

$$
\frac{y + 1}{-1} = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}, \quad \text{odnosno} \quad y = -\frac{x}{\pi} - \frac{3}{2}.
$$

5. A, C

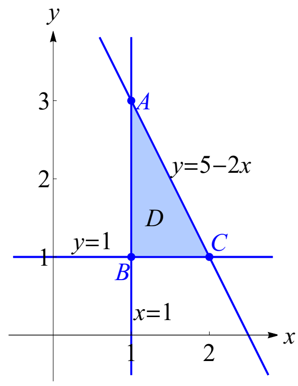
Tvrđenje pod E je netačno jer se u granicama spoljašnjeg integrala ne mogu nalaziti promenljive.
Tačke A i B pripadaju pravoj $x = 1$, tačke B i C pravoj $y = 1$, a tačke A i C pravoj

$$\frac{y-3}{-2} = x - 1, \text{ odnosno } y = 5 - 2x.$$

Na osnovu grafika oblasti D (slika 3.1.4), posmatrajući unutrašnje granice integrala za promenljivu y i spoljašnje granice za x,

$$1 \le y \le 5 - 2x \text{ za } 1 \le x \le 2.$$

To znači da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno.



Slika 3.1.4

Za unutrašnje granice integrala po promenljivoj x i spoljašnje po y,

$$1 \le x \le \frac{5}{2} - \frac{y}{2} \text{ za } 1 \le y \le 3,$$

te je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenje pod D netačno.

6. B, C

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x\sqrt{x} - y^2\sqrt{y}\right) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{5}{2}}\right) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - y^{\frac{5}{2}} x \right] \Bigg|_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} - y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \left[\frac{2}{5} y - \frac{2}{7} \cdot y^{\frac{7}{2}} \right] \Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{4}{35}\end{aligned}$$

Pošto je oblast integracije integrala pod C, D i E pravougaonik, a podintegralna funkcija zavisi samo od jedne promenljive, može se primeniti teorema 1.10. Tako je

$$\begin{aligned}\int_1^e \left(\int_{-1}^1 \frac{\ln y}{y} dx \right) dy &= \int_{-1}^1 dx \cdot \int_1^e \frac{\ln y}{y} dy = x \Big|_{-1}^1 \cdot \int_1^e \ln y \cdot \frac{1}{y} dy = 2 \int_1^e \ln y \cdot \frac{1}{y} dy = \\ &= 2 \int_{\ln 1}^{\ln e} t\, dt = t^2 \Big|_0^1 = 1,\end{aligned}$$

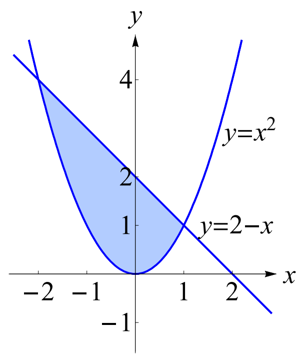
pri čemu je primenjena smena $t = \ln y$, gde je $dt = \frac{1}{y} dy$.

7. E

Neka je sa D označena oblast određena krivama $y = x^2$ i $y = 2 - x$. Tražena površina je $P = \iint\limits_D dxdy$. Presek krivih $y = x^2$ i $y = 2 - x$ se može dobiti iz jednačine $x^2 = 2 - x$, odnosno $x^2 + x - 2 = 0$. Rešenja te jednačine su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$, pa su presečne tačke $(1, 1)$ i $(-2, 4)$. Stoga, oblast integracije, prikazana na slici 3.1.5, nalazi se u traci određenoj pravama $x = -2$ i $x = 1$ i

$$\text{za svako } x \in [-2, 1] \text{ važi da je } x^2 \le y \le 2 - x,$$

tako da je



Slika 3.1.5

$$\begin{aligned}P &= \int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} dy\, dx = \int_{-2}^1 y \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \int_{-2}^1 \left(2 - x - x^2\right) dx = \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

8. B, E

Kako je $x^2+y^2+1>0$, dato telo je odozdo ograničeno s ravni $z=0$, a odozgo paraboloidom $z=x^2+y^2+1$, dok je sa strane ograničeno cilindričnom površi $x^2+y^2=1$ paralelnom sa z-osom. Zbog toga je osnova tog tela $x^2+y^2\le 1$ i njegova zapremina se može odrediti dvostrukim integralom $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2+1\right)dxdy$. Tako je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Površina površi $z=x^2+y^2+1$ koju iz nje iseca cilindar $x^2+y^2=1$ je

$$P=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,dxdy,$$

pri čemu je funkcija $f(x,y)=x^2+y^2+1$ za $(x,y)\in\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x^2+y^2\le 1\right\}$. Pošto je

$$f'_x(x,y)=2x \ \text{ i } \ f'_y(x,y)=2y,$$

$$P=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

9. A

Nakon smene menja se oblast integracije, tako da tvrđenja pod C, D i E ne mogu biti tačna.

Tvrđenje pod A odgovara definiciji polarnih koordinata, pa je tvrđenje pod B netačno.

10. B, C

Pošto je

$$x^2+\frac{y^2}{4}=\rho^2\cos^2\theta+\frac{4\rho^2\sin^2\theta}{4}=\rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=\rho^2,$$

kriva $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ se transformiše u $\rho^2=1$, odnosno u $\rho=1$ jer je $\rho\in[0,\infty)$. To znači da se smenom dobija oblast određena ravnima: $\rho=0$, $\rho=1$, $\theta=0$ i $\theta=2\pi$, te je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Iz $\rho>0$ i

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ 2\sin\theta & 2\rho\cos\theta\end{vmatrix}=2\rho\cos^2\theta+2\rho\sin^2\theta=2\rho\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2\rho$$

sledi da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod D i E su netačna.

Test 1.3

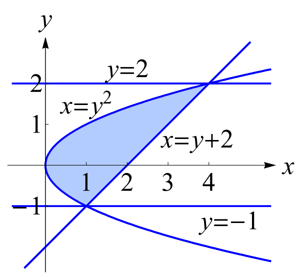
1. B, E

U granicama za promenljivu y se ne može nalaziti promenljiva y, tako da su tvrđenja pod A i C netačna.

$$I=\int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2}(x+y)\,dx\right)dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]\Bigg|_{y^2}^{y+2}dy,$$

te je tvrđenje pod B tačno, a pod D netačno.

Na osnovu granica integrala I, oblast integracije se nalazi u traci određenoj pravama $y=-1$ i $y=2$ i sa leve strane je ograničena parabolom $x=y^2$, a sa desne strane pravom $x=y+2$. Parabola $x=y^2$ i prava $x=y+2$ se seku u tačkama čije ordinate zadovoljavaju jednačinu $y^2=y+2$, odnosno $y^2-y-2=0$, tako da su u pitanju tačke $(1,-1)$ i $(4,2)$. Oblast integracije je prikazana na slici 3.1.6. Po tvrđenju pod E, za obrnuti redosled integraljenja potrebno je oblast integracije podeliti na dva dela. Prvi deo je u traci određenoj pravama $x=0$ i $x=1$ i odozdo je ograničen krivom $y=-\sqrt{x}$, a odozgo krivom $y=\sqrt{x}$. Drugi deo je u traci određenoj pravama $x=1$ i $x=4$, a prava $y=x-2$ i kriva $y=\sqrt{x}$ ga ograničavaju odozdo i odozgo, respektivno. To znači da je u pitanju ista oblast, te je tvrđenje pod E tačno.



Slika 3.1.6

2. B, D

Pošto je oblast integracije pravougaonik,

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 + \sqrt{y})\, dy \right) dx,$$

ali i

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + \sqrt{y})\, dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + x\sqrt{y} \right]\Bigg|_1^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + 2\sqrt{y} - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{y} \right) \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + \sqrt{y} \right) dy. \end{aligned}$$

3. B

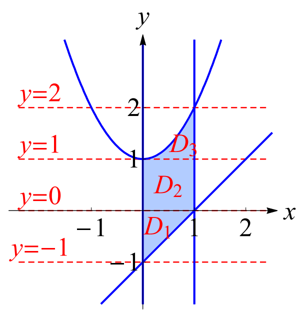
Parabola $y = x^2 - 1$ nije prikazana na slici 2.1.1, tako da su tvrđenja pod A, D i E netačna.

Prava $y = 1$ deli prikazanu oblast na dva dela, pa je i tvrđenje pod C netačno.

Tvrđenje pod B je tačno jer je prikazana oblast sa strane ograničena pravama $x = 0$ i $x = 1$, odozdo pravom $y = x - 1$ i odozgo parabolom $y = x^2 + 1$.

4. C, E

Veličina površine P oblasti D jednaka je $\iint\limits_D dxdy$. Na osnovu prethodnog zadatka, unutrašnje granice po promenljivoj y idu od $x - 1$ do $x^2 + 1$, a spoljašnje granice po promenljivoj x od 0 do 1, pa su tvrđenja pod A i B netačna, a tvrđenje pod C je tačno. Za površinu sa obrnutim redosledom integraljenja, potrebno je podeliti oblast D na tri dela, kao što je prikazano na slici 3.1.7. Tako je površina P jednaka zbiru dvostrukog integrala nad oblašću D_1 između pravih $y = -1$ i $y = 0$, dvostrukog integrala nad oblašću D_2 između $y = 0$ i $y = 1$ i dvostrukog integrala nad oblašću D_3 između $y = 1$ i $y = 2$. Pošto je D_2 jedinični kvadrat sa površinom jednakoj 1, oblast D_1 sa leve strane ograničena pravom $x = 0$, a sa desne strane pravom $x = y + 1$ i oblast D_3 sa leve strane ograničena lukom parabole $y = x^2 + 1$, odnosno krivom $x = \sqrt{y-1}$, a sa desne strane pravom $x = 1$, tvrđenje pod E je tačno, a tvrđenje pod D netačno.



Slika 3.1.7

5. A, C

Na osnovu prethodnog zadatka,

$$\begin{aligned} P &= \iint\limits_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1+x^2} dy \right) dx = \int_0^1 y\Big|_{x-1}^{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 + x^2 - (x-1)\right) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 - x + 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6} \end{aligned}$$

6. A

Na osnovu spoljašnjih granica, oblast integracije je u traci između pravih $y = -1$ i $y = 2$, a na osnovu unutrašnjih, između krivih $x = y^2$ i $x = y + 2$. Primetimo da je u pitanju ista oblast integracije kao u četvrtom zadatku, odnosno oblast na slici 3.1.6. To znači da je jedino tvrđenje pod A tačno.

7. D, E

Tvrđenje pod D je primena osobine (1.1.2) sa $f(x,y) = \sqrt{x}$ i $g(x,y) = \sqrt{y}$, a tvrđenje pod E primena osobine (1.1.1) sa $\alpha = \sqrt{\pi}$ i $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

Tvrđenje pod A je netačno jer ne važi da je koren zbira jednak zbiru korena.

Tvrđenje pod B i C su netačna jer dvostruki integral količnika ne mora biti jednak količniku dvostrukih integrala, niti je dvostruki integral proizvoda jednak proizvodu dvostrukih integrala.

8. C, D

Na osnovu definicije 1.3, $f(\xi_1, \eta_1)$ je visina cilindričnog tela sa osnovom D_1, te je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenje pod B netačno. $\lambda(\mathcal{P}_n)$ je dijametar podele $\mathcal{P}_n$, odnosno najduži dijametar među dijametrima podoblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$, tako da je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenja pod A i E su netačna.

9. C

Nova podintegralna funkcija je stara podintegralna funkcija pomnožena sa apsolutnom vrednošću Jakobijana. Pošto je Jakobijan ϱ i

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi = \varrho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = \varrho^2,$$

nova podintegralna funkcija je $\varrho^2 \cdot \varrho$, te je tvrđenje pod C tačno, a ostala su netačna.

10. A, D

Površina kruga poluprečnika 0.5 je $0.5^2\pi$, odnosno $\frac{\pi}{4}$. Pošto je π površina jediničnog kruga (krug poluprečnika 1), polovina površine jediničnog kruga je $\frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \varrho \, d\varrho \right) d\theta = \int_0^\pi \frac{\varrho^2}{2} \bigg|_0^1 d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} \, d\theta = \frac{1}{2} \, \theta \bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

pa su tačna tvrđenja pod A i D, a ostala su netačna.

Test 1.4

1. B, C

Translacijom konusa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ duž x-ose u pozitivnom smeru za 2 jedinične duži dobija se konus $z = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, a translacijom duž y-ose u pozitivnom smeru za 2 jedinične duži konus $z = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, tako da je tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenje pod B tačno.

Tvrđenje pod C je tačno jer je presek površi $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ i $z = 0$ kriva $x^2 + y^2 = 1$ u ravni $z = 0$, što je jedinična kružnica.

Presek površi $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ i $x = 0$ treba da zadovolji jednačinu $-y^2 - z^2 = 1$, ekvivalentno $y^2 + z^2 = -1$. Međutim, to je kontradikcija jer je $y^2 + z^2 \geq 0$, tako da je tvrđenje pod D netačno.

Presek površi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $y = 1$ zadovoljava jednačinu $x^2 + z^2 = 0$, a njeno rešenje je $(x, z) = (0, 0)$, tako da se posmatrane površi seku u tački $(0, 1, 0)$, te je tvrđenje pod E netačno.

2. A, E

Površ je grafik funkcije koja preslikava uređen par realnih brojeva u realan broj, tako da je tačno tvrđenje pod A, a tvrđenja pod B i C su netačna.

Funkcija koja je realna funkcija dve realne promenljive preslikava $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, tako da je tačno tvrđenje pod E, a tvrđenje pod D je netačno.

3. B, D

Na osnovu definicija 1.3 i 1.5, tačno je tvrđenje pod D i netačno tvrđenje pod E. Skup D ima osobine navedene pod B, tako da je tvrđenje pod A netačno. Uslov na funkciju f je da je ograničena, tako da je tvrđenje pod C netačno.

4. C, D

Primenom smene $t = x^2 + y$, $dt = 2x \, dx$, na unutrašnji integral dvostrukog integrala I, menjaju se granice unutrašnjeg integrala na y i $1 + y$, tako da su tvrđenja pod A i E netačna. Pošto je podintegralna funkcija $\sin\left(x^2 + y\right) \cdot 2x \, dx$, ona postaje $\sin(t) \, dt$, te je tvrđenje pod C tačno.

Tačno je i tvrđenje pod D jer je oblast integracije integrala I pravougaonik, pa se granice mogu napisati i u tom redosledu, na osnovu teoreme 1.9. To implicira da je tvrđenje pod B netačno.

5. A, D

Kako je T prav valjak sa osnovom u ravni xOy, odnosno ravni $z = 0$, sa strane je ograničen eliptičkim cilindrom paralelnim sa z-osom. Pošto je visina valjka 2, T je odozgo ograničen s ravni $z = 2$. To znači da je tačno tvrđenje pod A, a tvrđenje pod B netačno.

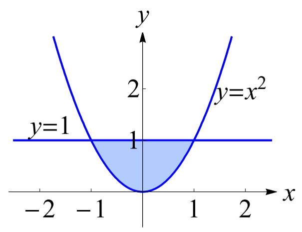
Dvostruki integral nije definisan nad trodimenzionalnom oblašću, tako da tvrđenje pod C nije tačno.

Pošto je D dvodimenzionalna oblast, tvrđenje pod D je tačno.

Veličina površine površi $y = f(x,y)$ za $(x,y) \in D$ je $\iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}\, dxdy$, pod uslovom da postoje parcijalni izvodi funkcije f i da su neprekidni, tako da je tvrđenje pod E netačno.

6. A, C

Presek krivih $y = x^2$ i $y = 1$ je određen rešenjem jednačine $x^2 = 1$. Pošto su $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ rešenja te jednačine, posmatrane krive se seku u tačkama $(-1,1)$ i $(1,1)$. Zatvorena oblast koju određuju parabola $y = x^2$ i prava $y = 1$ je prikazana na slici 3.1.8. Kako se ta oblast nalazi u traci određenoj pravama $x = -1$ i $x = 1$ i odozdo je ograničena parabolom $y = x^2$, a odozgo pravom $y = 1$, granice za unutrašnji integral po promenljivoj y su od x^2 do 1, a granice za spoljašnji integral po promenljivoj x od -1 do 1. To znači da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenje pod B netačno.



Slika 3.1.8

Data oblast se nalazi i u traci određenoj pravama $y = 0$ i $y = 1$ i s leve strane je ograničena sa $x = -\sqrt{y}$ (levi luk parabole), a s desne strane sa $x = \sqrt{y}$ (desni luk parabole), tako da su granice za unutrašnji integral po promenljivoj x od $-\sqrt{y}$ do $\sqrt{y}$, a granice za spoljašnji integral po promenljivoj y od 0 do 1. Dakle, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenja pod D i E su netačna.

7. B, E

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}(x-y)\,dy\right)dx &= \int_{-1}^{1}\left[xy - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{2} dx = \int_{-1}^{1}\left(2x - 2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\left(x - \frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{y} xy^2\,dx\right)dy &= \int_{-1}^{1} y^2\left(\int_{1}^{y} x\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1} y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{y} dy = \int_{-1}^{1} y^2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(y^4 - y^2\right)dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{2}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\sqrt{y^3}\,dx\right)dy &= \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left(\int_{-1}^{y}\right)dy = \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left[x\right]\Big|_{-1}^{y} dy = \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\,(y+1)\,dy = \\
&= \int_{0}^{1}\left(y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \left[\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_{0}^{1} = \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{5}\right) = \frac{24}{35}
\end{aligned}$$

8. D, E

Pošto je $x^2 + y^2 \geq 0$, telo pod E je odozdo ograničeno s ravni $z = 0$, a odozgo paraboloidom $z = x^2 + y^2$. Ravni: $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$ i $y = 1$ ograničavaju telo sa strane, tako da je ono paralelno sa z-osom, pa je njegova osnova pravougaonik $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$. To implicira da se njegova zapremina može izračunati preko dvostrukog integrala I_1. Dakle, tvrđenje pod E je tačno.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \int_{0}^{1}\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1} dx = \int_{0}^{1}\left(x^2 + \frac{1}{3} - \left(-x^2 - \frac{1}{3}\right)\right)dx = \\
&= \int_{0}^{1}\left(2x^2 + \frac{2}{3}\right)dx = \left[2\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x\right]\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin y \, dx \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left[\sin x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \\
&= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, (1-0) \, dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = -\cos y \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos(-\pi) \right) = -(0-(-1)) = -1
\end{aligned}$$

9. C, E

Pošto funkcija F zavisi od promenljive x, ne može se izvući ispred integrala, pa je tvrđenje pod A netačno.

Na osnovu osobine (1.1.5),

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \geq \iint\limits_D dxdy,$$

tako da je tvrđenje pod B netačno.

Na osnovu osobina dvostrukog integrala 1.6, tvrđenja pod C i E su tačna, a tvrđenje pod D netačno.

10. A, B

Tvrđenje pod E ne može biti tačno jer se smenom menja oblast integracije.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{v} - \frac{u}{v} = -\frac{2u}{v},$$

tako da su tačna tvrđenja pod A i B.

Pošto je

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

tvrđenje pod C je netačno. Netačno je i tvrđenje pod D jer je $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ funkcija po promenljivama x i y.

Test 1.5

1. C, D

Ako je grafik funkcije f ravan, tada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i važi da je $f(x,y) = ax + by + c$, gde su a, b i c realni parametri, tako da su tvrđenja pod A i B netačna.

Parabola pod C je zadata funkcijom $f(x) = x^2$ za $x \in (-1,1)$, koja je neprekidno diferencijabilna (funkcije f i f' su neprekidne) na intervalu $(-1,1)$, tako da je parabola $y = x^2$ glatka kriva.

Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je dvodimenzionalan, a interval je jednodimenzionalan, tako da je tvrđenje pod E netačno.

Pošto je skup D ograničen, postoji pozitivna konstanta c sa osobinom da je rastojanje između proizvoljne dve tačke skupa D najviše c. To znači da se skup D može smestiti u kvadrat sa stranicom dužine c, tako da je tvrđenje pod D tačno.

2. E

Na osnovu definicija 1.3-1.5, I je granična vrednost Rimanovih integralnih suma, tako da je tvrđenje pod A netačno. Pošto je ΔD_i površina podoblast D_i, tvrđenja pod B i C se mogu isključiti. Tvrđenje pod D je netačno jer po njemu dijametar podele $\mathcal{P}_n$ teži ka beskonačnosti. Tvrđenje pod E je upravo definicija dvostrukog integrala, tako da je tačno.

3. C, E

Tvrđenja pod A i D su netačna zbog načina rastavljanja podintegralnih funkcija.

S obzirom na to da je dvostruki integral zbira jednak zbiru integrala i konstanta se može izvući ispred dvostukog integrala, na osnovu teoreme 1.6, tvrđenja pod C i E su tačna, a tvrđenje pod B netačno.

4. B, C

$$I_1=\int_0^2\left(\int_0^y 3x^2\,dx\right)dy=\int_0^2 3\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^y dy=\int_0^2 x^3\Big|_0^y dy=\int_0^2 y^3\,dy=\frac{y^4}{4}\Big|_0^2=\frac{2^4}{4}=4$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^1\left(\int_{x^2}^1(\sqrt{y}+2x)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{x^2}^1\left(y^{\frac12}+2x\right)dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac23\,y^{\frac32}+2xy\right]\Big|_{x^2}^1 dx=\\ &= \int_0^1\left(\frac23+2x-\left(\frac23\,(x^2)^{\frac32}+2x^3\right)\right)dx=\int_0^1\left(\frac23+2x-\frac83\,x^3\right)dx=\\ &= \left[\frac23\,x+2\,\frac{x^2}{2}-\frac83\,\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1=\left[\frac23\,x+x^2-\frac23\,x^4\right]\Big|_0^1=\frac23+1-\frac23=1,\end{aligned}$$

primenivši da je $(x^2)^{\frac32}=x^3$ zbog toga što $x\in[0,1]$.

5. D, E

$$\begin{aligned}I &= \int_{-2}^0\left(\int_0^1 3\,(x+y^2)\,dy\right)dx=3\int_{-2}^0\left(\int_0^1(x+y^2)\,dy\right)dx=\\ &= 3\int_{-2}^0\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]\Big|_0^1 dx=3\int_{-2}^0\left(x+\frac13\right)dx=3\left[\frac{x^2}{2}+\frac13\,x\right]\Big|_{-2}^0=-3\left(2-\frac23\right)=-4\end{aligned}$$

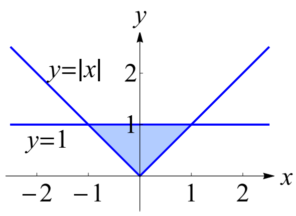
6. A, D

Na osnovu definicije polarnih koordinata, $x=\rho\cos\theta$ i $y=\rho\sin\theta$, te je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenja pod B i C su netačna. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\rho$, tako da ni tvrđenje pod E nije tačno. Tvrđenje pod D je tačno jer smenom na ρ i θ, podintegralna funkcija $f(x,y)$ postaje $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, a $dxdy$ postaje $\rho\,d\rho d\theta$.

7. B, D

S obzirom na to da je

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$



Slika 3.1.9

data zatvorena oblast se nalazi između pravih: $y=1$, $y=x$ i $y=-x$. Posmatrana oblast je prikazana na slici 3.1.9. Krive $y=1$ i $y=|x|$ se seku u tačkama $(-1,1)$ i $(1,1)$ jer su $x_1=-1$ i $x_2=1$ rešenja jednačine $|x|=1$. Pošto se data oblast nalazi u traci određenoj pravama $y=0$ i $y=1$ i sa leve strane je ograničena pravom $x=-y$, a sa desne strane pravom $x=y$, granice za unutrašnji integral po promenljivoj x su od $-y$ do y, a granice za spoljašnji integral po promenljivoj y su od 0 do 1. To znači da je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

S druge strane, data oblast se nalazi u traci određenoj pravama $x=-1$ i $x=1$ i odozdo je ograničena krivom $y=|x|$, a odozgo pravom $y=1$. Stoga, granice za unutrašnji integral po promenljivoj y su od $|x|$ do 1, a granice za spoljašnji integral po promenljivoj x su od -1 do 1. Dakle, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenja pod A i C su netačna.

8. A, C

Površ pod A je ravan paralelna sa y-osom, tako da je tvrđenje tačno.

Površ pod B je konus, tako da je tvrđenje netačno.

Presek paraboličkog cilindra $x^2=z$ i ravni $y=1$ je parabola $x^2=z$ u ravni $y=1$, pa je tvrđenje pod C tačno.

Presek kružnog cilindra $x^2+y^2=1$ i ravni $y=0$ je $x^2=1$, odnosno prave $x=1$ i $x=-1$, te je tvrđenje pod D netačno.

Pošto je jednačina $x^2+y^2=0$ zadovoljena samo za $x=y=0$, ona određuje tačku $(0,0)$, tako da je tvrđenje pod E netačno.

9. B

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+4y)\,dx\right)dy=\int_0^{\pi}[-\cos x+4yx]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\pi}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+2\pi y-(-\cos 0)\right)= \\ &= \int_0^{\pi}(2\pi y+1)=\left[2\pi\frac{y^2}{2}+y\right]\Big|_0^{\pi}=[\pi y^2+y]\Big|_0^{\pi}=\pi^3+\pi \end{aligned}$$

10. A

Površina oblasti D je jednaka $\iint\limits_D dxdy$, te je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod D netačno.

Pošto nije poznat znak funkcije f, tvrđenja pod B i E su netačna.

Telo ograničeno površima $z=f(x,y)$, $z=-f(x,y)$ nema osnovu u ravni $z=0$, tako da njegova zapremina nije data sa integralom I.

Test 1.6

1. D 2. B 3. E 4. A, E 5. A, C 6. D, E 7. B, C 8. B 9. C, E 10. A, D

Test 1.7

1. B, D 2. C, E 3. A, E 4. B, C 5. A, C 6. B, E 7. A, B 8. C, D 9. A, D 10. D, E

Test 1.8

1. C 2. B, E 3. A 4. B, D 5. A 6. C, D 7. C, D 8. A, D 9. B, E 10. E

Test 1.9

1. B, C 2. A, E 3. A, D 4. C, E 5. A, B 6. D, E 7. A, C 8. B, E 9. B, D 10. C, D

Test 1.10

1. B, E 2. A, B 3. D 4. A, E 5. B, D 6. B, C 7. D, E 8. C, E 9. C 10. A

3.2 Trostruki integrali

Test 2.1

1. B, D

Presek cilindrične površi $x^2 + y^2 = 1$ i ravni $y = 0$ je $x^2 = 1$, odnosno prave $x = -1$ i $x = 1$ u ravni $y = 0$.

Presek konusa $z^2 = x^2 + y^2$ i ravni $z = 2$ je kružnica $x^2 + y^2 = 4$ u ravni $z = 2$.

Površi $x + y + z = 3$ i $z = 0$ su ravni, tako da njihov presek ne može biti kružnica.

Presek paraboloida $z = x^2 + y^2$ i ravni $z = 3$ je kružnica $x^2 + y^2 = 3$ u ravni $z = 3$.

Presek paraboličkog cilindra $z = x^2$ i ravni $y = 1$ je parabola $z = x^2$ u ravni $y = 1$.

2. C, D

Na osnovu definicija 1.13-1.15, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenja pod C i D su tačna. Tvrđenje pod B je netačno jer se podelom oblasti T ravnima koje su paralelne sa koordinatnim ravnima dobijaju podoblasti $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sa osobinom da je $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n = T$ i presek bilo koje dve podoblasti je najviše površ. Pošto je ΔT_i zapremina podoblasti T_i, $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i$ ne može biti zapremina podoblasti T_i, tako da tvrđenje pod E nije tačno.

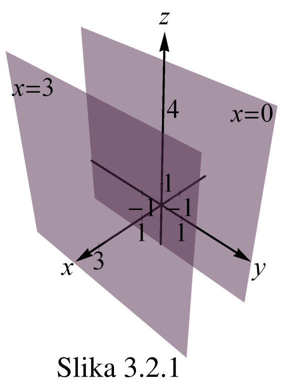
3. C, E

Ravni $x = 0$ i $x = 3$ su ortogonalne na x-osu (slika 3.2.1), a ravan $z = 4$ i parabolički cilindar $z = y^2$ su paralelni sa x-osom (slika 3.2.2), tako da je oblast integracije između $x = 0$ i $x = 3$, ali i između $z = 4$ i $z = y^2$ (slika 3.2.3). To znači da je 0 donja, a 3 gornja granica za promenljivu x. Granice za y i z su određene projekcijom oblasti integracije na yOz ravan, a ta projekcija (slika 3.2.4) je zatvorena oblast između prave $z = 4$ i parabole $z = y^2$. Integraljenjem prvo po promenljivoj z, a potom po promenljivoj y, granice za te dve promenljive su

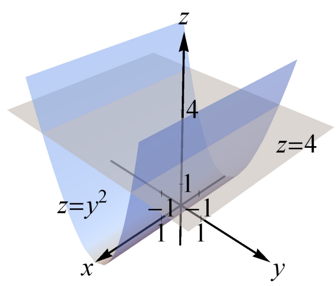
$$y^2 \leq z \leq 4, \quad -2 \leq y \leq 2.$$

To znači da su tvrđenja pod C i E tačna, a tvrđenja pod A i B netačna.

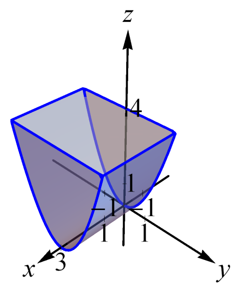
Oblast integracije trostrukog integrala pod D je kvadar, tako da je tvrđenje pod D netačno.



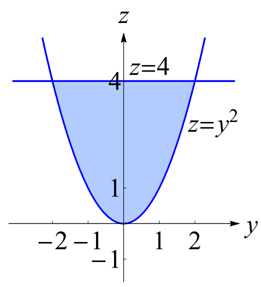
Slika 3.2.1



Slika 3.2.2



Slika 3.2.3



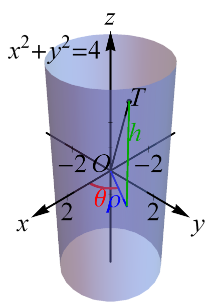
Slika 3.2.4

4. D, E

Na osnovu definicije cilindričnih koordinata (ilustrovane na slici 3.2.5), θ predstavlja ugao između projekcije duži OT na xOy ravan i pozitivnog dela x-ose. To implicira da su tvrđenja pod A, B i C netačna.
Veza promenljivih x, y i z sa promenljivama ρ, θ i h je upravo definisana izrazima pod E, tako da je tvrđenje pod E tačno. Na osnovu toga važi da je

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta = \rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \rho^2.$$

Stoga je jednačina $x^2 + y^2 = 4$ ekvivalentna sa $\rho^2 = 4$, što, zbog nenegativnosti promenljive ρ, daje da je $\rho = 2$. Dakle, tvrđenje pod D je tačno.



Slika 3.2.5

5. A, C

U teoremi 1.16 su navedene osobine trostrukog integrala, a ona nije primenljiva za integrale $\iiint\limits_T (x\cdot z)\,dxdydz$ i $\iiint\limits_T y\cdot z\,dxdydz$, tako da su tvrđenja pod B i E netačna. Teorema 1.16 sa $f(x,y,z)=x$ i $g(x,y,z)=z$ u osobini (1.1.8) daje tvrđenje pod A, a sa $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ u osobini (1.1.10) daje tvrđenje pod C, tako da su ta tvrđenja tačna. Pošto u tvrđenju pod D nije definisan presek oblasti T_1 i T_2, ne može se primeniti osobina (1.1.9), pa je tvrđenje pod D netačno.

6. B, E

Tvrđenje pod A je netačno jer se integral po promenljivoj z ne može izvući ispred integrala po x u čijim granicama se nalazi promenljiva z.

Tvrđenje pod B je tačno jer je

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\left(\int_0^z yz\,dx\right)dy\right)dz &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 yz\left(\int_0^z dx\right)dy\right)dz=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 yz\Big[x\Big]\Big|_0^z dy\right)dz=\\ &=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 yz\,(z-0)\,dy\right)dz=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 yz^2\,dy\right)dz.\end{aligned}$$

Pošto se u tvrđenju pod C promenljiva z nalazi u granici integrala po promenljivoj x, ne može se prvo integraliti po promenljivoj z, a potom po promenljivoj x, te je tvrđenje netačno.

Tvrđenje pod D je natačno jer se promenljiva z nalazi u granici integrala po promenljivoj y, tako da se ne može integraliti po promenljivoj z pre integraljenja po promenljivoj y.

Kako je, primenom parcijalne integracije sa

$$u=x \;\text{ i }\; dv=e^x\,dx,$$

odnosno

$$du=dx \;\text{ i }\; v=\int e^x\,dx=e^x,$$

$$\begin{aligned}\int_0^2\left(\int_{-2}^z\left(\int_0^3 xe^{x+y}\,dx\right)dy\right)dz &= \int_0^2\left(\int_{-2}^z e^y\left(\int_0^3 xe^x\,dx\right)dy\right)dz=\\ &=\int_0^2\left(\int_{-2}^z e^y\left(\Big[xe^x\Big]\Big|_0^3-\int_0^3 e^x\,dx\right)dy\right)dz,\end{aligned}$$

tvrđenje pod E je tačno.

7. A, E

Oblast T je kvadar za koji važi da je

$$0\le x\le 1,\;\; -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2},\;\; -2\le z\le 3,$$

tako da je

$$I=\int_{-2}^{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 e^x\cos y\,dx\right)dy\right)dz,$$

pa je tvrđenje pod B netačno. Kako je podintegralna funkcija proizvod funkcije po promenljivoj x i funkcije po promenljivoj y, dobijeni integral se može zapisati kao proizvod određenih integrala (teorema 1.20), te je

$$\int_{-2}^{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 e^x\cos y\,dx\right)dy\right)dz=\left(\int_0^1 e^x\,dx\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy\right)\left(\int_{-2}^{3}dz\right).$$

To implicira da je tvrđenje pod A tačno.

Izračunavanjem dobijenih određenih integrala je

$$I=\left(e^x\Big|_0^1\right)\left(\sin y\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(z\Big|_{-2}^{3}\right)=\left(e-e^0\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)(3+2)=10\,(e-1)\,.$$

8. C, D

Formula za određivanje zapremine trodimenzionalne oblasti T je $\iiint\limits_T dxdydz$, pa su tvrđenja pod A i B netačna, a tvrđenje pod C je tačno.

Pošto je oblast T ograničena ravnima $x=0$ i $x=1$, odnosno ravnima $y=0$ i $y=1$, važi da je

$$0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 1.$$

Zbog toga je $x+1 \ge 0$, te ograničenost oblasti T ravnima $z=0$ i $z=x+1$ daje da je

$$0 \le z \le x+1.$$

Dakle, tačno je tvrđenje pod D, a tvrđenje pod E je natačno.

9. B

Oblast integracije je kvadar sa stranicama paralelnim koordinatnim ravnima, a podintegralna funkcija je proizvod funkcija: $X(x)=x$, $Y(y)=6$ i $Z(z)=z^2$, tako da se može primeniti teorema 1.20, pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3\left(\int_4^7\left(\int_{-1}^1 6xz^2\,dz\right)dy\right)dx = \int_{-1}^1 z^2\,dz\cdot\int_4^7 6\,dy\cdot\int_1^3 x\,dx = \\ &= \left[\frac{z^3}{3}\right]\Big|_{-1}^1\cdot\left[6y\right]\Big|_4^7\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^3 = \frac{1}{3}(1-(-1))\cdot 6(7-4)\cdot\frac{1}{2}(9-1) = 48. \end{aligned}$$

10. A

$$\begin{aligned} I &= \int_3^4\left(\int_5^8\left(\int_{-1}^3(2x+z)\,dx\right)dy\right)dz = \int_3^4\left(\int_5^8\left[x^2+zx\right]\Big|_{-1}^3 dy\right)dz = \\ &= \int_3^4\left(\int_5^8(9+3z-(1-z))\,dy\right)dz = \int_3^4\left(\int_5^8(8+4z)\,dy\right)dz = 4\int_3^4(2+z)\left(\int_5^8 dy\right)dz = \\ &= 4\int_3^4(2+z)\left[y\right]\Big|_5^8 dz = 4\int_3^4(2+z)(8-5)\,dz = 12\int_3^4(2+z)\,dz = 12\left[2z+\frac{z^2}{2}\right]\Big|_3^4 = \\ &= 12\left(8+8-\left(6+\frac{9}{2}\right)\right) = 66 \end{aligned}$$

Test 2.2

1. A, D

Pošto su nivo linije preseci površi i ravni $z=c$, gde je c realna konstanta, tvrđenja pod A i D su tačna. Naime, nivo linije eliptičkog cilindra $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$ su elipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$, a sve nivo linije cilindrične površi $x^2+y^2=4$ su kružnice sa jednačinom $x^2+y^2=4$.

Nivo linija konusa $x^2+y^2=z^2$, na primer, za $c=0$ je koordinatni početak, a za $c=1$ je jedinična kružnica $x^2+y^2=1$, te tvrđenje pod B je netačno.

Nivo linije paraboloida $x^2+y^2=z$, na primer, za $c=1$ i $c=3$ su kružnice $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=3$, pa je i tvrđenje pod C netačno.

Parabolički cilindar $x^2=z$ ima nivo linije koje su prave $x=c$ i $x=-c$ za $c\ge 0$, tako da je tvrđenje pod E netačno.

2. C

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3\left(\int_0^1\left(\int_1^{y^3}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\right)dy\right)dz = -\int_{-3}^3\left(\int_0^1\left(\int_1^{y^3}x^{-\frac{1}{2}}\,dx\right)dy\right)dz = \\ &= -\int_{-3}^3\left(\int_0^1 2\,x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{y^3}dy\right)dz = -2\int_{-3}^3\left(\int_0^1\left(y^{\frac{3}{2}}-1\right)dy\right)dz = -2\int_{-3}^3\left[\frac{2}{5}\,y^{\frac{5}{2}}-y\right]\Big|_0^1 dz = \\ &= -2\int_{-3}^3\left(\frac{2}{5}-1\right)dz = \frac{6}{5}\int_{-3}^3 dz = \frac{6}{5}\left[z\right]\Big|_{-3}^3 = \frac{6}{5}\cdot 6 = \frac{36}{5} \end{aligned}$$

3. A

Neka je T zatvorena oblast određena ravnima $x+y=2$, $z=-2$, $x=0$, $y=0$ i $z=3$. Zapremina oblasti T je $V=\iiint\limits_T dxdydz$. Ravni $x=0$, $y=0$ i $x+y=2$ su paralelne sa z-osom (slika 3.2.6), tako da ravni $z=-2$ i $z=3$ (slika 3.2.7) definišu granice za promenljivu z, te je

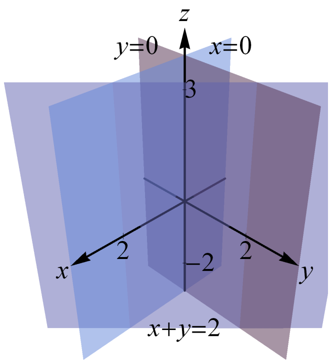
$$-2 \le z \le 3.$$

Oblast T je prikazana na slici 3.2.8. Granice za promenljive x i y se mogu odrediti na osnovu projekcije oblasti T na xOy ravan, koja je prikazana na slici 3.2.9. Integraljenjem prvo po y, a potom po x, granice su

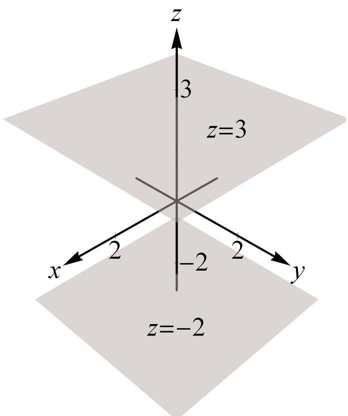
$$0 \le y \le 2-x, \;\; 0 \le x \le 2.$$

Tako je

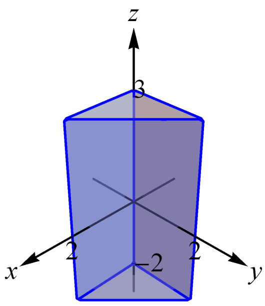
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_{-2}^{3} dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} z \Big|_{-2}^{3} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} 5\, dy \right) dx = 5 \int_0^2 y \Big|_0^{2-x} dx = \\ &= 5 \int_0^2 (2-x)\, dx = 5 \left[2x - \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_0^2 = 5\,(4-2) = 10. \end{aligned}$$



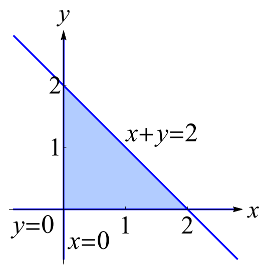
Slika 3.2.6



Slika 3.2.7



Slika 3.2.8



Slika 3.2.9

4. B, C

Na osnovu osobina trostrukog integrala, koje su navedene teoremi 1.16.

5. D, E

Primenom osobina (1.1.7) i (1.1.8) trostrukog integrala, uzimajući u obzir da je $\ln 7$ realan broj.

6. A, C

Pošto je oblast integracije skup

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le x,\; 0 \le y \le \pi,\; 1 \le x \le 2 \right\},$$

za redosled integraljenja uzimajući prvo z, potom x, pa y, dobija se integral pod A.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{x} \sin y\, dz \right) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} \sin y \left(\int_0^{x} dz \right) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} \sin y \left[z \right] \Big|_0^{x} dy \right) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} x \sin y\, dy \right) dx = \int_1^2 x \left[-\cos y \right] \Big|_0^{\pi} dx = -\int_1^2 x\, (\cos \pi - \cos 0)\, dx = \\ &= -\int_1^2 x\, (-1-1)\, dx = 2 \int_1^2 x\, dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_1^2 = x^2 \Big|_1^2 = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

7. B, D

Kako su parabolični cilindri $y = x^2$ i $x = y^2$ paralelni sa z-osom (slika 3.2.10), ravni $z = -1$ i $z = 1$ (slika 3.2.11) definišu granice za promenljivu z, pa je

$$-1 \leq z \leq 1.$$

To implicira da je tvrđenje pod E netačno. Netačno je i tvrđenje pod C jer nakon integraljenja po promenljivama x i y ne može ostati podintegralna funkcija koja zavisi od tih promenljivih.

Oblast T je prikazana na slici 3.2.12. Granice za promenljive x i y su određene projekcijom oblasti T na xOy ravan, prikazane na slici 3.2.13. Presečne tačke parabola $y = x^2$ i $x = y^2$ se dobijaju rešavanjem jednačine $x^4 - x = 0$, odnosno jednačine $x(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Realna rešenja te jednačine su $x = 0$ i $x = 1$, te su tražene tačke preseka $(0,0)$ i $(1,1)$. Integraljenjem prvo po x, a potom po y, granice su

$$y^2 \leq x \leq \sqrt{y}, \;\; 0 \leq y \leq 1.$$

Stoga je tvrđenje pod A netačno, ali i

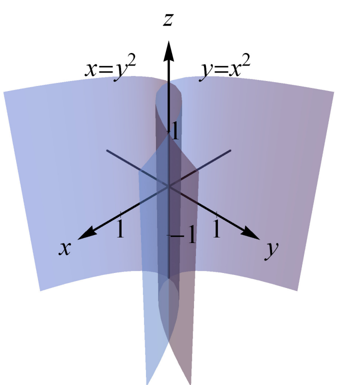
$$I = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dz \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dz \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dz \right) dx,$$

što znači da je tvrđenje pod D tačno.

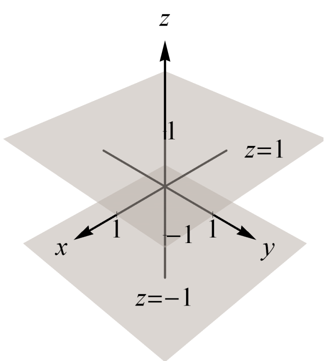
Integraljenjem prvo po y, a potom po x, granice su

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \;\; 0 \leq x \leq 1.$$

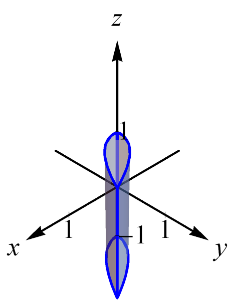
To znači da je tvrđenje pod B tačno.



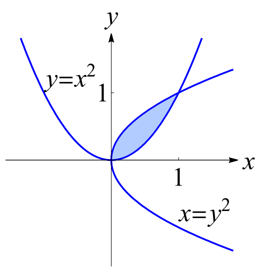
Slika 3.2.10



Slika 3.2.11



Slika 3.2.12



Slika 3.2.13

8. B, E

Uvedena smena je smena na sferne koordinate sa $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tako da je tvrđenje pod A netačno.

Jakobijan kod smene na sferne koordinate je $\rho^2 \cos\varphi$. Pošto je $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\varphi \geq 0$, pa je tvrđenje pod B tačno.

S obzirom na to da je

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\cos^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) + \rho^2\sin^2\varphi = \\ &= \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2, \end{aligned}$$

podintegralna funkcija dobijena nakon smene je $\sqrt{\rho^2}$ pomnoženo sa apsolutnom vrednošću Jakobijana, odnosno $\rho^3\cos\varphi$, te je tvrđenje pod C netačno. Pored toga, jednačina sfere daje da je $\rho^2 = 4\pi^2$, tj. $\rho = 2\pi$. To znači da je oblast integracije dobijena nakon smene određena površima:

$$\rho = 0, \;\; \rho = 2\pi, \;\; \theta = 0, \;\; \theta = 2\pi, \;\; \varphi = -\frac{\pi}{2} \;\text{ i }\; \varphi = \frac{\pi}{2},$$

te je tvrđenje pod E tačno, a samim tim je tvrđenje pod D netačno.

9. E

Zapremina lopte L je

$$V = \iiint\limits_L dxdydz, \tag{3.2.2}$$

tako da su tvrđenja pod A i C netačna. Netačno je i tvrđenje pod B jer ono predstavlja veličinu zapremine kocke $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

Uvođenjem smene na sferne koordinate u (3.2.2), nova podintegralna funkcija je $\rho^2 \cos\varphi$, pa je tvrđenje pod D netačno. Ostaje da se proveri tačnost granica pod E. Pošto je jedinična lopta sa centrom u koordinatnom početku definisana sa $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, a $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ (na osnovu prethodnog zadatka), važi da je $\rho^2 \leq 1$, odnosno $\rho \leq 1$. To znači da se smenom dobija oblast integracije određena površima:

$$\rho = 0,\ \ \rho = 1,\ \ \theta = 0,\ \ \theta = 2\pi,\ \ \varphi = -\frac{\pi}{2}\ \text{ i }\ \varphi = \frac{\pi}{2},$$

tako da je tvrđenje pod E tačno.

10. B, D

Na osnovu definicije 1.13, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenje pod B je tačno. Uzimajući u obzir i definiciju 1.14, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenja pod C i E su netačna.

Test 2.3

1. B, D

Ako se podela oblasti T obeleži sa $\mathcal{P}_n$, tada je $\lambda(\mathcal{P}_n)$ dijametar podele oblasti T, tako da je, na osnovu definicije 1.14, tačno tvrđenje pod B, dok je tvrđenje pod A netačno.

Trostruki integral funkcije f nad oblašću T je granična vrednost Rimanove integralne sume funkcije f za podelu oblasti T (definicija 1.15), te je tvrđenje pod E netačno. Po definiciji 1.13, ta Rimanova integralna suma je

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta T_i,$$

gde je ΔT_i zapremina podoblasti T_i, tako da proizvod pod sumom ne može biti zapremina, a samim tim Rimanova integralna suma nema geometrijsko značenje, što znači da i za trostruki integral važi da nema geometrijsko značenje. Dakle, tvrđenje pod C je netačno, a tvrđenje pod D je tačno.

2. A, D

Oblast integracije integrala I je skup $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 4\}$, što je kvadar, pa je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^3 \left(\int_0^4 x^3y^2z\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 x^3 \left(\int_0^3 y^2 \left(\int_0^4 z\,dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 x^3 \left(\int_0^3 y^2 \left[\frac{z^2}{2} \right] \Bigg|_0^4 dy \right) dx = \int_0^2 x^3 \left(\int_0^3 8y^2\,dy \right) dx = 8 \int_0^2 x^3 \left[\frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_0^3 dx = \\ &= 8 \int_0^2 9x^3\,dx = 8 \cdot 9 \left[\frac{x^4}{4} \right] \Bigg|_0^2 = 8 \cdot 9 \cdot 4 = 288 \end{aligned}$$

3. D, E

Na osnovu teoreme 1.16 o osobinama trostrukog integrala i primenom osobina 1.1.8 i 1.1.7.

4. B, E

Tvrđenja pod A i C su netačna jer je u njima $\sqrt{\varrho}$ izvučeno ispred integrala po ϱ.

Oblast integracije integrala I je skup $\{(\varrho,h,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \varrho \le 1,\ 0 \le h \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, te se granice integrala I mogu zapisati kao što je pod B. Pošto je oblast integracije kvadar, a podintegralna funkcija je funkcija koja zavisi samo od promenljive ϱ, može se primeniti teorema 1.20, pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_0^1 \sqrt{\varrho}\,d\varrho\right)dh\right)d\theta = \left(\int_0^1 \sqrt{\varrho}\,d\varrho\right)\left(\int_0^2 dh\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \\ &= \left(\int_0^1 \varrho^{\frac{1}{2}}\,d\varrho\right)\left(h\Big|_0^2\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = \left(\frac{\varrho^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right)\cdot 2\cdot 2\pi = \left(\frac{2}{3}\varrho^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right)\cdot 4\pi = \frac{2}{3}\cdot 4\pi = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

5. A, E

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 \varrho\,d\varrho\right)dh\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{\varrho^2}{2}\Big|_0^1 dh\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}\,dh\right)d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 dh\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h\Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\,\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Površina površi je određena dvostrukim integralom (formula (1.1.6)), tako da je tvrđenje pod D netačno.

Neka je sa T označen prav valjak visine 1 i baze poluprečnika 1. Valjak T može biti predstavljen kao oblast određena ravnima $z=0$ i $z=1$ i cilindričnom površi $x^2+y^2=1$. Zapremina valjka T je $V = \iiint\limits_T dxdydz$. Prelaskom na cilindrične koordinate $\varrho \ge 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ i $h \in \mathbb{R}$, koje su definisane sa $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ i $z = h$, Jakobijan je ϱ, a

$$x^2+y^2 = \varrho^2\cos^2\theta + \varrho^2\sin^2\theta = \varrho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = \varrho^2.$$

Stoga, površi $z=0$, $z=1$, $x^2+y^2=1$ u $\varrho\theta h$ koordinatnom sistemu postaju:

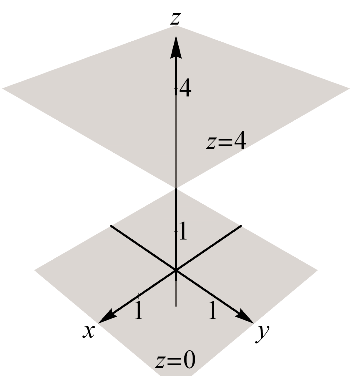
$$h=0,\ \ h=1,\ \ \varrho=1.$$

Tako je T u $\varrho\theta h$ koordinatnom sistemu kvadar $\{(\varrho,\theta,h) \in \mathbb{R} \mid 0 \le \varrho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le h \le 1\}$, pa je zapremina V upravo integral I. Dakle, tvrđenje pod E je tačno.

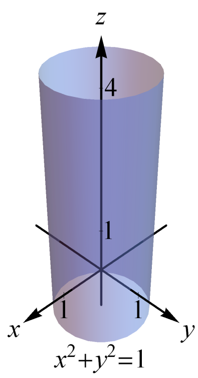
6. C, D

Telo T je odozdo i odozgo ograničeno ravnima $z=0$ i $z=4$ (slika 3.2.14), a sa strane kružnim cilindrom $x^2+y^2=1$ (slika 3.2.15), tako da je T valjak (slika 3.2.16). Dakle, tvrđenje pod C je tačno, a tvrđenja pod A i B su netačna.

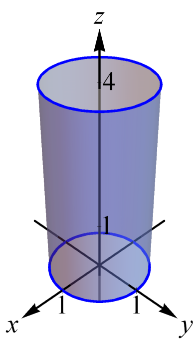
Projekcija tela T na ravan $z=0$ (slika 3.2.17) je jedinični krug $x^2+y^2 \le 1$ jer je cilindar $x^2+y^2=1$ paralelan sa z-osom, te je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.



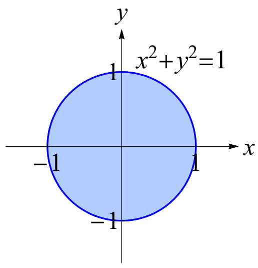
Slika 3.2.14



Slika 3.2.15



Slika 3.2.16



Slika 3.2.17

7. B, C

Telo T_1 je kvadar sa stranicama paralelnim koordinatnim osama, tako da je njegova zapremina data integralom

$$\iiint\limits_{T_1} dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 dy \right) dz \right) dx,$$

pa je tvrđenje pod A netačno.

Zapremina tela T_2 (slika 3.2.20) je data integralom $\iiint\limits_{T_2} dxdydz$. Pošto je oblast T_2 određena površima: $x = 0$, $x = 2$, $z = 0$, $z = 2 - x$, $y = 0$ i $y = x^2 + z^2 + 1$, a ravni $x = 0$, $x = 2$, $z = 0$ i $z = 2 - x$ su paralelne sa y-osom (slika 3.2.18), granice za integraljenje prvo po promenljivoj y su definisane s ravni $y = 0$ i paraboloidom $y = x^2 + z^2 + 1$ (slika 3.2.19). Granice za promenljive x i z su definisane projekcijom tela T_2 na xOz ravan, prikazane na slici 3.2.21, tako da su granice za integraljenje prvo po z, a potom po x upravo

$$0 \le z \le 2 - x, \ \ 0 \le x \le 2.$$

Znači,

$$\iiint\limits_{T_2} dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_0^{x^2+z^2+1} dy \right) dz \right) dx,$$

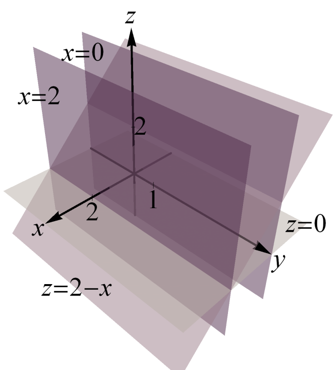
tako da je tvrđenje pod B tačno.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} y \Big|_0^{x^2+z^2+1} dz \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x^2 + z^2 + 1)\, dz \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[x^2 z + \frac{z^3}{3} + z \right] \Bigg|_0^{2-x} dx = \int_0^2 \left(x^2 \big[z \big] \Big|_0^{2-x} + \left[\frac{z^3}{3} + z \right] \Bigg|_0^{2-x} \right) dx, \end{aligned}$$

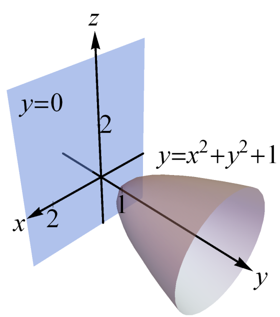
te je tvrđenje pod C tačno.

Tvrđenje pod D je netačno jer u spoljašnjim granicama integrala ne može da bude promenljiva.

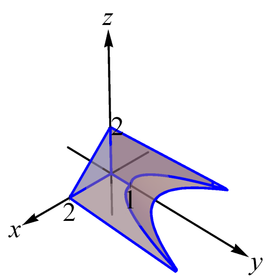
Površina površi se ne može računati trostrukim integralom, tako da je tvrđenje pod E netačno.



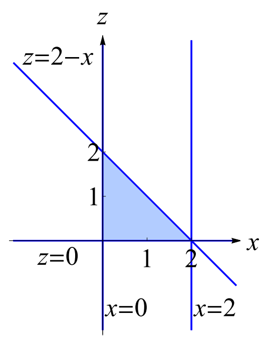
Slika 3.2.18



Slika 3.2.19



Slika 3.2.20



Slika 3.2.21

8. A, C

Neka je T dato cilindrično telo. S obzirom na to da je $x^2 + y^2 \ge 0$, telo T je odozgo ograničeno paraboloidom $z = x^2 + y^2$, a odozdo s ravni $z = 0$. Cilindrična površ $x^2 + y^2 = 1$ sa strane ograničava T, a pošto je paralelna sa z-osom, projekcija tela T na xOy ravan je oblast D. To znači da je

$$V = \iiint\limits_{T} dxdydz = \iint\limits_{D} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dxdy = \iint\limits_{D} z \Big|_0^{x^2+y^2} dxdy = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

9. A, B, E

Neka je $I = \iiint\limits_T dxdydz$. Površi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = -1$, $y = 1$ i $z = 2$ su ravni paralelne koordinatnim ravnima, tako da je oblast integracije kvadar $\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$. Stoga je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^0 dx \right) dy \right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^1 x \Big|_{-1}^0 dy \right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^1 (0 - (-1))\, dy \right) dz = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^1 dy \right) dz = \int_0^2 y \Big|_0^1 dz = \int_0^2 dz = z \Big|_0^2 = 2, \end{aligned}$$

pa su izrazi pod A i B jednaki integralu I, dok izraz pod C nije.

Pored toga,

$$I = \int_{-1}^0 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 dy \right) dz \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\int_0^2 y \Big|_0^1 dz \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\int_0^2 dz \right) dx,$$

te je izrazi pod E jednak integralu I, ali izraz pod D nije.

10. C

Nakon smene, nova podintegralna funkcija je stara podintegralna funkcija zapisana preko novih promenljivih pomnožena sa apsolutnom vrednošću Jakobijana. Jakobijan za date sferne koordinate je $J = \varrho^2 \cos\varphi$. S obzirom na to da je $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\varphi \ge 0$, pa je $|J| = \varrho^2 \cos\varphi$. Pošto je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \varrho^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta + \varrho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \varrho^2 \sin^2\varphi = \\ &= \varrho^2 \cos^2\varphi \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \varrho^2 \sin^2\varphi = \varrho^2 \cos^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\varphi = \varrho^2 \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \varrho^2, \end{aligned}$$

stara podintegralna funkcija postaje $\sqrt{\varrho^2}$, što je ϱ jer je $\varrho \ge 0$, tako da je nova podintegralna funkcija $\varrho^3 \cos\varphi$. Dakle, tačno je tvrđenje pod C, a tvrđenja pod A i B su netačna.

Jedinična lopta sa centrom u koordinatnom početku opisana sfernim koordinatama je određena površima:

$$\varrho = 0,\quad \varrho = 1,\quad \theta = 0,\quad \theta = 2\pi,\quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \ \text{ i } \ \varphi = \frac{\pi}{2},$$

pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^3 \cos\varphi \, d\varrho\, d\theta\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \varrho^3\, d\varrho = \left(\sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(\frac{\varrho^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = (1 - (-1)) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi, \end{aligned}$$

pri čemu je primenjena teorema 1.20. Znači, tvrđenja pod D i E su netačna.

Test 2.4

1. C, D

Površ je grafik funkcije koja preslikava uređen par realnih brojeva u realan broj, tako da su tvrđenja pod A i B netačna.

Kako je paraboloid $z = x^2 + y^2$ zadat funkcijom $f(x,y) = x^2 + y^2$ koja je neprekidno diferencijabilna (neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode) na $\mathbb{R}^2$, a samim tim i na datom krugu, tvrđenje pod C je tačno.

Pošto je $T \subset \mathbb{R}^3$, a pravougaonik je podskup od $\mathbb{R}^2$, tvrđenje pod E je netačno.

Skup T je ograničen, pa za njega važi da postoji pozitivna konstanta c takva da je rastojanje između proizvoljne dve tacke iz T najviše c. To implicira da postoji lopta prečnika c koja sadrži skup T. S obzirom na to da za svaku loptu postoji kocka koja je sadrži, postoji i kvadar koji je sadrži, a samim tim sadrži i skup T. Dakle, tvrđenje pod D je tačno.

2. B, C

$$\begin{aligned} I_1 &= 6\int_0^2\left(\int_0^y\left(\int_0^x z\,dz\right)dx\right)dy = 6\int_0^2\left(\int_0^y \frac{z^2}{2}\Big|_0^x dx\right)dy = 3\int_0^2\left(\int_0^y z^2\Big|_0^x dx\right)dy = \\ &= 3\int_0^2\left(\int_0^y x^2 dx\right)dy = 3\int_0^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^y dy = \int_0^2 x^3\Big|_0^y dy = \int_0^2 y^3\,dy = \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2\left(\int_0^1\left(\int_{x^2}^1\left(y^{\frac{1}{2}}+2x\right)dy\right)dx\right)dz = \int_1^2\left(\int_0^1\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2xy\right]\Big|_{x^2}^1 dx\right)dz = \\ &= \int_1^2\left(\int_0^1\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+2xy\right]\Big|_{x^2}^1 dx\right)dz = \int_1^2\left(\int_0^1\left(\frac{2}{3}+2x-\left(\frac{2}{3}\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}+2x^3\right)\right)dx\right)dz = \\ &= \int_1^2\left(\int_0^1\left(\frac{2}{3}+2x-\frac{8}{3}x^3\right)dx\right)dz = \int_1^2\left[\frac{2}{3}x+2\frac{x^2}{2}-\frac{8}{3}\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 dz = \\ &= \int_1^2\left[\frac{2}{3}x+x^2-\frac{2}{3}x^4\right]\Big|_0^1 dz = \int_1^2\left(\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}\right)dz = \int_1^2 dz = z\Big|_1^2 = 2-1 = 1, \end{aligned}$$

koristeći da je $\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}} = (|x|)^3 = x^3$ jer je $x \in [0,1]$.

3. D, E

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^0\left(\int_0^1\left(\int_{-2}^1 (x+y^2)\,dz\right)dy\right)dx = \int_{-2}^0\left(\int_0^1 (x+y^2)\left(\int_{-2}^1 dz\right)dy\right)dx = \\ &= \int_{-2}^0\left(\int_0^1 (x+y^2)\,[z]\Big|_{-2}^1 dy\right)dx = \int_{-2}^0\left(\int_0^1 (x+y^2)\,(1-(-2))\,dy\right)dx = \\ &= 3\int_{-2}^0\left(\int_0^1 (x+y^2)\,dy\right)dx = 3\int_{-2}^0\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]\Big|_0^1 dx = 3\int_{-2}^0\left(x+\frac{1}{3}\right)dx = \\ &= 3\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x\right]\Big|_{-2}^0 = -3\left(2-\frac{2}{3}\right) = -4 \end{aligned}$$

4. E

Na osnovu definicija 1.13-1.15, trostruki integral je granična vrednost Rimanove integralne sume, pa su tvrđenja pod A i C netačna. Tvrđenje pod B je netačno jer je ΔT_i zapremina od T_i, a ne površina. Dijametar podele $\mathcal{P}_n$ ne može da teži ka beskonačnosti, tako da je tvrđenje pod D netačno. Tvrđenje pod E odgovara definiciji, te je tačno.

5. C, E

Na osnovu teoreme 1.16 o osobinama trostrukog integrala i primenom osobina 1.1.8 i 1.1.7.

6. A, D

Jakobijan kod smene na cilindrične koordinate je ρ, te je tvrđenje pod C netačno. Podintegralna funkcija nakon smene je $1\cdot\rho$, tako da je tvrđenje pod B netačno. Koristeći da su cilindrične koordinate definisane sa $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ i $z = h$, te da je

$$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta = \rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = \rho^2,$$

cilindar $x^2+y^2 = 1$ postaje $\rho^2 = 1$, odnosno ravan $\rho = 1$, a ravni $z = 0$ i $z = 1$ redom postaju ravni $h = 0$ i $h = 1$. To znači da se smenom dobija oblast integracije $\left\{(\rho,\theta,h) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le h \le 1\right\}$, što je kvadar, pa je tvrđenje pod A tačno, a

$$I = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\,d\rho\right)d\theta\right)dh,$$

što je upravo tvrđenje pod D. Pošto I odgovara veličini zapremine valjka T, I je pozitivno, te integrali pod D i E ne mogu imati istu vrednost, što implicira da je tvrđenje pod E netačno.

7. B

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_2^3 (\sin x + 4y)\, dz\right) dx\right) dy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 4y)\left(\int_2^3 dz\right) dx\right) dy = \\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 4y)\, \Big[z\Big]\Big|_2^3 dx\right) dy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 4y)\,(3-2)\, dx\right) dy = \\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 4y)\, dx\right) dy = \int_0^{\pi} [-\cos x + 4yx]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^{\pi}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + 2\pi y + \cos 0\right) dy = \\
&= \int_0^{\pi} (2\pi y + 1)\, dy = \left[2\pi\frac{y^2}{2} + y\right]\Big|_0^{\pi} = [\pi y^2 + y]\Big|_0^{\pi} = \pi^3 + \pi
\end{aligned}
$$

8. B, D

Kako je $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, oblast integracije je odozdo ograničena s ravni $z = 0$, a odozgo konusom $z = \sqrt{x^2+y^2}$, tako da je 0 donja granica za promenljivu z, a $\sqrt{x^2+y^2}$ gornja granica, pri čemu se prvo integrali po z, a potom po preostalim promenljivama. Ravni $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$ i $y = 2$ sa strane ograničavaju oblast integracije, a pošto su paralelne sa z-osom, daju da je za promenljivu x donja granica -1, a gornja 1, i da je za promenljivu y donja granica -2, a gornja 2. To znači da integrali pod B i D imaju traženu oblast integracije.

Oblast integracije integrala pod A i C je kvadar, tako da to nije tražena oblast integracije.

Integral pod E nije dobro definisan jer se u granicama za promenljivu x nalazi i promenljiva x, tako da to nije traženi integral.

9. A, C

Data oblast je kvadar $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2,\ -1 \leq z \leq 3\}$. Pošto su dužine njegovih stranica 3, 1 i 4, njegova zapremina je $V = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12$, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno. Pored toga, zapremina kvadra je

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_T dxdydz = \int_{-1}^{2}\left(\int_1^2\left(\int_{-1}^3 dz\right) dy\right) dx = \\
&= \int_{-1}^{2}\left(\int_1^2 z\Big|_{-1}^3 dy\right) dx = \int_{-1}^{2}\left(\int_1^2 (3-(-1))\, dy\right) dx = \int_{-1}^{2}\left(\int_1^2 4\, dy\right) dx,
\end{aligned}
$$

pa je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod D i E netačna.

10. A

Trostruki integral s podintegralnom funkcijom identički jednakoj jedinici predstavlja zapreminu oblasti integracije posmatranog integrala, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenja pod B i D su netačna.

Pošto nije poznat znak funkcije f, ne može se utvrditi ni znak integrala I, pa su tvrđenja pod C i E netačna.

Test 2.5

1. A, E

Tvrđenje pod A je tačno jer je grafik funkcije f skup uređenih četvorki (x,y,z,w), sa osobinom da je $(x,y,z) \in T$ i $w = f(x,y,z)$, tako da nema geometrijsku interpretaciju.

Presek konusa $\sqrt{x^2+y^2} = z$ i ravni $z = -1$ je skup tačaka za koje važi da je $\sqrt{x^2+y^2} = -1$. Međutim, to je kontradikcija, tako da se posmatrane površi ne seku. Dakle, tvrđenje pod B je netačno.

Presek konusa $x^2+y^2 = z^2$ i ravni $x = 0$ je skup tačaka za koje važi da je $y^2 = z^2$, odnosno $z = -y$ ili $z = y$. Pošto te dve prave prolaze kroz koordinatni početak, seku se, pa je tvrđenje pod C netačno.

Realna funkcija tri realne promenljive preslikava uređenu trojku realnih brojeva u realan broj, te je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

2. B, D

   Na osnovu definicija 1.13 i 1.15.

3. C, E

   Tvrđenje pod C je primena osobine 1.1.8 sa $f(x,y,z) = X(x)$ i $g(x,y,z) = Y(y)$, te je tačno.

   Tvrđenje pod E je teorema 1.20, tako da je tačno.

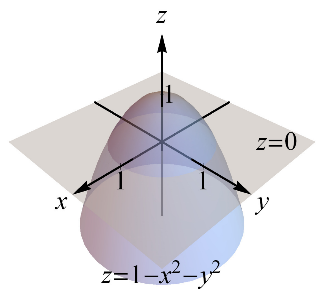
   Na osnovu osobina trostrukog integrala 1.16, tvrđenja pod A, B i D su netačna.

4. B, C

   $x^2 + y^2 \leq 1$ u ravni definiše krug, a u prostoru cilindar $x^2 + y^2 = 1$ i njegovu unutrašnjost, što nije ograničen podskup od $\mathbb{R}^3$, tako da su tvrđenja pod A i D netačna. Netačno je i tvrđenje pod E jer $1 - x^2 - y^2$ ne definiše trodimenzionalnu oblast.
   Neka je sa T označeno dato telo. Njegova zapremina je $V = \iiint\limits_T dxdydz$.

   Pošto je T odozgo ograničeno paraboloidom $z = 1 - x^2 - y^2$, a odozdo s ravni $z = 0$ (slika 3.2.22), granice za promenljivu z su definisane sa

$$0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2.$$



Slika 3.2.22

   Projekcija T na xOy ravan je krug $x^2 + y^2 \leq 1$, pa je

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dxdy.$$

   Izračunavanjem unutrašnjeg integrala,

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} z\Big|_0^{1-x^2-y^2} dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

   Dakle, tvrđenja pod B i C su tačna.

5. A, D

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 z\Big|_0^{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]\Big|_{-1}^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \left(-x^2 - \frac{1}{3} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = \\ &= \left[2\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x \right]\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} \sin y\, dz \right) dx \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} dz \right) dx \right) dy = \\ &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\Big|_0^{\cos x} dx \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \Big[\sin x \Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \\ &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy = -\cos y \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos(-\pi) \right) = -1 \end{aligned}$$

6. D, E

   Trostruki integral sa podintegralnom funkcijom identički jednakoj 1 predstavlja veličinu zapremine oblasti integracije.

7. A, C

Oblast integracije integrala pod B i E je kvadar, tako da to nisu integrali čija je oblast integracije data oblast.

Integral pod D nije dobro definisan jer se prvo integrali po promenljivoj x, a u granicama za promenljivu y se nalazi promenljiva x, pa ne može biti traženi integral.

Pošto je data oblast integracije (slika 3.2.25) odozdo ograničena s ravni $z = 0$, odozgo s ravni $z = 2$ (slika 3.2.23), a sa strane cilindrom $y = x^2$ i s ravni $y = 1$ (slika 3.2.24), granice za promenljivu z su definisane sa

$$0 \le z \le 2,$$

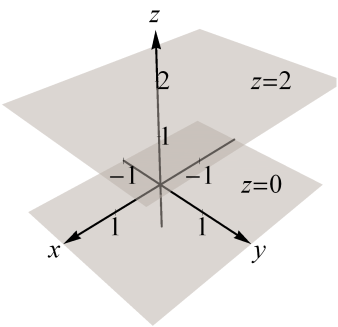
a za promenljive x i y sa projekcijom oblasti integracije na xOy ravan (slika 3.2.26). Ako se prvo integrali po x, a potom po y, tada su granice definisane krivama

$$x = -\sqrt{y} \ \text{ i } \ x = \sqrt{y} \ \text{ za } \ y \in [0,1],$$

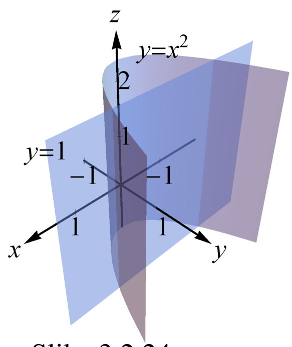
što odgovara integralu pod A. Za obrnuti redosled integraljenja, prvo po y, pa po x, granice su definisane krivama

$$y = x^2 \ \text{ i } \ y = 1 \ \text{ za } \ x \in [-1,1],$$

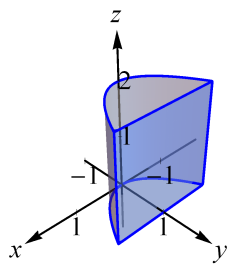
a to su granice integrala pod C.



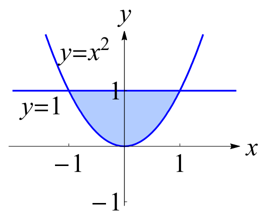
Slika 3.2.23



Slika 3.2.24



Slika 3.2.25



Slika 3.2.26

8. B, E

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{y}^{x} dz\right) dy\right) dx &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2} z\Big|_{y}^{x} dy\right) dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}(x-y)\,dy\right) dx = \int_{-1}^{1}\left[xy - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{2} dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\left(2x - 2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx = \int_{-1}^{1}\left(x - \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\right) = -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\left(\int_{1}^{2}\sqrt{y^3}\,dz\right) dx\right) dy &= \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left(\int_{-1}^{y}\left(\int_{1}^{2} dz\right) dx\right) dy = \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left(\int_{-1}^{y} z\Big|_{1}^{2} dx\right) dy = \\
&= \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left(\int_{-1}^{y}(2-1)\,dx\right) dy = \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left(\int_{-1}^{y} dx\right) dy = \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}\left[x\right]\Big|_{-1}^{y} dy = \\
&= \int_{0}^{1} y^{\frac{3}{2}}(y+1)\,dy = \int_{0}^{1}\left(y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right) dy = \left[\frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_{0}^{1} = \\
&= \left[\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{24}{35}
\end{aligned}$$

9. C, D

Tvrđenja pod A, B i E su netačna jer integrali u njima nisu dobro definisani pošto se u njima promenljiva x nalazi u granicama i nakon integraljenja po x.

Ravni $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ i $y = 2$ su paralelne sa z-osom, tako da definišu da je

$$0 \leq x \leq 1 \text{ i } 0 \leq y \leq 2,$$

pa nenegativnost promenljive x daje da je oblast T odozdo ograničena s ravni $z = 0$, a odozgo s ravni $z = x$. To daje da je

$$0 \leq z \leq x,$$

što implicira da su tvrđenja pod C i D tačna.

10. A, B

Za datu smenu Jakobijan je

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u & 0 \\ v^{-1} & -uv^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} v & u \\ v^{-1} & -uv^{-2} \end{vmatrix} = -uv^{-1} - v^{-1}u = -\frac{2u}{v},$$

te su tvrđenja pod A i B tačna, a tvrđenje pod D je netačno.

Pošto je

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

tvrđenje pod C je netačno.

Tvrđenje pod E je netačno jer se nakon smene na nove promenljive menja oblast integracije, pa oblast integracije ne može ostati oblast T.

Test 2.6

1. C, D   2. B   3. B, E   4. D   5. A, D   6. B, C   7. A   8. A, C   9. C, E   10. E

Test 2.7

1. B, C   2. B, E   3. D, E   4. A   5. A, E   6. B, C   7. A, B   8. C, E   9. D   10. C, D

Test 2.8

1. B, D   2. E   3. C, D   4. C, E   5. A   6. A, C   7. D   8. A, E   9. B, C   10. B

Test 2.9

1. A, C   2. B, C   3. D, E   4. A, D   5. A, D   6. B, E   7. C, D   8. C, E   9. A, E   10. B

Test 2.10

1. D   2. B, D   3. A, B   4. A, E   5. A, E   6. C, D   7. C, E   8. B, E   9. A, B   10. C

3.3 Brojni i funkcionalni redovi

Test 3.1

1. D, E

Tvrđenje pod A je netačno jer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$ znači da niz parcijalnih suma konvergira, pa, na osnovu definicije 1.23, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, te je tvrđenje pod B netačno.

Tvrđenje pod C je netačno jer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ znači da niz $\{S_n\}$ nema graničnu vrednost, pa, na osnovu definicije 1.23, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, a u tom slučaju nije određeno da li opšti član teži ka nuli.

Pošto nepostojanje $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ znači da niz $\{S_n\}$ nema graničnu vrednost, na osnovu definicije 1.23, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, te je tvrđenje pod D tačno.

Po tvrđenju pod E, granična vrednost niza $\{S_n\}$ je 3, što, na osnovu definicije 1.23, obezbeđuje da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 3$, pa je tvrđenje tačno.

2. A, D

Pošto je $a_n > 0$, $(-1)^n a_n$ naizmenično menja znak, te je tvrđenje pod A tačno.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada, po potrebnom uslovu za konvergenciju, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pa granična vrednost pod B daje da je

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \infty.$$

Međutim, to je kontradikcija sa uslovom $L < 1$, te je tvrđenje pod B netačno.

Granična vrednost pod C i uslov $L < 1$ daju da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}} = \frac{1}{L} > 1,$$

pa na osnovu Košijevog kriterijuma za konvergenciju (koji se može primeniti jer je $a_n > 0$) sledi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, odnosno da je tvrđenje pod C netačno.

Na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod E netačno.

3. E

Redovi pod A, B i D su brojni redovi, pa oni ne mogu biti stepeni redovi. Redovi pod C i E su funkcionalni redovi, s tim da je red pod E stepeni red sa centrom u 1 i koeficijentima $\frac{1}{n!}$.

4. A, B

Na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju, brojni redovi pod C, D i E divergiraju. Naime,

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ ne postoji}, \quad \lim_{n\to\infty} 8^n = \infty \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 2\right) = 2 \neq 0.$$

Opšti član brojnog reda pod A je $a_n = \frac{8}{n!}$. Pošto je on pozitivan, može se primeniti Dalamberov kriterijum za ispitivanje konvergencije.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{(n+1)!}}{\frac{8}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!\,(n+1)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

pa red pod A konvergira.

Opšti član brojnog reda pod B je $a_n = \frac{1}{(n!)^n}$. Kako je on pozitivan, može se primeniti Košijev kriterijum za ispitivanje konvergencije.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{(n!)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0 < 1,$$

tako da red pod B konvergira.

5. A, C

Na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma za konvergenciju, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Iz uniformne konvergencije sledi tačkasta konvergencija, tako da je tvrđenje pod C tačno.

Iz apsolutne konvergencije sledi tačkasta konvergencija, ali obrnuto ne važi, te je tvrđenje pod D netačno.

Tvrđenje pod E je netačno jer je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ brojni red.

6. B, D

Na osnovu definicije 1.33.

7. B, C

Ako je $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$, tada je

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} = \frac{2n+3}{n+3},$$

pa je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Za $a_n = \frac{n!}{2^n}$ je

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2^n \cdot 2},$$

te je tvrđenje pod C tačno.

Ako je $a_n = \frac{2n-1}{n}$, tada je

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1},$$

te su tvrđenja pod D i E netačna.

8. C

Dati red je stepeni red sa centrom u -2 i koeficijentima $c_n = \frac{n}{3}$, tako da je njegov poluprečnik

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{n}{3}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

koristeći da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Pošto je $-2-1 = -3$ i $-2+1 = -1$, na osnovu teoreme 1.45, dati stepeni red apsolutno konvergira za $x \in (-3,-1)$ i divergira za $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$. To znači da se odgovori A, D i E mogu isključiti. Iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija, tako da za $x = -2$ dati stepeni red konvergira. Za $x = -3$ se dobija brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}(-1)^n$ čiji opšti član ne teži ka nuli jer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3}(-1)^n$ ne postoji. Na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju brojnog reda sledi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}(-1)^n$ divergira, te se i odgovor B može isključiti.

9. B, E

Tvrđenje pod A je netačno jer navedeni uslovi definišu konvergenciju reda.

Tvrđenje pod C je netačno jer se Lajbnicov kriterijum može primeniti ako je dati red alternativni, odnosno važi da je $a_n a_{n+1} < 0$, $n \in \mathbb{N}$, i ako za niz $\{b_n\}$, sa $b_n = |a_n|$, važi da je nenegativan, monotono nerastući i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Zbir brojnog reda je jednak graničnoj vrednosti niza parcijalnih suma datog reda (ukoliko postoji ta granična vrednost), tako da je tvrđenje pod D netačno.

10. A, E

Dati redovi su stepeni redovi, tako da se zadatak svodi na određivanje njihovog centra x_0 i poluprečnika konvergencije R jer oni daju da na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ važi apsolutna konvergencija, a na $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$ divergencija reda. Stepeni redovi sa $R = 0$ i $R = \infty$ se mogu isključiti jer se za $R = 0$ dobija apsolutna konvergencija samo za $x = x_0$, a za $R = \infty$ apsolutna konvergencija na intervalu $(-\infty, \infty)$. Poluprečnik konvergencije se može odrediti na osnovu koeficijenata c_n formulama iz teoreme 1.46 i koristeći da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Pod A je $x_0 = 0$ i $c_n = \frac{1}{8n^3}$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{8n^3}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{8n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{8n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} 8^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1,$$

što daje interval $(-1, 1)$.

Pod B je $x_0 = -1$ i $c_n = \frac{1}{n}$, te je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

što daje interval $(-1 - 1, -1 + 1)$, odnosno $(-2, 0)$.

Pod C je $x_0 = 0$ i $c_n = n!$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.$$

Pod D je $x_0 = 1$ i $c_n = \frac{1}{n!}$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Pod E je $x_0 = 0$ i $c_n = (-1)^n$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|(-1)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

što daje interval $(-1, 1)$.

Test 3.2

1. A, D

Fiksiranjem promenljive u funkcionalnom redu dobija se brojni red, tako da je tvrđenje pod A tačno.

Alternativni red je brojni red u kojem se predznak članova naizmenično menja, pa su tvrđenja pod B i E netačna.

Koeficijenti stepenog reda su realni brojevi, a ne funkcije, te je tvrđenje pod C netačno.

Na osnovu definicije parcijalne sume reda, tvrđenje pod D je tačno.

2. B, C

Postoje divergentni brojni redovi čiji opšti članovi konvergiraju, na primer red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tako da su tvrđenja pod A i D netačna.

Na osnovu definicije 1.23, tvrđenja pod B i C su tačna.

Niz parcijalnih suma je definisan i za brojne i za funkcionalne redove, tako da je tvrđenje pod E netačno.

3. C, E

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{n^3}}{(-1)^n} \text{ ne postoji,}$$

tako da nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n^3}}{(-1)^n}$ divergira, što znači da je tvrđenje pod A netačno.

Opšti član reda pod B i C je

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^3}} = \frac{(-1)^n}{n \cdot n^{\frac{3}{2}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Pošto je $|a_n| = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergira (koristeći da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$), red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira. Iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija, tako da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenje pod B netačno.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^5}} + 23 \right) = 23 \neq 0,$$

te nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^5}} + 23 \right)$ divergira, što znači da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

4. A, B

Tvrđenje pod A je ekvivalentno potrebnom uslovu za konvergenciju brojnog reda, te je tačno.

Tvrđenje pod B je definicija apsolutne konvergencije brojnog reda, te je tačno.

Na osnovu definicije uslovne konvergencije, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, odnosno red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira. To znači da su tvrđenja pod C, D i E netačna.

5. A, E

Dati redovi su funkcionalni redovi. Primenom Vajerštrasovog kriterijuma i da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergira za } \alpha > 1,$$

dobija se da svi redovi apsolutno i uniformno konvergiraju za $x \in \mathbb{R}$. Naime, za svako $x \in \mathbb{R}$ važi:

$$\left| \left(\frac{\cos x}{n} \right)^2 \right| = \frac{\cos^2 x}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

$$\left| \left(\frac{\sin x}{n} \right)^3 \right| = \frac{|\sin^3 x|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3},$$

$$\left| \frac{\cos x}{(-n)^3} \right| = \frac{|\cos x|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3},$$

$$\left| \frac{(-1)^n \cos x}{n^4} \right| = \frac{|\cos x|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4},$$

$$\left| \left(\frac{\sin x}{n} \right)^{\frac{4}{3}} \right| = \frac{\sin^{\frac{4}{3}} x}{n^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

pri čemu je upotrebljeno da je

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ i } -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Dakle, tvrđenja pod A i E su tačna, a tvrđenja pod B, C i D netačna.

6. C, D

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n,$$

tako da je stepeni red sa centrom u tački 1 i koeficijentima $c_n=\frac{1}{2^n}$. Njegov poluprečnik je

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}2=2.$$

Pošto je $1-2=-1$ i $1+2=3$, na osnovu teoreme 1.45, dati stepeni red apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira, za $x\in(-1,3)$ i divergira za $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. To znači da se odgovori A i B mogu isključiti, a odgovori C i D su tačni. Za $x=3$ dobija se brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ čiji opšti član ne teži ka nuli, pa na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju sledi da taj brojni red divergira, te se i odgovor E može isključiti.

7. B, E

Na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma za konvergenciju funkcionalnog reda, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenja pod A i C netačna.

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ je stepeni red sa centrom u nuli i koeficijentima a_n, tako da uslov $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\infty$ daje da mu je poluprečnik konvergencije beskonačno. To znači da stepeni red konvergira za $x\in\mathbb{R}$. Dakle, tvrđenje pod E je tačno, a tvrđenje pod D netačno.

8. B, D

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ apsolutno konvergira ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergira, potrebno je ispitati konvergenciju redova:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\ \ \sum_{n=1}^{\infty}n!,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^n},\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}.$$

Po potrebnom uslovu za konvergenciju brojnog reda, opšti član reda treba da teži nuli, ali

$$\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq0,\ \ \lim_{n\to\infty}n!=\infty\neq0,\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty\neq0,$$

pa redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$ divergiraju. Dakle, redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nn$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nn!$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n}$ ne konvergiraju apsolutno, pa su tvrđenja pod A, C i E netačna.

Opšti članovi redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^n}$ su pozitivni, pa se može primeniti Košijev kriterijum za ispitivanje konvergencije. Neka je $b_n=\frac{1}{2^n}$ i $c_n=\frac{3^n}{(n!)^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{(n!)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{(n!)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n!}=0<1,$$

tako da redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^n}$ konvergiraju, pa redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n!)^n}$ apsolutno konvergiraju. Dakle, tvrđenja pod B i D su tačna.

9. A, C

Opšti član brojnog reda pod A je

$$a_n = \frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{n!}{2^n\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)} = \frac{1}{2^n} > 0,$$

pa se može primeniti Dalamberov kriterijum.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1,$$

te na osnovu Dalamberovog kriterijuma dati red konvergira, odnosno, tvrđenje pod A je tačno.

Opšti član brojnog reda pod B i C je

$$b_n = \frac{(n+1)!}{5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot n} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot (n+1) = 24(n+1),$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 24(n+1) = \infty \neq 0,$$

To znači da nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju, te brojni red divergira. Dakle, tvrđenje pod C je tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Opšti član brojnog reda pod D je

$$c_n = \frac{(n-1)^n}{5\cdot (n!)^n} \geq 0,$$

pa se može primeniti Košijev kriterijum za konvergenciju.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n-1)^n}{5\cdot (n!)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt[n]{5}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt[n]{5}\cdot (n-2)!\,(n-1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^{\frac{1}{n}}\cdot (n-2)!\,n} = 0 < 1$$

daje da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, pa je tvrđenje pod D netačno.

Opšti član brojnog reda pod E ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^n}{5} = \infty \neq 0,$$

pa brojni red divergira, odnosno, tvrđenje pod E je netačno.

10. D, E

Dati red je alternativni red, pa se Rabeov i Dalamberov kriterijum ne mogu primeniti, tako da su tvrđenja pod A, B i C netačna.

Neka je opšti član datog reda $a_n = \frac{(-1)^n}{5^n}$, a $b_n = |a_n|$. Uslovi za primenu Lajbnicovog kriterijuma su da je niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativan, monotono nerastući i da teži ka nuli. Nenegativnost je zadovoljena jer je $b_n = \frac{1}{5^n} > 0$. Pošto za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{5^n} = \frac{1-5}{5^{n+1}} = \frac{-4}{5^{n+1}} < 0,$$

$b_{n+1} < b_n$, pa je niz $\{b_n\}$ monotono opadajući, a samim tim i monotono nerastući.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0,$$

te je i poslednji uslov zadovoljen. Dakle, na osnovu Lajbnicovog kriterijuma red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, pa je tvrđenje pod D tačno.

Da bi red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergirao, potrebno je da red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira. Kako je $b_n = |a_n| = \frac{1}{5^n} > 0$, za ispitivanje konvergencije brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ može se primeniti Košijev kriterijum.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} < 1,$$

tako da red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, odnosno $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konvergira, pa je tvrđenje pod E tačno.

Test 3.3

1. B, E

   Opšti član datog brojnog reda je $(-1)^n a_n$, te je tvrđenje pod A netačno.

   U tvrđenju pod B niz $\{(-1)^n a_n\}$ divergira, što znači da opšti član datog brojnog reda ne teži ka nuli, pa nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju, odnosno dati red divergira i time je tvrđenje pod B tačno.

   Iz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ sledi da i opšti član datog brojnog reda teži ka nuli. Međutim, to je potreban uslov za konvergenciju reda, ali ne i dovoljan, tako da je tvrđenje pod C netačno.

   Uslov $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ ne daje dovoljno informacija da bi se moglo zaključiti da li dati brojni red konvergira, te je tvrđenje pod D netačno.

   Tvrđenje pod E je tačno jer uslovi da niz $\{a_n\}$ monotono opada, $a_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ obezbeđuju da su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma za konvergenciju alternativnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ i time obezbeđuju da red konvergira.

2. A, D

   Na osnovu definicije niza parcijalnih suma, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B netačno.

   Tvrđenje pod C je netačno jer uslov da opšti član brojnog reda konvergira ne daje dovoljno informacija da bi se moglo zaključiti da li dati brojni red konvergira.

   Na osnovu definicije konvergencije brojnog reda 1.23, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod E netačno.

3. C, E

   Pošto je $a_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, može se primeniti Košijev kriterijum za konvergenciju brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Po njemu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ daje da red konvergira, a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ daje da red divergira, tako da su tvrđenja pod C i E tačna.

   Kako je i $|a_n| > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, po Košijevom kriterijumu, uslov $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ daje da red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira. To implicira da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira apsolutno, pa je tvrđenje pod B netačno.

   Tvrđenja pod A i D su netačna jer uslovi navedeni u njima ne daju dovoljno informacija da bi se moglo zaključiti da li dati brojni redovi konvergiraju.

4. A, E

   Na osnovu činjenice da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergira za } \alpha > 1 \text{ i divergira za } \alpha \leq 1. \tag{3.3.3}$$

5. D, E

Redovi pod D i E divergiraju jer im opšti članovi ne zadovoljavaju potreban uslov za konvergenciju. Naime,

$$\lim_{n\to\infty} \pi^n = \infty \neq 0$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{0.2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0.2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 5^n = \infty \neq 0.$$

Opšti član reda pod B je pozitivan, pa se može primeniti Dalamberov kriterijum za konvergenciju. Neka je opšti član obeležen sa a_n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\pi^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n!\,(n+1)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n+1} = 0 < 1,$$

tako da red konvergira.

Redovi pod A i C su alternativni redovi. Njihova konvergencija se može pokazati primenom Lajbnicovog kriterijuma ili pokazivanjem da su apsolutno konvergentni. Neka je $b_n = \frac{1}{\pi^n}$. Niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nenegativan, monotono nerastući jer je

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{\pi^{n+1}}}{\frac{1}{\pi^n}} = \frac{1}{\pi} < 1$$

i

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi^n} = 0,$$

tako da su ispunjeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^n}$ konvergira.

Neka je $c_n = \left|\frac{(-1)^n n}{2^n}\right| = \frac{n}{2^n}$. Pošto je $c_n > 0$, može primeniti Košijev kriterijum za konvergenciju. Koristeći da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

te red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira.

6. B, D

Neka je a_n opši član datog reda. $(n+1)$-i član reda je

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{3(n+1) + 2023} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{3n + 2026} = \frac{n^2 + 2n}{3n + 2026} = \frac{n(n+2)}{3n + 2026},$$

te je tvrđenje pod A netačno, a tvrđenje pod B tačno. $(n-1)$-i član reda je

$$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2 - 1}{3(n-1) + 2023} = \frac{n^2 - 2n + 1 - 1}{3n + 2020} = \frac{n^2 - 2n}{3n + 2020},$$

tako da je tvrđenje pod C netačno.

Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{3n + 2023} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n - \frac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{2023}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2023}{n}} = \infty \neq 0,$$

nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju, te red divergira. Dakle, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod E netačno.

7. A

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je funkcionalni red, tako da, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, uslov $|f_n(x)| \leq c_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $x \in B \subset \mathbb{R}$ i konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ obezbeđuju da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na skupu B. Dakle, zadatak se svodi na utvrđivanje za koje c_n se dobija da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira.

Za c_n pod B, C i D važi da ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju jer

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 0,\ \ \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0,\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)!\,(n-1)n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (n-2)! \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty \neq 0,$$

tako da za njih red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ divergira.

Za utvrđivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sa c_n pod A i E se može primeniti Košijev kriterijum (jer je $c_n \geq 0$). Iz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

sledi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sa c_n pod A konvergira.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\pi} = \sqrt{2} > 1$$

implicira da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sa c_n pod E divergira.

8. B, C

Na osnovu (3.3.3), red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, pa uslov da je $a_n \geq \frac{1}{n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, na osnovu minorantnog kriterijuma, daje da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. Dakle, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenje pod B tačno.

Pošto je $\frac{1}{2023^n} > 0$ i

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2023^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2023} = \frac{1}{2023} < 1,$$

na osnovu Košijevog kriterijuma, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2023^n}$ konvergira. Stoga, uslov da je $0 < b_n \leq \frac{1}{2023^n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, na osnovu majorantnog kriterijuma, daje da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira. Znači, tvrđenje pod C je tačno, a tvrđenja pod D i E netačna.

9. B

Tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod A netačno. Pošto je centar datog stepenog reda 1 i a R pozitivan poluprečnik konvergencije, dati stepeni red apsolutno konvergira za $x \in (1-R, 1+R)$ i divergira za $x \in (-\infty, 1-R) \cup (1+R, \infty)$. To znači da su tvrđenja pod D i E netačna.

Brojni red pod C se dobija uvrštavanjem $x = R$ u dati stepeni red. Pošto se za neke pozitivne realne brojeve može dobiti da broj R pripada intervalu na kojem divergira stepeni red, odnosno da $R \in (-\infty, 1-R) \cup (1+R, \infty)$ (na primer za $R = 0.25$ važi da $0.25 \in (-\infty, 0.75) \cup (1.25, \infty)$), tvrđenje pod C je netačno.

10. C

Dati redovi su stepeni redovi, tako da se određivanjem njihovih intervala konvergencije $(x_0 - R, x_0 + R)$, gde je x_0 centar, a R poluprečnika konvergencije, dobija odgovor.

Pod A je $x_0 = 3$, koeficijenti su $c_n = 1$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

tako da je interval konvergencije $(2, 4)$.

Pod B je $x_0 = -3$, koeficijenti su $c_n = n^2$, te je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^2|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1,$$

pa je interval konvergencije $(-4, -2)$.

Pod C je $x_0 = 0$, koeficijenti su $c_n = \frac{1}{3^n}$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\frac{1}{3^n}|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3,$$

te je interval konvergencije $(-3, 3)$.

Pod D je $x_0 = 0$, koeficijenti su $c_n = 3^n$, te je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|3^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

tako da je interval konvergencije $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Pod E je $x_0 = 0$, koeficijenti su $c_n = \frac{n+2}{3n^2}$, pa je

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n+2}{3n^2}}{\frac{n+3}{3(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2}}{\frac{n+3}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)^2}{n^2(n+3)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right) n^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2 n \left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{3}{n}} = 1, \end{aligned}$$

te je interval konvergencije $(-1, 1)$.

Test 3.4

1. C, E

Redovi pod A, B i D su brojni redovi, red pod C je funkcionalni red, a red pod E je stepeni red, a samim tim i funkcionalni red.

2. A, C

Na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma za konvergenciju funkcionalnog reda, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Pošto brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potreban uslov za konvergenciju daje da a_n teži ka nuli, a to je tvrđenje pod C. Pored toga, ta osobina daje da je

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + 1) = 1 \neq 0,$$

pa nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$. Dakle, tvrđenje pod D je netačno.

Na osnovu osobina brojnih redova 1.26, konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ obezbeđuje da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ konvergira, tako da je tvrđenje pod E netačno.

3. D, E

Na osnovu definicije konvergencije brojnog reda 1.23, tvrđenja pod D i E su tačna, a uslov tvrđenja pod A daje da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, te je tvrđenje pod A netačno. Dalje, uslov tvrđenja pod C daje da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. Međutim, to ne daje informaciju o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, pa je tvrđenje pod C netačno.

Pošto brojni red čiji opšti član teži ka nuli može da divergira, a to bi značilo da divergira i niz $\{S_n\}$, tvrđenje pod B je netačno.

4. B, C

Na osnovu definicije apsolutne konvergencije brojnog reda, zadatak se svodi na utvrđivanje konvergencije redova:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2021}{n^{12}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2021}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\sqrt[2021]{n}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{n^{12}}+1\right).$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{n^{12}}+1\right)$ divergira jer je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{n^{12}}+1\right) = 1 \neq 0,$$

te ne zadovoljava poteban uslov konvergencije.

Preostali redovi se mogu napisati u obliku:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} 2021 \cdot \frac{1}{n^{12}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2021}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} 12 \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2021}}},$$

tako da na osnovu (3.3.3) i osobina brojnih redova 1.26, redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2021}{n^{12}}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2021}}$ konvergiraju, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^{\frac{1}{2021}}}$ divergiraju.

5. B, E

Dati red je stepeni red sa centrom u 0 i koeficijentima $c_n = (-2)^n$, tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno. Poluprečnik konvergencije reda je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|(-2)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

pa red apsolutno konvergira za $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i divergira za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. To znači da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenja pod C i D netačna.

6. C, D

Dati red je stepeni red sa centrom u 4 i koeficijentima $c_n = \frac{n^3}{2}$, pa je njegov poluprečnik konvergencije

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n^3}{2}}{\frac{(n+1)^3}{2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3 = 1.$$

Pošto je $4-1=3$ i $4+1=5$, red apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira, za $x \in (3,5)$ i divergira za $x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$, pa su odgovori C i D tačni, a odgovori A i B se mogu isključiti. Za $x = 5$ dobija se red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2}$ čiji opšti član ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2} = \infty \neq 0,$$

tako da se i odgovor E može isključiti.

7. A, D

Dodeljivanjem konkretne vrednosti promenljivoj u funkcionalnom redu (iz skupa za koji je definisan funkcionalni red), dobija se brojni red, tako da je tvrđenje pod E netačno.

Tvrđenje pod C je netačno jer nije definisano da li $f_n(-1)$ naizmenično menja znak za $n \in \mathbb{N}$.

Pošto $-2 \in (-\infty, 0)$, odnosno -2 pripada oblasti konvergencije funkcionalnog reda, brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(-2)$ konvergira, pa je tvrđenje pod A tačno.

1 i 2 ne pripadaju oblasti konvergencije funkcionalnog reda, tako da brojni redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(2)$ divergiraju, pa je tvrđenje pod B netačno, a tvrđenje pod D tačno.

8. A, B

Opšti član reda pod C ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju jer je

$$\lim_{n\to\infty} n! = \infty \neq 0,$$

tako da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!$ divergira.

Za preostale redove su primenljivi Dalamberov i Košijev kriterijum za ispitivanje konvergencije jer su im opšti članovi pozitivni. Neka je a_n opšti član reda pod A. Dalamberovim kriterijumom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{(n+1)!}}{\frac{3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

daje da red konvergira.

Neka je b_n opšti član reda pod B. Košijevim kriterijumom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

daje da red konvergira.

Neka je c_n opšti član reda pod D. Koristeći da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, Košijevim kriterijumom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} = 3 > 1$$

daje da red divergira.

Neka je d_n opšti član reda pod E. Dalamberovim kriterijumom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1$$

daje da red divergira.

9. B, D

Na osnovu definicije uslovne konvergencije brojnog reda, odnosno da uslovna konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ znači da red konvergira, ali ne konvergira apsolutno, odnosno da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

10. A, E

Dati redovi su stepeni redovi i za njih važi da apsolutno konvergiraju na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ i divergiraju na $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$, gde je x_0 centar reda, a R poluprečnik konvergencije. To znači da se zadatak svodi na određivanje redova za koje važi da je $x_0 - R = -1$ i $x_0 + R = 1$.

Za stepeni red pod A, $x_0 = 0$, a koeficijenti su $c_n = \frac{1}{5n^2}$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{5n^2}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{5n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} 5^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1,$$

primenivši da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Dakle, $x_0 - R = 0 - 1 = -1$ i $x_0 + R = 0 + 1 = 1$.

Za stepeni red pod B, $x_0 = 0$, a koeficijenti su $c_n = \frac{n!}{-5}$, te je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n!}{-5}}{\frac{(n+1)!}{-5}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Znači, $x_0 - R = 0$ i $x_0 + R = 0$.

Za stepeni red pod C, $x_0 = 0$, a koeficijenti su $c_n = 5^n$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|5^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Znači, $x_0 - R = -\frac{1}{5}$ i $x_0 + R = \frac{1}{5}$.

Za stepeni red pod D, $x_0 = 1$, a koeficijenti su $c_n = \frac{4}{5^n}$, te je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{4}{5^n}}{\frac{4}{5^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} 5 = 5.$$

Dakle, $x_0 - R = 1 - 5 = -4$ i $x_0 + R = 1 + 5 = 6$.

Za stepeni red pod E, $x_0 = 0$, a koeficijenti su $c_n = \sqrt[n]{5}$, pa je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\sqrt[n]{5}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^{\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Znači, $x_0 - R = -1$ i $x_0 + R = 1$.

Test 3.5

1. C, E

U tvrđenjima pod A, B i D, izrazi imaju konačan broj članova, tako da ne mogu biti brojni redovi.

2. D

Na osnovu definicije konvergencije brojnog reda 1.23, tačno je tvrđenje pod D, a ostala tvrđenja su netačna.

3. B, C

Tvrđenja pod B i C su tačna jer uslov $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -7$, kao i uslov $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, obezbeđuje da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a odatle, na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju, sledi da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tvrđenja pod A, D i E su netačna jer uslov $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, uslov $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, odnosno uslov $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne postoji, obezbeđuje da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, pa ne mora da važi da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. B

Tvrđenje pod A je netačno jer red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ divergira pošto zbog

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \neq 0$$

ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju.

Tvrđenje pod C je netačno jer red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 2010\right)$ divergira pošto zbog

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 2010\right) = -2010 \neq 0$$

ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju.

Na osnovu osobina brojnih redova 1.26, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sledi da i redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2010}{n^2}$ konvergiraju, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sledi da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ divergira. Znači, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenja pod D i E netačna.

5. D, E

Traži se red za koji su zadovoljeni uslovi za Lajbnicov kriterijum: $b_n \geq 0$ i $b_{n+1} \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, gde je b_n apsolutna vrednost opšteg člana reda.

U redu pod A, $b_n = n$, ali

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

pa nisu zadovoljeni uslovi za Lajbnicov kriterijum.

U redu pod B, $b_n = \sqrt{n}$, ali

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty,$$

pa nisu zadovoljeni uslovi za Lajbnicov kriterijum.

U redu pod C, $b_n = n^2$, ali

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

pa nisu zadovoljeni uslovi za Lajbnicov kriterijum.

U redu pod D, $b_n = \frac{3}{n^2}$, pa je $b_n \geq 0$. Pošto za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je

$$b_{n+1} - b_n = \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2} = \frac{3n^2 - 3(n+1)^2}{(n+1)^2 n^2} = \frac{3\left(n^2 - (n^2 + 2n + 1)\right)}{(n+1)^2 n^2} = \frac{-3\,(2n+1)}{(n+1)^2 n^2} < 0,$$

važi i da je $b_{n+1} \leq b_n$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0,$$

tako da su zadovoljeni uslovi za Lajbnicov kriterijum.

U redu pod E, $b_n = \frac{2}{n}$, pa je $b_n \geq 0$. Pošto za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{(n+1)n} = \frac{-2}{(n+1)n} < 0,$$

važi i da je $b_{n+1} \leq b_n$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

tako da su zadovoljeni uslovi za Lajbnicov kriterijum.

6. C

Dati red je stepeni red sa centrom u -2 i koeficijentima $c_n = -1$, pa je njegov poluprečnik konvergencije

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1}{-1} \right| = 1.$$

Kako je $-2-1=-3$ i $-2+1=-1$, dati red apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira, za $x \in (-3,-1)$ i divergira za $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$. Znači, odgovor C je tačan, a odgovori A, D i E se mogu isključiti. Za $x = -3$ dobija se red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ koji ne zadovoljava potreban uslov za konvergenciju pošto $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ ne postoji. Dakle, i odgovor B se može isključiti.

7. A, D

Dati red je funkcionalni red, a brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konvergira (na osnovu (3.3.3)), pa je na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma tvrđenje pod A tačno.

Brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (na osnovu (3.3.3)), tako da se ne može primeniti Vajerštrasov kriterijum s majorizacijom $\left|\frac{\sin x}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n}$, te je tvrđenje pod B netačno.

Tvrđenje pod C je netačno jer dati red apsolutno konvergira ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{n^4}\right|$ konvergira nad $\mathbb{R}$.

Uvrštavanjem $x = 3$ u dati funkcionalni red, dobija se brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3}{n^4}$. $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin 3}{k^4} \right\}$ je niz parcijalnih suma, a $\left\{ \frac{\sin 3}{k^4} \right\}$ niz opštih članova tog brojnog reda. Pošto konvergencija niza parcijalnih suma daje konvergenciju reda, tvrđenje pod D je tačno. Konvergencija niza $\left\{ \frac{\sin 3}{k^4} \right\}$ ne obezbeđuje konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3}{k^4}$, tako da je tvrđenje pod E netačno.

8. B, E

Dati red je brojni red sa opštim članom $a_n = \frac{1}{2n+5} > 0$, tako da su primenljivi Dalamberov, Košijev i Rabeov kriterijum za konvergenciju.

Po Dalamberovom kriterijumu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+7}}{\frac{1}{2n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{2n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n\left(2+\frac{7}{n}\right)} = 1,$$

pa kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji datog reda. Znači, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Po Košijevom kriterijumu, koristeći da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\left(2+\frac{5}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1,$$

te kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji datog reda. Dakle, tvrđenje pod C je netačno.

Po Rabeovom kriterijumu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+7}{2n+5} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{2n+7-2n-5}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{2}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{5}{n}} = 1,$$

pa kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji datog reda. Znači, tvrđenje pod E je tačno, a tvrđenje pod D netačno.

9. A, E

Dati red je brojni red sa opštim članom $a_n = 8^n > 0$, tako da su primenljivi Dalamberov, Košijev i Rabeov kriterijum za konvergenciju, ali Lajbnicov kriterijum nije.

Po Rabeovom kriterijumu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{8^n}{8^{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{7}{8}\right) = -\infty < 1,$$

pa red divergira.

Po Dalamberovom kriterijumu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}}{8^n} = 8 > 1,$$

te red divergira.

Po Košijevom kriterijumu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n} = 8 > 1,$$

pa red divergira.

10. A

Dati red je funkcionalni red sa opštim članom $f_n(x) = \frac{-1}{n(n+x)}$. Pošto $x \in [0,\infty)$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n(n+x)}$. Brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, a brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (na osnovu (3.3.3)). To znači da se Vajerštrasov kriterijum može primeniti sa majorizacijom $\frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n^2}$, ali ne može sa majorizacijom $\frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n}$, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenja pod B i C su netačna.

Uslov da opšti član funkcionalnog reda teži ka nuli ne daje informaciju o konvergenciji ili divergenciji tog reda, tako da je tvrđenje pod D netačno.

Na osnovu tvrđenja pod A dati red apsolutno konvergira na intervalu $[0,\infty)$, a pošto iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija, tvrđenje pod E je netačno.

Test 3.6

1. D 2. A, E 3. A, C 4. A, E 5. B, E 6. C, E 7. B, C 8. A, D 9. C, D 10. B

Test 3.7

1. D, E 2. B, D 3. B, E 4. B, E 5. C, D 6. B, C 7. A, D 8. A, C 9. C, E 10. A

Test 3.8

1. D, E 2. B, D 3. B, C 4. C, D 5. A, E 6. C 7. A, C 8. B 9. A, D 10. B, E

Test 3.9

1. B, E 2. A, D 3. A, E 4. C, D 5. A, E 6. B, D 7. D, E 8. B, C 9. C 10. A, B

Test 3.10

1. A, E 2. B, D 3. A, C 4. C, D 5. B, E 6. A 7. D, E 8. C, E 9. B, C 10. B, D

3.4 Furijeovi redovi

Test 4.1

1. E

Tvrđenja pod A i B su netačna na osnovu definicije ortogonalnog niza funkcija, definicije 1.48.

Nizovi funkcija pod C i D nisu ortogonalni na $[0, 2\pi]$ jer, na primer, za prve dve funkcije nizova važi da je

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cdot 2\cos x\, dx = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx > 0 \;\text{ i }\; \int_0^{2\pi} \sin x \cdot 2\sin x\, dx = 2\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx > 0,$$

na osnovu teoreme 1.52 (podintegralne funkcije su neprekidne i nenegativne i, na primer, $\cos^2 \pi = 1 > 0$, odnosno $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 > 0$).

Tvrđenje pod E je tačno jer je dati niz podniz ortogonalnog niza funkcija (1.3.12) za $a = 0$.

2. C, D

Na osnovu ortogonalnosti niza funkcija $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$ na proizvoljnom intervalu dužine 2π, vrednost integrala pod C je nula.

Integrali pod B i E su različiti od nule pošto je niz funkcija $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ ortonormiran na proizvoljnom intervalu dužine 2π, a samim tim je ortonormiran na intervalima $[\pi, 3\pi]$ i $[2\pi, 4\pi]$, pa je

$$\int_\pi^{3\pi} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1 \;\text{ i }\; \int_{2\pi}^{4\pi} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1,$$

a to implicira da je

$$\int_\pi^{3\pi} \cos^2 x\, dx = \pi \;\text{ i }\; \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^2 x\, dx = \pi.$$

Za integral pod A,

$$\int_{-\pi}^{0} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_{-\pi}^{0} = -\left(\cos 0 - \cos(-\pi)\right) = -(1+1) = -2.$$

U integralu pod D, smenom $t = 2x$, odnosno $dt = 2\,dx$,

$$\int_0^{\pi} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0.$$

3. D, E

Tačna su tvrđenja pod D i E.

$$\cos(-n\pi) = (-1)^{-n} = (-1)^n, \;\text{ ali }\; -\cos(n\pi) = -(-1)^n,$$

pa je tvrđenje pod A netačno.

Pošto je, na primer, $\sin \frac{1\cdot\pi}{2} = 1$, tvrđenje pod B je netačno.

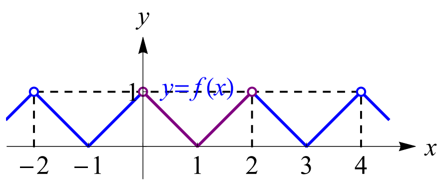
Tvrđenje pod C je netačno jer je, na primer, $\cos \frac{1\cdot\pi}{2} = 0$.

4. A, D

Funkcija f je data intervalom $(0, 2)$. Pošto je periodična s osnovnim periodom 2, definisana je na skupu $\ldots \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4) \cup \ldots$, tako da su tvrđenja pod C i E netačna.

$$f(-1) = f(-1+2) = f(1) = 0,$$

te je tvrđenje pod D tačno.



Slika 3.4.1

Grafik funkcije f je prikazan na slici 3.4.1. Pošto je simetričan u odnosu na y-osu, funkcija f je parna, pa je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno.

5. B, C

U pitanju su integrali sa simetričnom oblašću integracije, pa se može iskoristiti činjenica da je integal neparne funkcije na simetričnom integralu jednak nuli (teorema 1.50). Podintegralne funkcije integrala pod B i C su neparne jer su proizvod parnog polinoma i sinusne funkcije koja je neparna. Podintegralna funkcija integrala pod A je parna jer je proizvod dve neparne funkcije (sinusne funkcije) i jedne parne funkcije (kosinusne funkcije). Podintegralna funkcija integrala pod D nije ni parna ni neparna jer funkcija $f(x) = x + 1$ nije ni parna ni neparna. Podintegralna funkcija integrala pod E je parna jer je proizvod parnog polinoma i kosinusne funkcije koja je parna.

Na osnovu teoreme 1.52, integral pod A je pozitivan jer mu je podintegralna funkcija neprekidna i nenegativna $\big(\sin^2 x \geq 0$ i $\cos x > 0$ za $x \in [-1,1]\big)$, ali je

$$\sin^2 \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

$$\int_{-3}^{3} (x+1) \sin x \, dx = \int_{-3}^{3} x \sin x \, dx + \int_{-3}^{3} \sin x \, dx = \int_{-3}^{3} x \sin x \, dx > 0$$

jer je podintegralna funkcija neprekidna, nenegativna $\big(x < 0$ i $\sin x < 0$ za $x \in [-3,0)$ i $x > 0$ i $\sin x > 0$ za $x \in (0,3]\big)$ i, na primer,

$$\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Pošto za $x \in [-1,1]$ važi da je $(x^2+1)\cos x \geq \cos 1$ $\big($jer je $x^2 + 1 \geq 1$ i $\cos x \geq \cos 1$ na posmatranom intervalu$\big)$,

$$\int_{-1}^{1} (x^2+1) \cos x \, dx \geq \int_{-1}^{1} \cos 1 \, dx = \cos 1 \cdot [x]\Big|_{-1}^{1} = 2\cos 1 > 0.$$

6. C

Funkcija f je definisana na skupu $\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right)$, pa je njen Furijeov red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\right).$$

To znači da su tvrđenja pod A, D i E netačna.

Pošto je $f(-x) = f(x)$, funkcija f je parna, te se razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija red kosinusa (na osnovu teoreme 1.56), pa je tvrđenje pod B netačno.

Parnost funkcije f daje i da je

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x) \, dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx = 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = 1,$$

a za $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi} \int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \cos t \, dt = \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin t \Big|_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} = \frac{2}{n\pi} \left(\sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{2}\right) = -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

pri čemu je primenjena smena $t = n\pi x$, odnosno $dt = n\pi \, dx$. Znači, tvrđenje pod C je tačno.

7. A, B

Funkcija f_1 je neparna, a funkcije f_3, f_4 i f_5 su parne, tako da, na osnovu teoreme 1.56, razvijanjem funkcije f_1 u Furijeov red dobija se red sinusa, a razvijanjem funkcija f_3, f_4 i f_5 red kosinusa. Funkcija f_2 se može proširiti u neparnu funkciju definisanu na intervalu $(-2,2)$, a razvijanjem te proširene funkcije u Furijeov red dobija se red sinusa.

8. B, E

Pošto je u pitanju interval dužine 3π, Furijeov red je

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2nx}{3}+b_n\sin\frac{2nx}{3}\right)$$

s koeficijentima

$$a_0=\frac{2}{3\pi}\int_{\pi}^{4\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{3\pi}\int_{\pi}^{4\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{3\pi}\left[-\cos x\right]\Big|_{\pi}^{4\pi}=-\frac{2}{3\pi}\left(\cos 4\pi-\cos\pi\right)=-\frac{4}{3\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{3\pi}\int_{\pi}^{4\pi}f(x)\cos\frac{2nx}{3}\,dx\ \text{ i }\ b_n=\frac{2}{3\pi}\int_{\pi}^{4\pi}f(x)\sin\frac{2nx}{3}\,dx.$$

Znači, tačna su tvrđenja pod B i E, a ostala su netačna.

9. A

U pitanju je interval dužine π, tako da se razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx\right)$$

s koeficijentima

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx\ \text{ i }\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

To znači da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenja pod B i C netačna.

Primenivši smenu $t=2nx$, odnosno $dt=2n\,dx$,

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\cos 2nx\,dx+\int_1^{\pi}2\cos 2nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2n}\cos t\,\frac{dt}{2n}+2\int_{2n}^{2n\pi}\cos t\,\frac{dt}{2n}\right)=\\
&=\frac{1}{n\pi}\left(\int_0^{2n}\cos t\,dt+2\int_{2n}^{2n\pi}\cos t\,dt\right)=\frac{1}{n\pi}\left(\Big[\sin t\Big]\Big|_0^{2n}+2\Big[\sin t\Big]\Big|_{2n}^{2n\pi}\right)=\\
&=\frac{1}{n\pi}\left(\sin 2n-\sin 0+2\left(\sin 2n\pi-\sin 2n\right)\right)=-\frac{\sin 2n}{n\pi},
\end{aligned}$$

tako da se razvijanjem funkcije f u Furijeov red ne može dobiti red sinusa, pa je tvrđenje pod D netačno.

Pošto je

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\sin 2nx\,dx+\int_1^{\pi}2\sin 2nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2n}\sin t\,\frac{dt}{2n}+2\int_{2n}^{2n\pi}\sin t\,\frac{dt}{2n}\right)=\\
&=\frac{1}{n\pi}\left(\int_0^{2n}\sin t\,dt+2\int_{2n}^{2n\pi}\sin t\,dt\right)=\frac{1}{n\pi}\left(\Big[-\cos t\Big]\Big|_0^{2n}+2\Big[-\cos t\Big]\Big|_{2n}^{2n\pi}\right)=\\
&=-\frac{1}{n\pi}\left(\cos 2n-\cos 0+2\left(\cos 2n\pi-\cos 2n\right)\right)=-\frac{1}{n\pi}\left(-\cos 2n-1+2(-1)^{2n}\right)=\frac{\cos 2n-1}{n\pi},
\end{aligned}$$

razvijanjem funkcije f u Furijeov red se ne može dobiti ni red kosinusa, te je tvrđenje pod E netačno.

10. B, D

U pitanju je interval dužine 4, tako da je tačno tvrđenje pod B, a tvrđenja pod A i C su netačna.

Funkcija f je neparna, pa je, na osnovu teoreme 1.56, tvrđenje pod D tačno i tvrđenje pod E netačno.

Test 4.2

1. B, D

Na osnovu ortogonalnosti niza funkcija $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$ na proizvoljnom intervalu dužine 2π, tvrđenje pod E je netačno.

Tvrđenja pod A i C su netačna, a tvrđenje pod B tačno jer primenom smene $t = 3x$, gde je $dt = 3\,dx$,

$$\int \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C,\ C \in \mathbb{R},$$

pa je

$$\int_0^{\pi} \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(\cos 3\pi - \cos 0) = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$$

i

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{3}(\cos 2\pi - \cos 0) = -\frac{1}{3}(1-1) = 0.$$

Primenivši istu smenu,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0,$$

te je tvrđenje pod D tačno.

2. C, E

Pošto je oblast integracije datih integrala simetričan interval, a podintegralne funkcije su neprekidne, neparnost podintegralne funkcije obezbeđuje da je vrednost integrala nula (na osnovu teoreme 1.50). Stoga se za integral pod E može iskoristiti da je funkcija $f(x) = \sin 3x$ neparna, a funkcija $f_1(x) = x^{2018} + 1$ parna, pa je proizvod te dve funkcije neparna funkcija, odnosno, tvrđenje pod E je tačno.

Za integral pod C važi da je

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\cos 3x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos 3x\,dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx,$$

pa je integral u prvom sabirku jednak nuli pošto je podintegralna funkcija neparna (funkcija $g(x) = x$ je neparna, a funkcija $h(x) = \cos 3x$ parna). Integral u drugom sabirku je takođe nula. Naime,

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin \pi - \sin(-\pi)) = 0,$$

pri čemu je upotrebljena smena $t = 3x$, gde je $dt = 3\,dx$. Dakle, tvrđenje pod C je tačno.

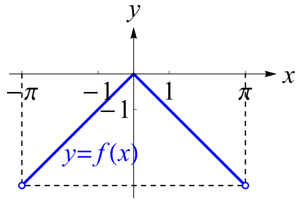
Funkcija $f(x) = \sin 3x$ je pozitivna za $x \in (0, \frac{\pi}{3}]$ i negativna za $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0)$, pa su podintegralne funkcije integrala pod A i D pozitivne za svako $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}]$. Stoga, na osnovu teoreme 1.52, važi da su i integrali pod A i D pozitivni, pa su tvrđenja pod A i D netačna.

Na osnovu teoreme 1.52 je i tvrđenje pod B netačno jer je $x^2 \geq 0$ i $\cos 3x + 2 \geq 1 > 0$, a, na primer za $x = 1$ je podintegralna funkcija pozitivna.

3. E

Na osnovu grafika funkcije f, prikazanog na slici 3.4.2, funkcija f je parna, pa se njenim razvijanjem u Furijeov red dobija red kosinusa (teorema 1.56), što znači da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Pošto je funkcija f data intervalom $(-\pi, \pi)$, Furijeovi koeficijenti su



Slika 3.4.2

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx - \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx - \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right),$$

tako da su tvrđenja pod A, C i D netačna.

4. A, C

   Funkcija f nema tačke prekida u intervalu $(0,\pi)$, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno.

   Za svako $x_0 \in (0,\pi)$ se može povući tangenta na grafik funkcije f u tački $T\left(x_0, f(x_0)\right)$, osim za $x_0 = 1$, tako da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod D i E netačna.

5. A, D

   Kosinusna funkcija i funkcija $g(x) = x^{2022}$ su parne funkcije, a sinusna funkcija i funkcija $h(x) = x^{2023}$ su neparne. Pošto je proizvod neparne i parne funkcije neparna funkcija, funkcije f_1 i f_4 su neparne. Proizvod dve neparne funkcije, kao i proizvod dve parne funkcije, je parna funkcija, tako da su funkcije f_2 i f_3 parne. Funkcija f_5 nije ni parna ni neparna.

6. B, C

   Tvrđenja pod B i C su tačna.

   Tvrđenje pod A je netačno jer je, na primer, $\sin\pi = 0 \neq (-1)^1$.

   Kako je, na primer, $\cos\pi = 1 \neq 0$, tvrđenje pod D je netačno.

   Po tvrđenju pod E, za $n = 1$ se dobija da je $\cos\frac{\pi}{2} = -1$, što je kontradikcija, tako da je i tvrđenje pod E netačno.

7. B, E

   Na osnovu teoreme 1.56, razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija se red sinusa, a razvijanjem funkcije g red kosinusa, tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenja pod A i C netačna. Funkcija $f \cdot g$ je neparna, te se njenim razvijanjem u Furijeov red dobija red sinusa, što znači da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

8. A

   Pošto se funkcija f razvija u Furijeov red na intervalu $(0,\pi]$, $l = \frac{\pi}{2}$ i $a = 0$ u trigonometrijskom redu 1.3.14 i koeficijentima 1.3.15, 1.3.16 i 1.3.17, pa je tvrđenje pod A tačno, a ostala tvrđenja su netačna.

9. C, D

   Funkcija f nije ni parna ni neparna jer nije definisana na simetričnom intervalu, tako da su tvrđenja pod A i B netačna.

   Tvrđenja pod C i D su tačna na osnovu teoreme 1.56.

   Funkcija $|f(x)|$ (čiji je grafik prikazan na slici 2.4.1) je po delovima neprekidno diferencijabilna na intervalu $[0,\pi]$ jer je neprekidno diferencijabilna na intervalima $(0,1)$ i $(1,\pi)$. Pored toga, funkcija $|f(x)|$ se može proširiti u periodičnu funkciju sa periodom π, tako da se, na osnovu teoreme 1.55, funkcija $|f(x)|$ može razviti u Furijeov red, pa je tvrđenje pod E netačno.

10. A, D

    Podintegralna funkcija integrala pod A je neprekidna i neparna jer je proizvod parne funkcije $f_1(x) = \left|x^{2023}\right|$ i neparne funkcije $f_2(x) = \sin(2022x)$, pa je, na osnovu teoreme 1.50, tvrđenje pod A tačno.

    Pošto je podintegralna funkcija integrala pod B neprekidna i nenegativna (jer je $\sin x \geq 0$ za $x \in [0,\pi]$ i $\sin x \leq 0$ za $x \in [-\pi, 0]$), a, na primer, za $x = 1$ je pozitivna ($\sin 1 > 0$), teorema 1.52 daje da je i vrednost integrala pozitivna. Dakle, tvrđenje pod B je netačno.

    Analogno, podintegralna funkcija integrala pod C je neprekidna i nenegativna, ali pozitivna za $x = 1$, tako da je i tvrđenje pod C netačno.

    Parcijalnom integracijom sa
    $$u = x,\ \ dv = \cos x\,dx,$$
    $$du = dx,\ \ v = \int \cos x\,dx = \sin x,$$
    dobija se da je
    $$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Stoga,

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]\Big|_0^{\pi} = \pi\sin\pi + \cos\pi - \cos 0 = -2,$$

a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1,$$

pa je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

Test 4.3

1. B, E

   Na osnovu definicije 1.48, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenje pod B tačno.

   Pošto je, na primer,

   $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\cdot 2\cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\ dx = \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \neq 0$$

   i

   $$\int_0^{2\pi} \cos x\cdot 2\cos x\,dx = \int_0^{2\pi} (1+\cos 2x)\ dx = \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0,$$

   tvrđenja pod C i D su netačna.

   Niz funkcija pod E je podniz ortogonalnog niza funkcija 1.3.12, tako da je tvrđenje pod E tačno.

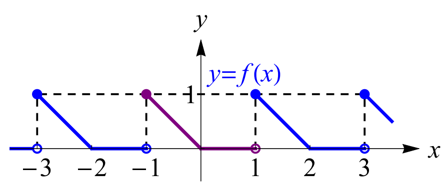
2. A, E

   Pošto je kosinusna funkcija parna i $\cos(n\pi) = (-1)^n$ za svaki prirodan broj n, tvrđenja pod A i E su tačna, a tvrđenja pod B i D netačna.

   Tvrđenje pod C je netačno jer se, na primer, za $n = 2$ dobija da je $-1 = 0$, što je kontradikcija.

3. D, E

   Funkcija f je data intervalom $[-1,1)$. Pošto je periodična s osnovnim periodom 2, definisana je na skupu $\mathbb{R}$, tako da je tvrđenje pod C netačno. Grafik funkcije f, koji je prikazan na slici 3.4.3, nije simetričan u odnosu na y-osu, niti je osno simetričan u odnosu na koordinatni početak. To znači da su tvrđenja pod A i B netačna.

   Slika 3.4.3

   $$f(1) = f(-1+2) = f(-1) = 1 \ \text{ i } \ f(2) = f(2-2) = f(0) = 0,$$

   te su tvrđenja pod D i E tačna.

4. B, C

   Pošto je $e^{6x} > 0$ i $\cos x > 0$ za svako $x \in [-1,1]$, i integral pod A je pozitivan, tako da je tvrđenje pod A netačno.

   Koristeći da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu jednak nuli, tvrđenja pod B i C su tačna. Naime, funcija $f(x) = x^{15}$ i sinusna funkcija su neparne, a kosinusna funkcija i funcija $f(x) = x^4 + 1$ parne.

   Podintegralna funkcija integrala pod D je neprekidna i nenegativna (jer je $\sin x \geq 0$ za $x \in [0,\pi]$ i $\sin x \leq 0$ za $x \in [-\pi, 0]$), a, na primer, za $x = 1$ je pozitivna ($\sin 1 > 0$). Na osnovu teoreme 1.52, i vrednost integrala pod D je pozitivna, tako da je tvrđenje pod D netačno.

   Pošto je $x^2 - 1 \leq 0$ i $\cos x > 0$ za svako $x \in [-1,1]$, podintegralna funkcija integrala pod E je neprekidna i nepozitivna. Na primer, za $x = 0$, ta podintegralna funkcija je $-\cos 0 = -1 < 0$, tako da teorema 1.52 implicira da je i integral pod E negativan, odnosno da je tvrđenje pod E netačno.

5. A, D

Ortonormiranost niza funkcija 1.3.13 na intervalu dužine 2π implicira da je

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\pi}\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1 \;\text{ i }\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\pi}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1,$$

tako da su tvrđenja pod A i D tačna.

Ortogonalnost niza funkcija 1.3.12 na intervalu dužine 2π daje da je

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sin x \cos 2x\,dx = 0,$$

te je tvrđenje pod C netačno.

Smenom $t = \sin x$, gde je $dt = \cos x\,dx$,

$$\int_{-\pi}^{0} \sin x \cos x\,dx = \int_0^0 t\,dt = 0,$$

te je tvrđenje pod B netačno.

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0,$$

pa je tvrđenje pod E netačno.

6. A

Funkcija f je neparna, tako da se njenim razvijanjem u Furijeov red dobija red sinusa (teorema 1.56), pa su tvrđenja pod C i E netačna.

U pitanju je razvijanje u Furijeov red na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, te je $l = \frac{1}{2}$ u trigonometrijskom redu 1.3.14. To implicira da su tvrđenja pod B i D netačna.

Tvrđenje pod A je tačno jer je Furijeov koeficijent

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin t\,dt = \frac{2}{n\pi}\Big[-\cos t\Big]\Big|_0^{n\pi} = \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(-\cos n\pi + \cos 0\right) = \frac{2}{n\pi}\left(-(-1)^n + 1\right), \end{aligned}$$

primenivši parnost podintegralne funkcije i smenu $t = 2n\pi x$.

7. B, D

Osnovni period funkcije f je 4, tako da je $l = 2$ u trigonometrijskom redu 1.3.14, pa su tvrđenja pod A i C netačna, a tvrđenje pod B tačno. Furijeovi koeficijenti su:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_2^6 x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big|_2^6 = 8$$

i, za $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \;\text{ i }\; b_n = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx,$$

te je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

8. B, C, D

Na osnovu teoreme 1.56, Furijeov red funkcije f_3 je red kosinusa, a funkcija f_1 i f_5 red sinusa. Funkcije f_2 i f_4 se mogu proširiti u parnu funkciju, pa samim tim i razviti u red kosinusa.

9. C, E

U pitanju je interval dužine 2, tako da je tačno tvrđenje pod C, a tvrđenja pod A i B su netačna.

Funkcija f je parna, pa je, na osnovu teoreme 1.56, tvrđenje pod D netačno i tvrđenje pod E tačno.

10. C

Osnovni period funkcije f je 2π, tako da je $l = \pi$ u trigonometrijskom redu 1.3.14, a Furijeovi koeficijenti su:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \;\text{ i }\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Test 4.4

1. B, E

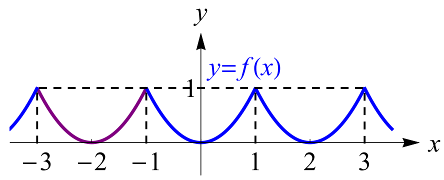
Kosinusna funkcija je parna, tako da je i funkcija f_1 parna.

Pošto je i stepena funkcija sa parnim izložiocem parna funkcija, a sinusna funkcija i stepena funkcija sa neparnim izložiocem su neparne funkcije, osobine da je proizvod parne i neparne funkcije neparna funkcija i proizvod dve parne ili dve neparne funkcije je parna funkcija daju da su funkcije f_2 i f_5 neparne, a funkcija f_4 parna.

Domen funkcije f_3 nije simetričan interval, tako da funkcija f_3 nije ni parna ni neparna.

2. A, E

Funkcija f je data intervalom $[-3,-1]$. Pošto je periodična s osnovnim periodom 2, definisana je na skupu $\mathbb{R}$, tako da je tvrđenje pod C netačno. Grafik funkcije f, koji je prikazan na slici 3.4.4, je simetričan u odnosu na y-osu, te je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno. tvrđenje pod D je netačno, a tvrđenje pod E tačno jer je



Slika 3.4.4

$$f(0) = f(0-2) = f(-2) = 0, \;\; f(-3) = 1 \;\text{ i }\; f(-1) = 1.$$

3. A, C

Za integrale pod A i C važi da im je oblast integracije simetričan interval, a podintegralna funkcija neprekidna i neparna funkcija (jer je proizvod parne i neparne funkcije), tako da je, na osnovu teoreme 1.50, njihova vrednost jednaka nuli.

Podintegralna funkcija integrala pod B je neprekidna i nepozitivna jer za $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ važi da je $x - 5 < 0$ i $\frac{x}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pa je $\cos\frac{x}{3} \geq 0$. S obzirom na to da je, na primer, vrednost podintegralne funkcije u nuli negativna ($-5\cos 0 = -5 < 0$), teorema 1.52 implicira da je i vrednost integrala pod B negativna.

Pošto je eksponencijalna funkcija monotono rastuća, za svako $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ važi da je $e^{2x} \geq e^{-\frac{2\pi}{3}}$, pa je

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{2x}\,dx \geq \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{-\frac{2\pi}{3}}\,dx = e^{-\frac{2\pi}{3}}\left[x\right]\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}e^{-\frac{2\pi}{3}} > 0.$$

Sledi da $\cos 3 \approx -0.98999$ daje da je vrednost integrala pod D negativna.

Kako je $x^2 \geq 0$ i $\cos 5x + 1 \geq 0$ za $x \in \left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, a, na primer, $1^2 \cdot (\cos(5\cdot 1) + 1) \approx 1.28366 > 0$ vrednost integrala pod E je pozitivna (na osnovu teoreme 1.52).

4. B, D

Data funkcija je po delovima neprekidno diferencijabilna na intervalu $(0,\pi)$ i može se proširiti u periodičnu funkciju s osnovnim periodom $\frac{\pi}{2}$, tako da se, na osnovu teoreme 1.55, može razviti u Furijeov red. Znači, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Data funkcija se može proširiti u parnu, odnosno neparnu funkciju na intervalu $(-\pi,\pi)$, a samim tim se može razviti u red kosinusa, odnosno red sinusa (na osnovu teoreme 1.56). Dakle, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenja pod C i E su netačna.

5. B, E

$$\sin(-n\pi) = 0, \;\; \cos n\pi = (-1)^n, \;\; \cos 0 = 1, \;\; \cos(-n\pi) = (-1)^{-n} = \left((-1)^{-1}\right)^n = (-1)^n$$

6. C, D

U pitanju je Furijeov red funkcije definisane na intervalu $(-2,2)$, tako da je $l=2$ u trigonometrijskom redu 1.3.14 sa koeficijentima:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\,dx=\int_0^2 x\,dx=\Big[x\Big]\Big|_0^2=2,\ a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\ \text{ i }\ b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx,\ n\in\mathbb{N},$$

primenivši da je data funkcija parna i teoremu 1.51.

7. C, E

Neka su sa b_n^i, $i=1,2,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$, označeni koeficijent u sinusnim članovima Furijeovog reda funkcije f_i, $i=1,2,\dots,5$. Za funkciju f_4 važi da je

$$f_4(-x)=\begin{cases}-x, & -x\in(-1,0]\\ x, & -x\in(0,1)\end{cases}=\begin{cases}-x, & x\in[0,1)\\ x, & x\in(-1,0)\end{cases}=f_4(x),$$

tako da je parna, pa je $b_n^4=0$.

$$b_n^1=\frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0}2\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-2\pi}^{0}\sin nx\,dx,\ \ b_n^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(-2)\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx,$$

$$b_n^3=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx-\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right),\ \ b_n^5=\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\,dx-\int_0^1\sin n\pi x\,dx,$$

što sa

$$\int\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx+C\ \text{ i }\ \int\sin n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x+C,\ C\in\mathbb{R},$$

daje da je

$$\begin{aligned}
b_n^1&=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{-2\pi}^{0}=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos 0-\cos(-2n\pi)\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^{-2n}\right)=0,\\
b_n^2&=-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(\cos 2n\pi-\cos 0\right)=\frac{2}{n\pi}\left((-1)^{2n}-1\right)=0,\\
b_n^3&=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(-\cos 0+\cos(-n\pi)+\cos n\pi-\cos 0\right)=\\
&=\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right),\\
b_n^5&=\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Bigg|_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{n\pi}\left(-\cos 0+\cos(-n\pi)+\cos n\pi-\cos 0\right)=\\
&=\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right).
\end{aligned}$$

8. A, D

Na osnovu teoreme 1.54, tvrđenje pod A je tačno, a Furijeov red funkcije definisane na intervalu $[0,1)$, odnosno $[0,\pi]$, redom ima oblik

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\right),\ \text{ odnosno }\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\pi}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\pi}\right),$$

tako da su tvrđenja pod B i C netačna.

Na osnovu definicije 1.48, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod E netačno.

9. C, D

   Pošto su oblasti integracija datih funkcija intervali dužine 2π, na osnovu ortogonalnog niza funkcija 1.3.12, tvrđenja pod C i D su tačna, a tvrđenje pod E netačno. Na osnovu normiranog niza funkcija 1.3.13,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2020x\, dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos 2020x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \pi \ \text{ i } \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2020x\, dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin 2020x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \pi,$$

   te su tvrđenja pod A i B netačna.

10. B

   Funkcija f se razvija u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$, tako da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

   gde je

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{\pi} \Big[x \Big] \Big|_{-\pi}^{0} = 1, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^{0} \cos t\, dt = \frac{1}{n\pi} \Big[\sin t \Big] \Big|_{-n\pi}^{0} = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^{0} \sin t\, dt = \frac{1}{n\pi} \Big[-\cos t \Big] \Big|_{-n\pi}^{0} = \frac{-1 + (-1)^{-n}}{n\pi},
\end{aligned}$$

   koristeći smenu $t = nx$, $dt = n\, dx$. Znači, tvrđenje pod B je tačno, a ostala tvrđenja su netačna.

Test 4.5

1. A, C

   Oblasti integracije datih integrala su intervali dužine 2π, tako da na osnovu ortogonalnosti niza funkcija 1.3.12 sledi da je tvrđenje pod A tačno, a da su tvrđenja pod B, D i E netačna. Tvrđenje pod C je tačno na osnovu normiranosti niza funkcija 1.3.13.

2. C, E

   Koristeći simetričnost oblasti integracije i neprekidnost i neparnost podintegralne funkcije, vrednost integrala pod A i B je nula (na osnovu teoreme 1.50).

   Pošto je $\cos 5 \approx 0.28366$, podintegralna funkcija integrala pod C je nenegativna. Pored toga, podintegralna funkcija je neprekidna i pozitivna je za $x = 1$, tako da teorema 1.52 daje da je i integral pozitivan.

   Vrednost integrala pod D je nula na osnovu ortogonalnosti niza funkcija 1.3.12 na intervalu $[-2\pi, 0]$.

   Za svako $x \in \left[-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right]$ važi da je $\left(1 - x^4\right) \cos 3x \geq \left(1 - \left(\frac{\pi}{7}\right)^4\right) \cos \frac{3\pi}{7} > 0$, tako da teorema 1.52 daje da je i integral pod E pozitivan.

3. A, E

   Na osnovu teoreme 1.55, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B netačno.

   Na osnovu definicije normiranog niza funkcija, tvrđenja pod C i D su netačna, a tvrđenje pod E je tačno.

4. B, E

   Funkcija f je data intervalom $[2, 4)$. Pošto je periodična s osnovnim periodom 2, definisana je na skupu realnih brojeva, tako da je tvrđenje pod A netačno.

   Periodičnost funkcije f s osnovnim periodom 2 obezbeđuje da važi da je $f(x + 2k) = f(x)$ za svako $k \in \mathbb{Z}$, te je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod C netačno.

   Tvrđenje pod D je netačno, a tvrđenje pod E tačno jer je

$$f(-1) = f(-1 + 4) = f(3) = 2 \ \text{ i } \ f(1) = f(1 + 2) = f(3) = 2.$$

5. D

Za tvrđenje pod A,

$$a_0 = \frac{2}{5}\int_0^5 f_1(x)\,dx = \frac{2}{5}\int_2^5 5\,dx = 2\Big[x\Big]\Big|_2^5 = 6.$$

Za tvrđenje pod B,

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^3 f_2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 2\,dx = \frac{2}{3}\Big[x\Big]\Big|_0^3 = 2.$$

Za tvrđenje pod C,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f_3(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^2 + \Big[x\Big]\Big|_2^4 = 4.$$

Za tvrđenje pod D, koristeći teoremu 1.51 jer je funkcija f_4 parna,

$$a_0 = \frac{1}{8}\int_{-8}^8 f_4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^8 f_4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^8 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^8 = 8.$$

Za tvrđenje pod E,

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^5 f_5(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^5 x^2\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-5}^5 = \frac{50}{3}.$$

6. C, E

Funkcija f se razvija u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$, tako da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \ \text{ i } \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

pri čemu je iskorišćena parnost funkcije f. Dakle, tvrđenje pod C je tačno, a tvrđenja pod A i B su netačna. Parnost funkcije f, na osnovu teoreme 1.56, daje da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

7. B, D

Funkcija f se razvija u Furijeov red na intervalu $[-2, 2]$, tako da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right),$$

gde je

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x)\,dx, \ \ a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx, \ \ b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx,$$

tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenja pod A i C netačna.

Pošto je funkcija f neparna, na osnovu teoreme 1.56, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod E netačno.

8. A, B

Na osnovu teoreme 1.55, tvrđenje pod A je tačno, a redom za $x=0$, $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ i $x=2$ dobija se:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos 0=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2},\\
f(1) &= \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}(-1)^n=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2},\\
f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2},\\
f(2) &= \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2},
\end{aligned}$$

te je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenja pod C, D i E su netačna.

9. B, C

Tvrđenje pod A je netačno jer jednakost nije zadovoljena, na primer, za $x=4$. Naime, $f(4)=2$, a $2\cdot 4-4=4$.

Tvrđenja pod B i C su tačna jer je $f(x)=2x-4$ za $x\in(2,3]$, odnosno $f(x)=2$ za $x\in(1,2]$.

Pošto je $x\in(4,5]$ ekvivalentno sa $x-2\in(2,3]$, periodičnost funkcije f i njena formula za interval $(2,3]$ daju da je $f(x)=f(x-2)=2(x-2)-4=2x-8$ za $x\in(4,5]$. Dakle, tvrđenja pod D i E su netačna.

10. A, D

$$\cos(n\pi)=(-1)^n=\begin{cases}1, & n \text{ paran broj},\\ -1, & n \text{ neparan broj},\end{cases}\qquad \sin(n\pi)=0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos n\pi+\cos\frac{\pi}{2}\sin n\pi=\cos n\pi=(-1)^n,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos n\pi+\sin\frac{\pi}{2}\sin n\pi=\sin n\pi=0.$$

Test 4.6

1. E 2. B, C 3. B, D 4. C, D 5. C, E 6. A, D 7. B 8. D, E 9. A, C 10. A

Test 4.7

1. A, C 2. B, C 3. B, D 4. C, D 5. A, B, E 6. D, E 7. A, E 8. C, E 9. A, B 10. A, D

Test 4.8

1. D 2. B, C 3. A, B 4. C, E 5. B, E 6. B, D 7. C, E 8. A, C 9. A, E 10. A, D

Test 4.9

1. A 2. B, D 3. B, C 4. A, D 5. D, E 6. C, D 7. B, E 8. A, E 9. C, E 10. C

Test 4.10

1. B, C 2. A, E 3. B, E 4. A, D 5. A, B 6. C, D 7. E 8. B, D 9. C, D 10. A, C

3.5 Numerička analiza

Test 5.1

1. D, E

   Brojevi pod B i C se mogu isključiti jer imaju tri važeće cifre. Ostali brojevi imaju četiri važeće cifre.

   Pošto je
   $$|1.249830912 - 1.240| \approx 0.00983 > 10^{-3},$$
   10^{-3} nije granica apsolutne greške približne vrednosti 1.240, te se broj pod A može isključiti.
   $$|1.249830912 - 1.250| \approx 0.00017 \leq 10^{-3},$$
   tako da je 10^{-3} granica apsolutne greške približne vrednosti 1.250, te je tvrđenje pod D tačno.

   Tvrđenje pod E je tačno jer je
   $$|1.249830912 - 1.249| \approx 0.00083 \leq 10^{-3},$$
   pa je 10^{-3} granica apsolutne greške približne vrednosti 1.249.

2. B, E

   Pošto su date vrednosti i njihove približne vrednosti zaokružene na 4 decimale:
   $$\sin 8 = 0.989358... \approx 0.9894,\ \ \log_2 24 = 4.584962... \approx 4.5850,\ \ \cos 1 = 0.540302... \approx 0.5403,$$
   $$\log_{\frac{3}{2}} 24 = 7.8380451... \approx 7.8380,\ \ \sin(-8) = -0.989358... \approx -0.9894,$$
   tvrđenja pod B i E su tačna, a ostala netačna.

3. B, D

   Na osnovu definicije 1.58, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenje pod B je tačno.

   Na osnovu definicije 1.57, tvrđenje pod C je netačno, a tvrđenje pod D je tačno.

   Pošto na osnovu definicije relativne greške približnog broja x^* broja x važi da je
   $$|x|\Delta_R(x^*) = \Delta_A(x^*),$$
   a $|x|$ može biti i manje i veće od 1, ne može se odrediti odnos apsolutne i relativne greške, tako da je tvrđenje pod E netačno.

4. A, D

   Na osnovu definicije linearne interpolacije, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenje pod B je tačno.

   Interpolacionom funkcijom funkcije f se aproksimira funkcija f, tako da su tvrđenja pod C i E netačna.

   Tvrđenje pod D je tačno na osnovu teoreme 1.59.

5. A, B

   Tvrđenje pod A predstavlja uslove interpolacije, tako da je tačno.

   Na osnovu uslova interpolacije, grafik interpolacione funkcije prolazi kroz tačke čije su apscise čvorovi interpolacije, a ordinate odgovarajuće vrednosti interpolirane funkcije u njima, pa je tvrđenje pod B tačno.

   Uslovi interpolacije važe za čvorove interpolacije, a za ostale tačke intervala $[x_0, x_n]$ ne moraju da važe, te je tvrđenje pod C netačno.

   Na osnovu baznih funkcija polinomne interpolacije, interpolacioni polinom sa $n+1$ čvorova interpolacije je polinom n-tog stepena, tako da su tvrđenja pod D i E netačna.

6. A, C

Pošto je dato da je $f(0) = 2$ i $f(1) = 1$, čvorovi integracije su $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ i za njih važi da je $y_0 = f(x_0) = 2$ i $y_1 = f(x_1) = 1$, pa je $n = 1$ i $h = x_1 - x_0 = 1$. Primenom trapezne formule se dobija da je

$$I \approx T_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2},$$

tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Simpsonova formula se ne može primeniti jer je n neparan broj, tako da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenje pod D netačno.

Da bi se formula desnih pravougaonika mogla primeniti, potrebna je vrednost $f(\frac{x_0+x_1}{2})$, međutim, ta vrednost nije poznata, pa se ni formula desnih pravougaonika ne može primeniti, te je tvrđenje pod E netačno.

7. A, E

Površina P je određena krivama: $y = f(x)$, $x = 1$, $x = 3$ i $y = 0$, tako da je

$$P = \int_1^3 f(x)\,dx.$$

Dato je da je $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ i $f(3) = 1$, pa se trapezna formula, formula levih pravougaonika i Simpsonova formula mogu primeniti sa čvorovima integracije: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$, tako da je $y_0 = f(x_0) = 1$, $y_1 = f(x_1) = 2$, $y_2 = f(x_2) = 1$, $n = 2$ i $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 1$. Primenom trapezne formule se dobija da je

$$P \approx T_2 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(1 + 2 \cdot 2 + 1) = 3,$$

a primenom formule levih pravougaonika da je

$$P \approx L_2 = h(y_0 + y_1) = 1 \cdot (1+2) = 3,$$

tako da je $T_2 = L_2$, pa je tvrđenje pod D netačno.

Trapeznom formulom sa $n = 2$ se grafik funkcije f aproksimira izlomljenom linijom koja spaja tačke $T_0(x_0, y_0)$, $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$. Pošto je kriva $y = 2 - |x-2|$ izlomljena linija i važi da je $y_i = 2 - |x_i - 2|$ za $i = 0, 1, 2$, kriva $y = 2 - |x-2|$ je aproksimacija grafika funkcije f u trapeznoj formuli, pa je tvrđenje pod A tačno.

Simpsonovom formulom sa $n = 2$ se grafik funkcije f aproksimira parabolom koja prolazi kroz tačke $T_0(x_0, y_0)$, $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$. Pošto je kriva $y = 2 - (x-2)^2$ parabola i važi da je $y_i = 2 - (x_i - 2)^2$ za $i = 0, 1, 2$, parabola $y = 2 - (x-2)^2$ je aproksimacija grafika funkcije f u Simpsonovoj formuli, pa je tvrđenje pod E tačno.

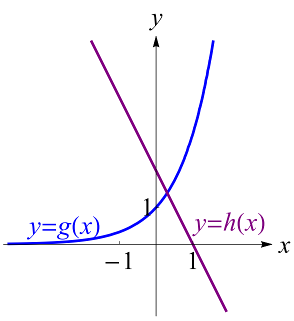
Formula srednjih pravougaonika se može primeniti sa datim vrednostima uzimajući da je $n = 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $y_0 = f(x_0) = 1$ i $y_1 = f(x_1) = 1$ jer je tako $\frac{x_0+x_1}{2} = 2$, pa je poznat i podatak $f(\frac{x_0+x_1}{2})$. U tom slučaju se veličina P aproksimira površinom jednog pravougaonika. To znači da su tvrđenja pod B i C netačna.

8. B, C

Neka je $f(x) = 3^x + 2x - 2$. Odgovor se može dobiti lokalizacijom rešenja jednačine $f(x) = 0$. Tada se grafička lokalizacija može sprovesti pomoću funkcija g i h za koje važi da je $f(x) = g(x) - h(x)$. Na slici 3.5.1 su prikazani grafici funkcija $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 2 - 2x$. Pošto se krive $y = g(x)$ i $y = h(x)$ seku u jednoj tački, a apscisa te tačke se nalazi u intervalu $(0, 1)$, tvrđenja pod A i E su netačna.
Na osnovu teoreme 1.67 i da je

$$f(0.3) \approx -0.00961 < 0 \text{ i } f(0.4) = 0.35185 > 0,$$

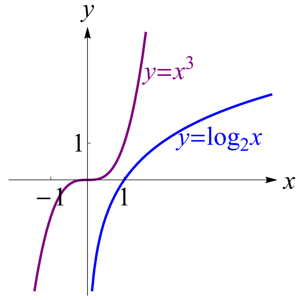
jednačina ima rešenje u intervalu $[0.3, 0.4]$, te je tvrđenje pod B tačno. Pošto jednačina ima rešenje u intervalu $[0.3, 0.4]$, a $[0.3, 0.4] \subset [-0.5, 0.5]$, to rešenje se nalazi i u intervalu $[-0.5, 0.5]$, pa je i tvrđenje pod C tačno.
Pošto su intervali $[0.3, 0.4]$ i $[0.5, 1.5]$ disjunktni, data jednačina ima jedno rešenje i rešenje se nalazi u intervalu $[0.3, 0.4]$, u intervalu $[0.5, 1.5]$ se ne nalazi rešenje, tako da je tvrđenje pod D netačno.



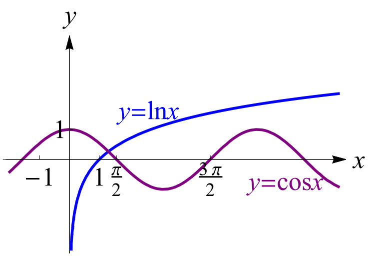
Slika 3.5.1

9. C, D

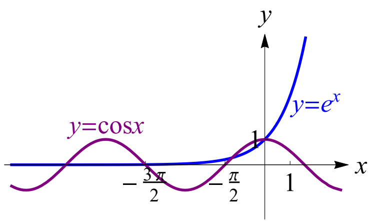
Broj rešenja jednačine $f(x) = 0$ se može utvrditi grafičkom lokalizacijom rešenja, crtajući grafike funkcija g i h za koje važi da je $f(x) = g(x) - h(x)$ i odredivši broj tačaka u kojima se seku krive $y = g(x)$ i $y = h(x)$.
Na osnovu grafika krivih $y = \log_2 x$ i $y = x^3$, slika 3.5.2, jednačina $\log_2 x - x^3 = 0$ nema rešenje, tako da je tvrđenje pod A netačno.
Tvrđenje pod B je netačno jer na osnovu grafika krivih $y = \ln x$ i $y = \cos x$, slika 3.5.3, jednačina $\ln x - \cos x = 0$ ima jedno rešenje.
Na osnovu grafika krivih $y = e^x$ i $y = \cos x$, slika 3.5.4, jednačina $e^x - \cos x = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja, pa je tvrđenje pod C tačno.
Na osnovu grafika krivih $y = \log_2 x$ i $y = 2^x$, slika 3.5.5, jednačina $\log_2 x - 2^x = 0$ nema rešenje, te je tvrđenje pod D tačno.
Tvrđenje pod E je netačno jer na osnovu grafika krivih $y = e^x$ i $y = -\log_2 x$, slika 3.5.6, jednačina $e^x + \log_2 x = 0$ ima jedno rešenje.



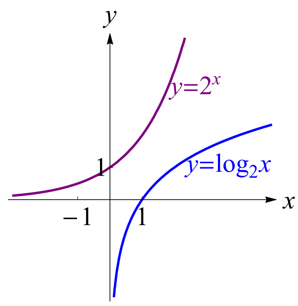
Slika 3.5.2



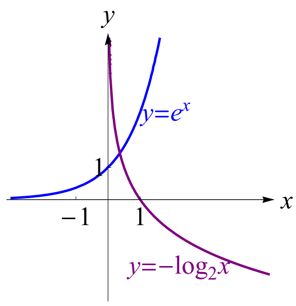
Slika 3.5.3



Slika 3.5.4



Slika 3.5.5



Slika 3.5.6

10. C, E

Tvrđenje pod A je netačno jer je za primenu postupka polovljenja s početnim aproksimacijama a i b potrebno da važi da je $f(a)f(b) < 0$.

Tvrđenje pod B je netačno jer se na osnovu informacije da je jednačina transcendenta ne može dobiti informacija u kojem intervalu se nalazi rešenje jednačine.

Pošto su zadovoljeni uslovi teoreme 1.67, u intervalu (a, b) postoji bar jedno rešenje jednačine $f(x) = 0$. Pored toga, nula funkcije f zadovoljava jednačinu $f(x) = 0$, tako da u intervalu (a, b) postoji bar jedna nula funkcije f, te je tvrđenje pod C tačno.

Tvrđenje pod D je netačno jer, na primer, za $f(x) = x^3$ važi da se rešenje jednačine nalazi u intervalu $[-1, 1]$, a $f(-1)f(1) = -1 < 0$.

Tvrđenje pod E je teorema 1.67, tako da je tačno.

Test 5.2

1. A, D

Pošto je
$$f(2) = 3.6371897... \approx 3.637190,$$
zaokruživanjem na 6 decimala, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B je netačno.

Zaokruživanjem na 5 decimala,
$$f(2) = 3.6371897... \approx 3.63719,$$
pa je apsolutna greška
$$\Delta_A(3.63719) = |f(2) - 3.63719| \approx 2.92697 \cdot 10^{-7} < 10^{-6},$$
tako da je tvrđenje pod C netačno.

Relativna greška je

$$\Delta_R(3.63719) = \frac{|f(2) - 3.63719|}{f(2)} \approx 8.04735 \cdot 10^{-8} < 10^{-7} < \Delta_A(3.63719),$$

pa je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

2. A, E

Na osnovu teoreme 1.59, tvrđenje pod A je tačno.

Deteminanta pod B je determinanta sistema linearnih jednačina koji čine uslovi interpolacije. Uslov da je determinanta sistema jednaka nuli daje da sistem jednačina ima beskonačno mnogo rešenja ili da nema nijedno rešenje, tako da je tvrđenje pod B netačno.

Bazne funkcije interpolacione funkcije su linearno nezavisne, a funkcije ϕ_i pod C i D su liearno zavisne. Naime, za funkcije pod C važi da je $\phi_1 = \frac{1}{2}\phi_0$, a za funkcije pod D da je $\phi_0 = 2\phi_1 - \phi_2$. Znači, tvrđenja pod C i D su netačna.

Funkcije pod E su bazne funkcije interpolacionog polinoma, tako da je tvrđenje pod E tačno.

3. B, C

Pošto je $n = 1$, čvorovi interpolacije su: $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$.

Lagranžov interpolacioni polinom funkcije f je

$$L_1(x) = f(x_0)\,\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = -f(1)(x-2) + f(2)(x-1),$$

tako da je tvrđenje pod B tačno. Vodeći koeficijent Lagranžovog interpolacionog polinoma je $f(2) - f(1)$, a vodeći koeficijent polinoma pod A je $\frac{1}{f(2)-f(1)}$, tako da polinomi pod A i B nisu jednaki. Međutim, interpolacioni polinom je jedinstven, pa je tvrđenje pod A netačno.

Uslovi interpolacije su $F(1) = f(1)$ i $F(2) = f(2)$, što je ekvivalentno sa $|F(1) - f(1)| = 0$ i $|F(2) - f(2)| = 0$, tako da je tvrđenje pod C tačno.

Za svaki čvor interpolacije x_i važi da je $F(x_i) = f(x_i)$, odnosno da je $F(x_i) - f(x_i) = 0$, što znači da je tvrđenje pod D netačno.

Tvrđenje pod E je netačno jer 3 ne pripada intervalu $[1,2]$ na kojem je interpolirana funkcija f, tako da nepoznat odnos veličina $F(3)$ i $f(3)$.

4. B

Na osnovu teoreme 1.60 sa $n = 3$ važi da je

$$|f(x) - L_3(x)| \le \frac{\max\limits_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right|}{4!}(2-1)^4 = \frac{\max\limits_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right|}{24}.$$

To znači da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Za $n = 3$, čvorovi interpolacije su: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$ i $x_3 = 2$, tako da uslovi interpolacije daju da je $L_3(1) = f(1)$ i $L_3(2) = f(2)$, pa je tvrđenje pod C netačno.

Za $n = 2$, čvorovi interpolacije su: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$ i $x_2 = 2$. Na osnovu teoreme 1.60 sa $x = 1.7$, važi da je

$$|f(1.7) - L_2(1.7)| \le \frac{\max\limits_{1\le x\le 2}|f'''(1.7)|}{3!}\cdot|1.7-1|\cdot|1.7-1.5|\cdot|1.7-2| \approx 0.007\cdot\max_{1\le x\le 2}\left|f'''(1.7)\right|.$$

Pošto je $0.0021 < 0.007$ i $0.0035 < 0.007$, tvrđenja pod D i E su netačna.

5. C, E

Za $n = 2$, čvorovi interpolacije su: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$ i $x_2 = 2$ sa $f(x_0) \approx 0.84147$, $f(x_1) \approx 1.83252$ i $f(x_2) \approx 3.63719$.

Po Simpsonovoj formuli funkcija g je kvadratna funkcija čiji grafik prolazi kroz tačke $T_0\,(x_0, f(x_0))$, $T_1\,(x_1, f(x_1))$ i $T_2\,(x_2, f(x_2))$. To znači da je $g(x_0) = f(x_0)$, $g(x_1) = f(x_1)$ i $g(x_2) = f(x_2)$. Međutim, uvrštavanjem x_0 u funkciju g pod A dobija se da je $g(x_0) \approx 0.01745$, što je različito od $f(x_0)$, pa je tvrđenje pod A netačno.

Po formuli desnih pravougaonika i formuli levih pravougaonika, redom je

$$g(x) = \begin{cases} f(x_1), & x \in [x_0, x_1], \\ f(x_2), & x \in (x_1, x_2], \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} f(x_0), & x \in [x_0, x_1), \\ f(x_1), & x \in [x_1, x_2], \end{cases}$$

tako da je tvrđenje pod B netačno, a tvrđenje pod C tačno.

Po trapeznoj formuli grafik funkcije g je izlomljena linija koja redom spaja tačke $T_0\,(x_0, f(x_0))$, $T_1\,(x_1, f(x_1))$ i $T_2\,(x_2, f(x_2))$, tako da je tvrđenje pod D netačno. Pošto za funkciju g datu pod E važi da je

$$g(x_0) \approx 0.84147 \approx f(x_0), \;\; g(x_1) \approx 1.83252 \approx f(x_1), \;\; g(x_2) \approx 3.63719 \approx f(x_2),$$

tvrđenje pod E je tačno.

6. B, D

Na osnovu teoreme 1.4.31,

$$|I - S_n| \leq \frac{(2-1)h^4}{180} M_4 = \frac{M_4 h^4}{180} \;\; \text{i} \;\; |I - S_n| \leq \frac{(2-1)^5}{180 n^4} M_4 = \frac{M_4}{180 n^4},$$

gde je $M_4 = \max_{x\in[1,2]} \left| f^{(4)}(x) \right|$. To znači da su tvrđenja pod B i D tačna, a tvrđenje pod E je netačno.

Pošto veličine $\frac{M_4}{2880}$ i $\frac{h^5 M_4}{90}$ mogu biti manje od veličina $\frac{M_4 h^4}{180}$ i $\frac{M_4}{180n^4}$, koje su granice apsolutne greše približne vrednosti intergala I dobijene Simpsonovom formulom, tvrđenja pod A i C su netačna.

7. A, C

Na osnovu teoreme 1.4.30, da bi apsolutna greška koja se dobija izračunavanjem I pomoću trapezne formule bila manja od 10^{-4} potrebno je da važi

$$|I - T_n| \leq \frac{(2-1)^3}{12n^2} \max_{x\in[1,2]} \left| f''(x) \right| < 10^{-4},$$

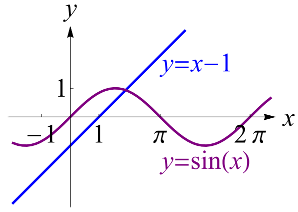
odnosno

$$\frac{3.7696897}{12n^2} < 10^{-4},$$

odakle sledi da je $n > 56.04827$. Znači, tvrđenja pod A i C su tačna, a tvrđenja pod B, D i E su netačna.

8. D, E

Da li funkcija F ima nule se može utvrditi proverom da li jednačina $F(x) = 0$ ima rešenje. Ta provera se može sprovesti grafičkom lokalizacijom rešenja, crtajući grafike funkcija $G(x) = x - 1$ i $H(x) = \sin x$ (jer za njih važi da je $F(x) = G(x) - H(x)$) i utvrđivanjem da li postoji tačka u kojoj se krive $y = G(x)$ i $y = H(x)$ seku. Na osnovu grafika, prikazanih na slici 3.5.7, jednačina $F(x) = 0$ ima jedno rešenje i ono je intervalu $[1, \pi]$, tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod A netačno.



Slika 3.5.7

Da bi se postupak polovljenja mogao primeniti, u posmatranom intervalu mora da postoji rešenje. U intervalu $[-\pi, 0]$ nema rešenja, te je netačno i tvrđenje pod B. Pošto je $F(1)F(2) \approx -0.84147 \cdot 0.09070 < 0$, teorema 1.67 daje da je rešenje u intervalu $[1, 2]$, a pošto jendačina $F(x) = 0$ ima jedno rešenje, to rešenje ne može biti i u intervalu $[2, \pi]$. Znači, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod C je netačno.

9. A, B

   Odrediti rešenje, odnosno koren, jednačine $F(x) = 0$ je ekvivalentno određivanju nule funkcije F. Pošto je funkcija F neprekidna i važi da je $F(a)F(b) < 0$, postupak polovljenja je primenljiv. Znači, tvrđenja pod A i B su tačna.

   Postupkom sečice se mogu odrediti i racionalni i iracionalni koreni jer su realni brojevi, tako da su tvrđenja pod C i D netačna.

   Tvrđenje pod E je netačno jer je fukcija F neprekidna, pa se postupak sečice može primeniti na rešavanje jednačine $F(x) = 0$.

10. C, D

   Postupkom polovljenja je $A_1 = x_0$, a $B_1 = x_1$, pa je $x_2 = \frac{A_1+B_1}{2} = \frac{x_0+x_1}{2}$, što znači da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod A i B su netačna.

   Postupkom sečice, x_k je apscisa preseka x-ose i sečice krive $y = F(x)$ određene tačkama $S(x_{k-2}, F(x_{k-2}))$ i $T(x_{k-1}, F(x_{k-1}))$, tako da je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

Test 5.3

1. C, E

   Tvrđenje pod A je netačno jer za čvorove interpolacije važi jednakost.

   Za određivanje interpolacione funkcije funkcije f potrebni su proizvoljni čvorovi interpolacije iz posmatranog intervala i vrednosti funkcije f u tim tačkama, stoga tvrđenje pod B je netačno, a tvrđenje pod C je tačno.

   Tvrđenje pod D je netačno, a tvrđenje pod E je tačno jer su uslovi interpolacije $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

2. C, D

   Tvrđenje pod C je tačno jer je definicija ekvidistantne podele, a samim tim je tačno i tvrđenje pod D, a ostala tvrđenja su netačna.

3. A, E

   Slika 2.5.2 je prikaz površine koja odgovara aproksimaciji integrala I sa formulom srednjih pravougaonika, ali bez podele intervala $[a, b]$, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenja pod C i D su netačna.

   Slika 2.5.4 je prikaz površine koja odgovara aproksimaciji integrala I sa formulom desnih pravougaonika, deleći interval $[a, b]$ na dva jednaka dela, tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod B netačno.

4. B, E

   Formula levih pravougaonika sa podelom intervala $[a, b]$ na dva jednaka dela nije prikazana ni na jednoj slici, tako da je tvrđenje pod A netačno.

   Trapezna formula sa podelom intervala $[a, b]$ na dva jednaka dela odgovara slici 2.5.3, tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod C netačno.

   Simpsonova formula sa podelom intervala $[a, b]$ na dva jednaka dela odgovara slici 2.5.1, te je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

5. A, D

   P na slici 2.5.1 je ilustracija primene Simsonove formule sa dva jednaka podintervala, tako da, na osnovu teoreme 1.4.31,

   $$|I - P| \le \frac{(b-a)^5}{180 \cdot 2^4} M_4 = \frac{M_4(b-a)^5}{2880},$$

   pa je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno.

   P na slici 2.5.3 je ilustracija primene trapezne formule sa dva jednaka podintervala, tako da, na osnovu teoreme 1.4.30,

   $$|I - P| \le \frac{(b-a)^3}{12 \cdot 2^2} M_2 = \frac{M_2(b-a)^3}{96},$$

   pa je tvrđenje pod C netačno.

P na slici 2.5.2 je ilustracija primene formule srednjih pravougaonika jednim podintervalom, tako da, na osnovu teoreme 1.4.26 i (1.4.28),

$$|I-P| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24 \cdot 1^2} = \frac{M_2(b-a)^3}{24},$$

pa je tvrđenje pod D tačno.

P na slici 2.5.4 je ilustracija primene formule desnih pravougaonika sa dva jednaka podintervala, tako da, na osnovu teoreme 1.4.25 i (1.4.27),

$$|I-P| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2 \cdot 2} = \frac{M_1(b-a)^2}{4},$$

pa je tvrđenje pod E netačno.

6. B, D

Nema restrikcije na primenu trapezne formule na ekvidistantnu podelu intervala, tako da je tvrđenje pod A netačno.

Simpsonova formula se može primeniti samo sa parnim brojem podintervala, a tada je broj čvorova integracije neparan, tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod C netačno.

Trapeznom formulom se aproksimira vrednost integrala, te je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.

7. A

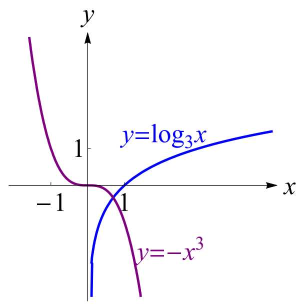
Funkcija f je neprekidna, tako da je postupak sečice primenljiv s proizvoljnim početnim aproksimacijama. Znači, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B je netačno.

Njutnov postupak nije primenljiv jer funkcija f nije diferencijabilna, te su tvrđenja pod C i D netačna.

Tvrđenje pod E je netačno jer je za primenu postupka polovljenja potrebno da važi da je $f(a)f(b) < 0$.

8. B, C

Neka je $f(x) = \log_3 x + x^3$. Pošto je funkcija f nelinearna, jednačina $f(x) = 0$ je nelinearna, tako da je tvrđenje pod C tačno.
Broj rešenja jednačine (2.5.1) se može utvrditi grafičkom lokalizacijom rešenja, crtajući grafike funkcija $g(x) = \log_3 x$ i $h(x) = -x^3$ $\big($jer za njih važi da je $f(x) = g(x) - h(x)\big)$ i odredivši broj tačaka u kojima se seku krive $y = g(x)$ i $y = h(x)$. Na osnovu grafika, prikazanih na slici 3.5.8, jednačina (2.5.1) ima jedno rešenje, tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno.
Pošto je jednačina (2.5.1) ekvivalentna jednačini $\log_3 x = -x^3$, rešenje ξ je apscisa tačke preseka krivih $y = \log_3 x$ i $y = -x^3$, što znači da su tvrđenja pod D i E netačna.



Slika 3.5.8

9. B, D

Neka je $f(x) = \log_3 x + x^3$. Funkcija f je neprekidna i

$$f(0.1) \approx -2.09490,\ \ f(0.5) \approx -0.50593,\ \ f(0.7) \approx 0.01834,\ \ f(0.74) \approx 0.13115,\ \ f(1) = 1,$$

tako da na osnovu teoreme 1.67 važi da je $\xi \in (0.5, 0.7)$. To implicira da i intervali $[0.1, 0.74]$ i $[0.1, 1]$ sadrže to rešenje, tako da su tvrđenja pod D i B tačna. Pošto na osnovu grafičke lokalizacije, slika 3.5.8, jednačina (2.5.1) ima jedno rešenje, ξ ne može da bude u intervalima $[0.1, 0.5]$, $[0.7, 1]$ i $[0.74, 1]$, pa su tvrđenja pod C, E i A netačna.

10. B, E

Pošto je $f(0.74426) \cdot f(1) \approx 0.14341 \cdot 1 > 0$, postupak polovljenja se ne može primeniti s početnim aproksimacijama x_0 i x_1, te je tvrđenje pod A netačno.

Pošto je

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 3x^2,$$

po Njutnovom postupku

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.74426 - \frac{0.14341}{2.88478} \approx 0.69455,$$

pa je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod C netačno.

Po postupku sečice

$$x_2 = x_1 - \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} f(x_1) \approx 0.74426 - \frac{1 - 0.74426}{1 - 0.14341} 0.14341 \approx 0.70144,$$

tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

Test 5.4

1. B, D

   Pošto su date vrednosti i njihove približne vrednosti zaokružene na 5 decimala:

$$\cos 3\pi = -1, \;\; \operatorname{tg} 8 = -6.7997114... \approx -6.79971, \;\; e^{2+\sin\pi} = 7.3890560... \approx 7.38906,$$

$$\log_{0.5} 9 = -3.169925... \approx -3.16993, \;\; \log_5 9 = 1.3652123... \approx 1.36521,$$

   tvrđenja pod B i D su tačna, a ostala netačna.

2. A, C

   Približne vrednosti pod B, D i E redom imaju 7, 4 i 2 važeće cifre, tako da su tvrđenja pod B, D i E netačna.

   Pošto je zaokruživanjem na 5 važećih cifara,

$$\frac{1001}{6} = 166.83333... \approx 166.83, \;\; e = 2.7182818... \approx 2.71828,$$

   tvrđenja pod A i C su tačna.

3. C

   Apsolutne greške datih zaokruženih vrednosti su:

$$|3.13728721004 - 3.13| = 0.00728721004 > 10^{-3}, \;\; |1405.408347023 - 1405.41| = 0.001652977 > 10^{-3},$$

$$|-0.31546487678 + 0.3154| = 0.00006487678 < 10^{-3}, \;\; |1.36521238897 - 1.36| = 0.00521238897 > 10^{-3},$$

$$|-4.083470239145 + 4.08| = 0.003470239145 > 10^{-3},$$

   tako da samo za približnu vrednost -0.3154 važi da joj je 10^{-3} granica apsolutne greške. Dakle, tvrđenje pod C je tačno, a ostala tvrđenja su netačna.

4. B

   Na osnovu definicije zapisa broja u decimalnom obliku sa pokretnom decimalnom tačkom, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenja pod A i C su netačna.

   Na osnovu definicije 1.58, tvrđenja pod D i E su netačna.

5. A, D

   Na osnovu definicije 1.4.22,

$$I \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} h = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i,$$

   tako da je tvrđenje pod A tačno.

   Na osnovu definicije 1.4.23,

$$I \approx D_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i h,$$

   tako da je tvrđenje pod B netačno.

   Formula srednjih pravougaonika i Simpsonova formula se mogu primeniti na integral I samo ako je n parno, ali to nije definisano, tako da su tvrđenja pod C i E netačna.

   Na osnovu definicije 1.4.29, tvrđenje pod D je tačno.

6. A, E

Numeričkom integracijom se aproksimira određeni integral, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenja pod B i C su netačna.

Interpolacijom funkcije f na intervalu $[a,b]$ se aproksimira funkcija f na tom intervalu, tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

7. C, D

Za određivanje interpolacionog polinoma funkcije f nije potrebno da funkcija bude diferencijabilna, tako da je tvrđenje pod A netačno.

Polinom pod C je Lagranžov interpolacioni polinom, tako da je tvrđenje pod C tačno. Pored toga, u pitanju je polinom n-tog stepena, te je tvrđenje pod B netačno.

Interpolacioni polinom je linearna interpolaciona funkcija, a Lagranžov interpolacioni polinom je interpolacioni polinom, pa je tvrđenje pod D tačno.

Vrednost interpolacione funkcije u tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, te je tvrđenje pod E netačno.

8. E

Pošto je $P_n(x)$ interpolacioni polinom funkcije f sa čvorovima interpolacije x_0, x_1, $\ldots$, x_n, $P_n(x)$ zadovoljava uslove interpolacije: $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenja pod A i D su netačna.

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\,dx$, te je tvrđenje pod C netačno.

Tvrđenje pod A je netačno jer je kriva $y = P_n(x)$ aproksimacija grafika funkcije f na intervalu $[a,b]$.

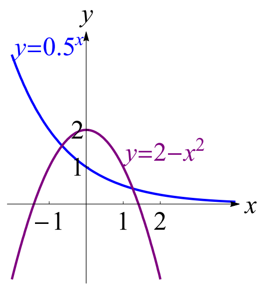
9. C, E

Postupak polovljenja, Njutnov postupak i postupak sečice su iterativni postupci za određivanje približnog rešenja jednačine $f(x) = 0$, tako da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod A, B i D su netačna.

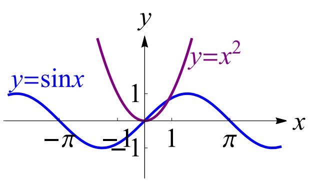
Tvrđenje pod E je tačno jer je navedeno iterativno pravilo Njutnovog postupka.

10. D, E

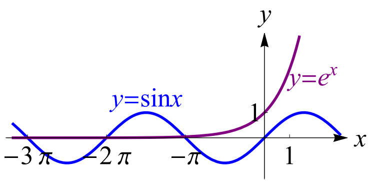
Broj rešenja jednačine $f(x) = 0$ se može utvrditi grafičkom lokalizacijom rešenja, crtajući grafike funkcija g i h za koje važi da je $f(x) = g(x) - h(x)$ i odredivši broj tačaka u kojima se seku krive $y = g(x)$ i $y = h(x)$.
Na osnovu grafika krivih $y = 0.5^x$ i $y = 2 - x^2$, prikazanih na slici 3.5.9, jednačina $0.5^x + x^2 - 2 = 0$ ima dva rešenja, tako da je tvrđenje pod A netačno.
Tvrđenje pod B je netačno jer na osnovu grafika krivih $y = \sin x$ i $y = x^2$, prikazanih na slici 3.5.10, jednačina $\sin x - x^2 = 0$ ima dva rešenja.
Na osnovu grafika krivih $y = \sin x$ i $y = e^x$, prikazanih na slici 3.5.11, jednačina $\sin x - e^x = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja, pa je tvrđenje pod C netačno.
Na osnovu grafika krivih $y = \cos x$ i $y = x^3$, prikazanih na slici 3.5.12, jednačina $\cos x - x^3 = 0$ ima jedno rešenje, te je tvrđenje pod D tačno.
Tvrđenje pod E je tačno jer na osnovu grafika krivih $y = \cos x$ i $y = \ln x$, prikazanih na slici 3.5.13, jednačina $\cos x - \ln x = 0$ ima jedno rešenje.



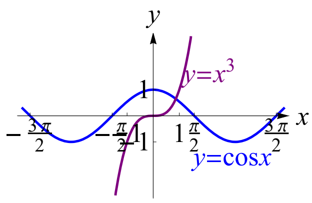
Slika 3.5.9



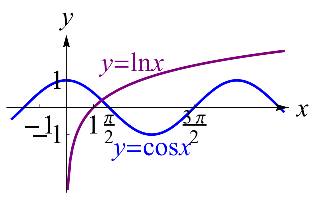
Slika 3.5.10



Slika 3.5.11



Slika 3.5.12



Slika 3.5.13

Test 5.5

1. C, E

   Apsolutna i relativna greška približne vrednosti 42.794 su redom

   $$\Delta_A(42.794) = |f(3) - 42.794| \approx 0.0000125 > 10^{-5}, \ \Delta_R(42.794) = \frac{|f(3) - 42.794|}{|f(3)|} \approx 2.916 \cdot 10^{-7} < 10^{-5},$$

   te je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod B i A su netačna.

   Pošto je $f(3) = 42.793987519...$, zaokruživanjem na 5 decimala, dobija se broj 42.79399, a zaokruživanjem na 4 decimale, broj 42.7940, tako da je tvrđenje pod D netačno, a tvrđenje pod E tačno.

2. A, C

   Na osnovu teoreme 1.60,

   $$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{1\leq x\leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}(3-1)^{n+1} \leq \frac{\max\limits_{1\leq x\leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}2^{n+1}$$

   za svako $x \in [1,3]$, ali i

   $$|f(1.5) - L_n(1.5)| \leq \frac{\max\limits_{1\leq x\leq 3} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |1.5 - x_i|,$$

   tako da su tvrđenja pod A i C tačna, a tvrđenja pod B i D netačna.

   Pošto 3.5 ne pripada intervalu na kojem je funkcija f interpolirana, ne može se primeniti teorema 1.60 za $x = 3.5$, pa je tvrđenje pod E netačno.

3. B, D

   Interpolacioni kubni splajn je funkcija koja je polinom trećeg stepena na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tako da je tvrđenje pod A netačno.

   Interpolacioni polinom je jedinstven za date čvorove interpolacije (teorema 1.59), tako da je F jednak Lagranžovom interpolacionom polinomu, pa je tvrđenje pod B tačno.

   Interpolaciona funkcija F je aproksimacija funkcije f, tako da je $\int_1^3 F(x)\,dx$ približna vrednost integrala I, a ne tačna. Dakle, tvrđenje pod C je netačno.

   Interpolacioni splajn zasovoljava uslove interpolacije: $F(x_0) = f(x_0)$, $F(x_1) = f(x_1)$, $\ldots$, $F(x_n) = f(x_n)$, tako da je tvrđenje pod D tačno.

   Ako je F Lagranžov interpolacioni polinom, tada je $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x - f(x_j)}{f(x_i) - f(x_j)}$, te je tvrđenje pod E netačno.

4. A, D

   Na osnovu teoreme 1.62, interpolacioni prirodni kubni splajn je neprekidan i neprekidne su mu i funkcija prvog i funkcija drugog izvoda, tako da su tvrđenja pod A i D tačna, a tvrđenje pod E je netačno. Kubni splajn S ne mora da zadovoljava uslov $S(x_0) = S(x_n)$ niti da ima neprekidan treći izvod, te su tvrđenja pod B i C netačna.

5. D, E

   Za $n = 2$, čvorovi interpolacije su: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$ (jer je interval $[1,3]$ podeljen na 2 jednaka dela) sa $f(x_0) \approx 0$, $f(x_1) \approx 4$ i $f(x_2) \approx 42.79399$.

   Funkcija g je stepenasta funkcija u primitivnim kvadraturnim formulama za $n \geq 2$, tako da funkcija g nije linearna po formuli desnih pravougaonika, te je tvrđenje pod B netačno.

   Po formuli levih pravougaonika,

   $$g(x) = \begin{cases} f(x_0), & x \in [x_0, x_1), \\ f(x_1), & x \in [x_1, x_2], \end{cases} = \begin{cases} f(1), & x \in [1,2), \\ f(2), & x \in [2,3], \end{cases}$$

   tako da je tvrđenje pod A netačno.

Po trapeznoj formuli grafik funkcije g je izlomljena linija koja redom spaja tačke $T_0\,(x_0, f(x_0))$, $T_1\,(x_1, f(x_1))$ i $T_2\,(x_2, f(x_2))$, tako da je za $x \in [x_0, x_1]$ prava

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \text{ odnosno } y = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,(f(x_1) - f(x_0))\,,$$

a za $x \in [x_1, x_2]$ prava

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ odnosno } y = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,(f(x_2) - f(x_1))\,.$$

Znači,

$$g(x) = \begin{cases} 0 + \dfrac{x-1}{2-1}\,(4-0)\,, & x \in [1,2], \\ f(2) + \dfrac{x-2}{3-2}\,(f(3) - f(2))\,, & x \in [2,3], \end{cases} = \begin{cases} 4\,(x-1)\,, & x \in [1,2], \\ f(2) + (x-2)\,(f(3) - f(2))\,, & x \in [2,3], \end{cases}$$

te je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod C netačno.

Za funkciju g pod E važi da je

$$g(x_0) = g(1) \approx 0.00000, \;\; g(x_1) = g(2) \approx 3.99999, \;\; g(x_2) = g(3) \approx 42.79396,$$

a po Simpsonovoj formuli funkcija g je kvadratna funkcija za koju važi da je $g(x_0) = f(x_0)$, $g(x_1) = f(x_1)$ i $g(x_2) = f(x_2)$, što znači da je tvrđenje pod E tačno.

6. E

Po teoremi 1.4.30,

$$|I - T_n| \leq \frac{(3-1)^3}{12n^2} \max_{x \in [1,3]} \left| f''(x) \right| = \frac{2}{3n^2}\,M,$$

tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenja pod D i B su netačna. Pošto je

$$\frac{1}{3n^2}\,M < \frac{2}{3n^2}\,M \text{ i } \frac{8}{45n^4}\,M < \frac{8}{45n^2}\,M < \frac{2}{3n^2}\,M,$$

i tvrđenja pod C i A su netačna.

7. B, E

Na osnovu teoreme 1.4.31,

$$|I - S_n| \leq \frac{(3-1)^5}{180n^4} \max_{x \in [1,3]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{8}{45n^4}\,M \approx \frac{8 \cdot 1666.09888}{45n^4},$$

tako da uslov

$$\frac{8 \cdot 1666.09888}{45n^4} < 10^{-3} \tag{3.5.4}$$

obezbeđuje da je $|I - S_n| < 10^{-3}$, te je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno.

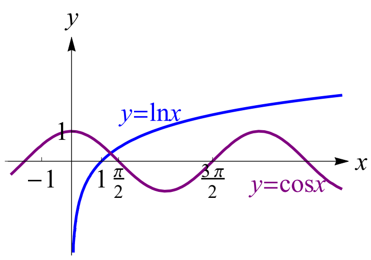
Uslov (3.5.14) je ekvivalentan sa $n > 23.3289$, tako da za svako $n \geq 24$ važi da je $|I - S_n| < 10^{-3}$, što znači da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenja pod C i D su netačna.

8. B, C

Početne aproksimacije su $x_0 = -6$ i $x_1 = -4$, pa je $A_1 = -6$ i $B_1 = -4$, što implicira da je
$$x_2 = \frac{A_1 + B_1}{2} = -5.$$
Na osnovu $f(A_1)f(x_2) \approx -0.94455 \cdot (-0.25241) > 0$ dobija se da je $A_2 = x_2 = -5$ i $B_2 = B_1 = -4$. Tako je
$$x_3 = \frac{A_2 + B_2}{2} = -\frac{9}{2} = -4.5,$$
pa je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenje pod A netačno. Iz $f(A_2)f(x_3) \approx -0.25241 \cdot 0.25499 < 0$ sledi da je $A_3 = A_2 = -5$ i $B_3 = x_3 = -\frac{9}{2}$, tako da je
$$x_4 = \frac{A_3 + B_3}{2} = -\frac{19}{4} = -4.75.$$
To znači da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod D i E su netačna.

9. C, D

Jednačina (2.5.2) je ekvivalentna jednačini $\ln x - \cos x = 0$, a funkcija $f(x) = \ln x - \cos x$ je nelinearna, tako da jednačina (2.5.2) nije linearna, pa je tvrđenje pod A netačno. Pošto funkcija f nije polinom, jednačina (2.5.2) nije algebarska, pa je transcendentna jednačina. Dakle, tvrđenje pod B je netačno, a tvrđenje pod C je tačno.
Broj rešenja jednačine (2.5.2) se može utvrditi grafičkom lokalizacijom rešenja, crtajući grafike funkcija $g(x) = \ln x$ i $h(x) = \cos x$ i odredivši broj tačaka u kojima se seku krive $y = g(x)$ i $y = h(x)$. Na osnovu grafika sa slike 3.5.14, jednačina (2.5.2) ima jedno rešenje, pa je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenje pod E netačno.



Slika 3.5.14

10. A, B

Pošto za ξ važi da je $\ln \xi = \cos \xi$, ξ je apscisa tačake preseka krivih $y = \ln x$ i $y = \cos x$, tako da je tvrđenje pod B tačno.

Na osnovu grafika sa slike 3.5.14, ξ pripada intervalu $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, pa je tvrđenje pod A tačno.

Tvrđenja pod C, D i E su netačna jer je za Njutnov postupak potrebna jedna početna aproksimacija, dok su za postupak polovljenja i za postupak sečice potrebne dve početne aproksimacije.

Test 5.6

1. B, C 2. B, D 3. A, B 4. C, D 5. B, E 6. D, E 7. A, D 8. A, C 9. A, E 10. C, E

Test 5.7

1. C, E 2. B 3. C, D 4. A, C 5. A, E 6. E 7. B, D 8. A, D 9. A, B 10. B, C

Test 5.8

1. A, E 2. D 3. D, E 4. B, C 5. A, D 6. A, C 7. A, B 8. B, E 9. C, E 10. B

Test 5.9

1. B, D 2. A, E 3. B, C 4. A, C 5. B, E 6. D, E 7. A, B 8. C 9. A, D 10. D, E

Test 5.10

1. C, D 2. A, B 3. A, C 4. C, E 5. B, C 6. D 7. A, E 8. E 9. B, D 10. B, E

3.6 Parcijalne diferencijalne jednačine

Test 6.1

1. C

   Nepoznata u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini je funkcija, tako da je tvrđenje pod A netačno.

   Nepoznata u običnoj diferencijalnoj jednačini je funkcija, tako da je tvrđenje pod B netačno.

   Na osnovu definicije 1.68, tvrđenje pod C je tačno, a tvrđenja pod D i E su netačna.

2. A, B

   Na osnovu definicije 1.68, tvrđenje pod A je tačno.

   Na osnovu definicije 1.70, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenja pod C i D su netačna.

   Trivijalno rešenje ne može biti rešenje nehomogene linearne obične diferencijalne jednačine jer se uvrštavanjem $y(x) \equiv 0$ u jednačinu (1.5.34) dobija da je $0 = f(x)$, što je kontradikcija, tako da je tvrđenje pod E netačno.

3. B, E

   Na osnovu definicije 1.68, tvrđenje pod A je netačno.

   Na osnovu definicije 1.72, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod C netačno.

   Na osnovu definicija 1.75 i 1.76, tvrđenje pod E je tačno, a tvrđenje pod D netačno.

4. D, E

   Rubni problem sa običnom diferencijalnom jednačinom ima uslove koji se odnose na dve tačke, tako da su tvrđenja pod A i B netačna.

   Parcijalna diferencijalna jednačina i konturni uslov čine konturni problem, te je tvrđenje pod C netačno.

   Rešenje graničnog problema je rešenje diferencijalne jednačine problema i zadovoljava granične, odnosno konturne uslove problema, tako da je to rešenje diferencijalne jednačine partikularno rešenje. Dakle, tvrđenje pod D je tačno.

   Mešoviti problem čini parcijalna diferencijalna jednačina sa graničnim i početnim uslovima, tako da je tvrđenje pod E tačno.

5. C, D

   Jednačina pod B se može isključiti jer nije diferencijalna jednačina.

   Jednačina pod E je diferencijalna jednačina prvog reda, pa se može isključiti. Preostale jednačine su diferencijalne jednačine drugog reda.

   Jednačina pod A nije linearna diferencijalna jednačina jer sadrži proizvod yy', tako da se i ona može isključiti.

   Jednačina pod C je linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, a jednačina pod D je linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda, tako da su tvrđenja pod C i D tačna.

6. A

   Jednačine pod B i D su obične diferencijalne jednačine, tako da se mogu isključiti.

   Preostale jednačine su parcijalne diferencijalne jednačine i to linearne jer su linearne po nepoznatoj funkciji i po njenim parcijalnim izvodima.

   Slobodan član jednačine pod E je funkcija $g(x,t) = tx$, tako da je nehomogena, pa se može isključiti.

   Jednačina pod A je homogena jer je ekvivalenta jednačini $y''_{xt} + e^x y'_t - y = 0$ kojoj je slobodan član funkcija $g(x,t) = 0$. Dakle, tvrđenje pod A je tačno.

   Jednačina pod C se takođe može isključiti jer je ekvivalenta jednačini $y''_{xx} + y'_t + y = -x$ kojoj je slobodan član funkcija $g(x,t) = -x$, pa je nehomogena.

7. B, C

Uslovi pod A su dati za $x = 0$, tako da su to početni uslovi, te je tvrđenje pod A netačno.

Uslovi pod B su dati za $y = 1$ i $y = -1$, tako da su to konturni uslovi, pa je tvrđenje pod B tačno.

Tvrđenje pod C je tačno jer su uslovi dati za $x = 0$ i $x = 1$, tako da su to konturni uslovi.

Tvrđenje pod D je netačno jer je uslov dat za $x = 0$, pa je početni uslov.

Tvrđenje pod E je netačno jer su uslovi dati za $y = -1$, tako da su početni uslovi.

8. B, E

Jednačina pod A i B je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda, tako da njeno opšte rešenje sadrži jednu proizvoljnu neprekidno diferencijabilnu funkciju jedne realne promenljive, a potpuno rešenje sadrži dve proizvoljne konstante. To znači da tvrđenje pod A ne može biti tačno. Tvrđenje pod B je tačno jer je data funkcija rešenje posmatrane jednačine. Naime, prvi parcijalni izvod date funkcije po promenljivoj x je upravo $u'_x = x + y$.

Jednačina pod C je parcijalna diferencijalna jednačina, tako da njeno opšte rešenje treba da sadrži proizvoljne funkcije, a ne konstante. Dakle, tvrđenje pod C je netačno.

Za funkciju u pod D važi:

$$u'_y = F(x)\cos y - G(x)\sin y, \;\; u''_{yy} = -F(x)\sin y - G(x)\cos y,$$

pa je $u''_{yy} = -u$, što nije ekvivalentno datoj jednačini. Znači, tvrđenje pod D je netačno.

Za funkciju u pod E važi:

$$u'_x = e^y \cos x - C_1 \sin x, \;\; u''_{xx} = -e^y \sin x - C_1 \cos x,$$

pa je $u''_{xx} = -u$, što je ekvivalentno datoj jednačini. Dakle, tvrđenje pod E je tačno.

9. D

Dati problem je konturni problem, tako da je tvrđenje pod B netačno.

Trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ zadovoljava dati problem jer je i $y'(x) \equiv 0$ i $y''(x) \equiv 0$, tako da je tvrđenje pod A netačno.

Tvrđenje pod C je netačno pošto je

$$y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2 \;\text{ i }\; y(\pi) = C_1 \sin \pi + C_2 \cos \pi = -C_2,$$

pa data funkcija y ne zadovoljava uslov $y(0) = y(\pi)$.

Za funkciju y pod D važi da je

$$y' = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x, \;\; y'' = -16C_1 \sin 4x - 16C_2 \cos 4x,$$

pa je

$$y'' + 4^2 y = -16C_1 \sin 4x - 16C_2 \cos 4x + 16\left(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x\right) = 0,$$
$$y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2, \;\; y(\pi) = C_1 \sin 4\pi + C_2 \cos 4\pi = C_2,$$
$$y'(0) = 4C_1 \cos 0 - 4C_2 \sin 0 = 4C_1, \;\; y'(\pi) = 4C_1 \cos 4\pi - 4C_2 \sin 4\pi = 4C_1,$$

što znači da je rešenje datog problema. Pošto je netrivijalno rešenje, tvrđenje pod D je tačno.

Za funkciju y pod E važi da je

$$y' = 6C_1 \cos 6x - 6C_2 \sin 6x, \;\; y'' = -36C_1 \sin 6x - 36C_2 \cos 6x,$$

pa je

$$y'' + 3^2 y = -36C_1 \sin 6x - 36C_2 \cos 6x + 9\left(C_1 \sin 6x + C_2 \cos 6x\right) = -27C_1 \sin 6x - 27C_2 \cos 6x,$$

što znači da nije rešenje datog problema. Dakle, tvrđenje pod E je netačno.

10. A, E

Na osnovu teoreme 1.78, tvrđenje pod A je tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Furijeova metoda razdvajanja promenljivih je postupak za rešavanje linearne parcijalne diferencijalne jednačine, tako da je tvrđenje pod C netačno. Talasna jednačina je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina, tako da se na nju može primeniti Furijeova metoda razdvajanja promenljivih, te je tvrđenje pod E tačno. Tvrđenje pod D je netačno jer se nepoznata funkcija $y(x,t)$ traži u obliku proizvoda realne funkcije po x i realne funkcije po t.

Test 6.2

1. C, E

Na osnovu definicije 1.68.

2. D, E

Nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, tako da je data jednačina obična diferencijalna jednačina, pa su tvrđenja pod A i B netačna. Najviši izvod u jednačini je drugi izvod, pa je data diferencijalna jednačina drugog reda. Tvrđenje pod E je tačno jer je jednačina i linearna po y, y' i y''. Po definiciji 1.71, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod C netačno.

3. B, E

Nepoznata funkcija je funkcija dve promenljive, tako da je data jednačina parcijalna diferencijalna jednačina, te su tvrđenja pod A i C netačna.

Najviši izvod u jednačini je drugi parcijalni izvod i jednačina je linearna po nepoznatoj funkciji i njenim izvodima, tako da je data jednačina drugog reda i linearna. Dakle, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod D netačno.

Data jednačina je jednačina (1.5.39) sa $a = c^2$, tako da je tvrđenje pod E tačno.

4. C, D

Dati uslovi su konturni uslovi jer se odnose na rubne tačke intervala $[0,\pi]$, tako da su tvrđenja pod C i D tačna, a tvrđenja pod A i B netačna.

Trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ zadovoljava jednačinu i uslove problema, tako da je rešenje problema, pa je tvrđenje pod E netačno.

5. A, C

Nepoznata funkcija je funkcija dve promenljive, tako da je data jednačina parcijalna diferencijalna jednačina, pa je tvrđenje pod A tačno, a pod B netačno.

Data jednačina je jednačina (1.5.38), tako da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod D i E netačna.

6. B, C

Jednačina pod A i B je $u''_{xx} - a^{-2}u'_t = 0$, pa je funkcija (1.5.37)

$$H(x,t) = 0^2 - 4\cdot 1\cdot 0 = 0,$$

što znači da je jednačina parabolična. Dakle, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod A netačno.

Jednačina pod C, D i E je $u''_{xx} - a^{-2}u''_{tt} = 0$, pa je funkcija (1.5.37)

$$H(x,t) = 0^2 - 4\cdot 1\cdot\left(-a^{-2}\right) = 4a^{-2} > 0.$$

Znači, jednačina je hiperbolična, te je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenja pod D i E su netačna.

7. A, D

Metoda razdvajanja promenljivih je postupak za rešavanje linearne parcijalne diferencijalne jednačine po kojem se rešenje traži u obliku proizvoda funkcija jedne promenljive, tako da je tvrđenje pod A tačno, a tvrđenje pod B netačno. U slučaju diferencijalne jednačine sa nepoznatom funkcijom dve promenljive, proizvod sadrži dve funkcije, jednu po jednoj promenljivoj, a drugu po drugoj, tako da je tvrđenje pod D tačno, a tvrđenja pod C i E su netačna.

8. A, E

Diferencijalna jednačina datog problema je homogena linearna obična diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, te je tvrđenje pod A tačno.

Na osnovu definicije sopstvene funkcije problema, trivijalno rešenje ne može biti sopstvena funkcija problema, pa je tvrđenje pod B netačno.

Na osnovu definicije sopstvene vrednosti problema, sopstvene vrednost nije funkcija, tako da je tvrđenje pod D netačno.

Da bi se utvrdila tačnost tvrđenja pod E, potrebno je proveriti da li za date vrednosti parametara k problem ima netvrivijalna rešenja. Rešenje diferencijalne jednačine datog problema se traži u obliku $y(x) = e^{rx}$, te je

$$y'(x) = re^{rx}, \ \ y''(x) = r^2e^{rx},$$

pa uvrštavanjem u jednačinu

$$r^2e^{rx} + k^2e^{rx} = 0, \ \text{ odnosno } \ e^{rx}\left(r^2 + k^2\right) = 0.$$

Pozitivnost e^{rx} daje da je $r^2 + k^2 = 0$. Rešenja te karakteristične jednačine su $r_{1/2} = \pm ki$, pa je opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \ \text{ za } \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pošto je $y' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx$, dati konturni uslovi daju

$$C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_1 \sin k\pi + C_2 \cos k\pi \ \text{ i } \ kC_1 \cos 0 - kC_2 \sin 0 = kC_1 \cos k\pi - kC_2 \sin k\pi.$$

Pošto za $k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm 2n, \ldots$, $n \in \mathbb{N}$, važi da je $\sin k\pi = 0$ i $\cos k\pi = 1$, konturni uslovi su zadovoljeni za proizvoljne $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Dakle, dati problem ima netrivijalna rešenja za posmatrane parametre k, te je tvrđenje pod E tačno.

9. A, B

Nepoznata funkcija date jednačine je funkcija dve promenljive, tako da je data jednačina parcijalna diferencijalna jednačina, pa je tvrđenje pod E netačno. Tvrđenje pod A je tačno jer je data jednačina linearna po u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy} i u''_{yy}.

Na osnovu definicije 1.77, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenja pod D i E su netačna.

10. B, D

(DJ) je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina, pa za nju važi princip superpozicije. Dakle, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenja pod A i E su netačna.

Na osnovu teoreme 1.78, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod C netačno.

Test 6.3

1. A, D

Na osnovu definicije 1.69, tvrđenja pod A i D su tačna, a tvrđenja pod B i C netačna.

Pošto je rešenje obične diferencijalne jednačine funkcija jedne promenljive, geometrijsko značenje tog rešenja je kriva u ravni, tako da je tvrđenja pod E netačno.

2. B, C

Nepoznata funkcija obične diferencijalne jednačine je funkcija jedne promenljive, tako da se jednačine pod A i D mogu isključiti.

Jednačina pod E ne sadrži izvode nepoznate funkcije, tako da nije diferencijalna jednačina, pa se i ona može isključiti.

Tvrđenja pod B i C su tačna jer su to jednačine sa nepoznatom funkcijom jedne promenljive i sadrže izvode nepoznate funkcije.

3. A, D

Date diferencijalne jednačine su linearne po nepoznatoj funkciji i njenim (parcijalnim) izvodima, tako da su sve linearne. U jednačinama pod B, C i E, slobodan član je nula, tako da su te jednačine homogene, te se mogu isključiti. Tvrđenja pod A i D su tačna jer je u tim jednačinama slobodan član redom funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x,t) = x$, pa su nehomogene.

4. A, C

Nepoznata funkcija jednačine pod D je funkcija jedne promenljive, tako da je ta jednačina obična diferencijalna jednačina, te se može isključiti. Sve ostale jednačine su parcijalne diferencijalne jednačine.

Jednačina pod B nije linearna zbog člana $\sqrt{y'_t}$, tako da se i ona može isključiti.

Može se isključiti i jednačina pod E jer nije linearna zbog člana $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2$ i funkcije $f(x,y)$.

Ostale su jednačine pod A i C koje su linearne jer su linearne po nepoznatoj funkciji i njenim parcijalnim izvodima. Dakle, tvrđenja pod A i C su tačna.

5. B

Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih se rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine sa nepoznatom funkcijom dve promenljive traži u obliku proizvoda dve funkcije jedne promenljive, gde je jedna funkcija funkcija po jednoj promenljivoj, a druga po drugoj, tako da je tvrđenje pod B tačno, a tvrđenja pod A, C i D su netačna.

Posmatrana diferencijalna jednačina može biti nehomogena, tako da u tom slučaju nema trivijalno rešenje, pa je tvrđenje pod E netačno.

6. C, E

Talasna jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina, te je tvrđenje pod A netačno.

Po definiciji 1.68, tvrđenje pod B je netačno, a tvrđenja pod C i E su tačna.

Tvrđenje pod D je netačno na osnovu definicije 1.72.

7. B, E

Jednačina pod A, B i C je obična diferencijalna jednačina. Pod A i C se uslovi odnose na dve tačke: $x = 0$ i $x = \pi$, rubove intervala $[0,\pi]$, tako da su to rubni uslovi, pa je u pitanju rubni problem. Znači, tvrđenja pod A i C su netačna. Tvrđenje pod B je tačno jer se uslov odnosi samo na jednu tačku, početnu tačku intervala $[0,\pi]$, te je u pitanju početni problem.

Jednačina pod D i E je parcijalna diferencijalna jednačina. Uslovi pod D su rubni uslovi jer su dati za $x = 0$ i $x = \pi$, tako da je tvrđenje pod D netačno. Problem pod E je početni problem jer je uslov dat za $t = 0$ i zbog toga je početni uslov. Dakle, tvrđenje pod E je tačno.

8. C, D

Trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ zadovoljava jednačinu i uslove problema, tako da je rešenje datog problema, te je tvrđenje pod B netačno.

Na osnovu definicije sopstvene vrednosti konturnog problema, tvrđenje pod C je tačno.

Za funkciju pod D važi da je

$$y'(x) = Ck\cos kx, \quad y''(x) = -Ck^2\sin kx,$$

pa se njenim uvrštavanjem u dati problem dobija

$$-Ck^2\sin kx + k^2C\sin kx = 0, \quad y(0) = C\sin 0 = 0, \quad y(\pi) = C\sin k\pi = 0.$$

To znači da je ta funkcija rešenje datog problema. Pošto nije trivijalno rešenje, sopstvena funkcija je datog problema. Znači, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenje pod A je netačno.

Za funkciju pod E važi da je $y(0) = C\cos 0 = C$, pa nije rešenje datog problema, tako da je tvrđenje pod E netačno.

9. A, E

Egzistencija i jedinstvenost važe za dobro postavljen problem, tako da su tačna tvrđenja pod A i E, te su ostala netačna.

10. D, E

Data jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, tako da njeno potpuno rešenje sadrži pet proizvoljnih konstanti, a opšte rešenje sadrži dve proizvoljne funkcije, pa su tvrđenja pod A, B i C netačna.

Za funkciju pod E važi da je

$$u'_x = 2x + y + A, \;\; u'_y = x + 2a^2 y + B,$$

$$u''_{xx} = 2, \;\; u''_{xy} = 1, \;\; u''_{yy} = 2a^2,$$

pa se njenim uvrštavanjem u datu diferencijalnu jednačinu dobija

$$a^2 \cdot 2 - 2a^2 = 0,$$

što implicira da zadovoljava datu jednačinu i time je njeno rešenje. Dakle, tvrđenje pod E je tačno.

Za funkciju pod D važi da je

$$u'_x = 2Ax + By + C, \;\; u'_y = Bx + 2Aa^2 y + D,$$

$$u''_{xx} = 2A, \;\; u''_{xy} = B, \;\; u''_{yy} = 2Aa^2,$$

pa se njenim uvrštavanjem u datu diferencijalnu jednačinu dobija

$$a^2 \cdot 2A - 2Aa^2 = 0,$$

što implicira da zadovoljava datu jednačinu i time je njeno rešenje. Znači, tvrđenje pod D je tačno.

Test 6.4

1. B, D

Na osnovu definicije 1.68.

2. D

Na osnovu definicije 1.68, tvrđenje pod A je netačno i rešenja obične i parcijalne diferencijalne jednačine su neuporediva, pa je i tvrđenje pod B netačno.

Na osnovu definicije 1.72, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenja pod C i E su netačna.

3. A, C

Nepoznata funkcija jednačina pod D i E je funkcija jedne promenljive, tako da su te jednačine obične diferencijalne jednačine, pa se mogu isključiti. Preostale jednačine su parcijalne diferencijalne jednačine.

Najviši izvod u jednačinama pod A i C je drugi parcijalni izvod, tako da su te jednačine drugog reda, pa su tvrđenja pod A i C tačna.

Najviši izvod u jednačini pod B je prvi parcijalni izvod, tako da je ta jednačina prvog reda, te je tvrđenje pod B netačno.

4. C, E

Rešenje konturnog problema je partikularno rešenje diferencijalne jednačine problema, tako da je tvrđenje pod A netačno.

Mešoviti problem čini parcijalna diferencijalna jednačina sa početnim i konturnim uslovima, tako da je tvrđenje pod C tačno, a tvrđenje pod B netačno.

Konturni, odnosno granični problem sa običnom diferencijalnom jednačinom ima uslove koji se odnose na dve tačke, tako da je tvrđenje pod E tačno, a tvrđenje pod D netačno.

5. B, E

Metoda razdvajanja promenljivih je postupak za rešavanje linearne parcijalne diferencijalne jednačine po kojem se rešenje traži u obliku proizvoda funkcija jedne promenljive, tako da je tvrđenje pod B tačno, tvrđenja pod A, C i D su netačna. U slučaju diferencijalne jednačine sa nepoznatom funkcijom dve promenljive, proizvod sadrži dve funkcije, jednu po jednoj promenljivoj, a drugu po drugoj, tako da je tvrđenje pod E je tačno.

6. C, D

Sve jednačine su diferencijalne jednačine. Jednačina pod B nije linearna jer nije linearna po nepoznatoj promenljivoj i njenim izvodima zbog $\sin y$, tako da je tvrđenje pod B netačno. Ostale jednačine su linearne.

U jednačinama pod A i E, slobodan član je nula, tako da su te jednačine homogene. Jednačine pod C i D su nehomogene jer im slobodan član nije nula. Dakle, tvrđenja pod A i E su netačna, a tvrđenja pod C i D tačna.

7. A, C

U graničnom problemu uslovi se odnose na vrednosti tražene funkcije i/ili njenih parcijalnih izvoda na rubu skupa D, tako da su tačna tvrđenja pod A i C, a ostala tvrđenja su netačna.

8. A, E

Date jednačine su parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, tako da njihovo opšte rešenje sadrži dve proizvoljne dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije jedne realne promenljive, a partikularno rešenje može imati najviše jednu proizvoljnu funkciju jedne realne promenljive. Stoga, tvrđenja pod B i D su netačna.

Pošto za $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$ važi da je

$$u'_x = 2xy - \frac{1}{2}y^2 + F'(x) \;\text{ i }\; u''_{xy} = 2x - y,$$

uvrštavanjem u datu jednačinu dobija se

$$2x - y - 2x + y = 0,$$

odnosno da je posmatrana funkcija u rešenje date jednačine. Funkcija u ima dve proizvoljne funkcije jedne realne promenljive, te je tvrđenje pod A tačno.

Funkcija u pod C se može dobiti od funkcije pod A za $F(x) = e^x$ i $G(y) = y^3 - 7$, tako da je i ona rešenje posmatrane jednačine, pa je tvrđenje pod C netačno.

Za funkciju $u = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + cx + dy + e$ važi da je

$$u'_x = 2a^2x + 2aby + c, \;\; u'_y = 2abx + 2b^2y + d,$$

$$u''_{xx} = 2a^2, \;\; u''_{xy} = 2ab, \;\; u''_{yy} = 2b^2,$$

pa se uvrštavanjem u datu jednačinu dobija

$$2a^2 \cdot 2b^2 - (2ab)^2 = 0,$$

što je identitet, te je funkcija u rešenje posmatrane jednačine. Pošto rešenje ima pet proizvoljnih konstanti, ono je potpuno. Dakle, tvrđenje pod E je tačno.

9. A, B

Funkcija u je funkcija dve promenljive i u jednačini je drugi parcijalni izvod najviši red izvoda, tako da je data jednačina parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda. Data jednačina je linearna jer je linearna po u i njenim parcijalnim izvodima. Znači, tvrđenja pod C i D su netačna.

Funkcija (1.5.37) za datu jednačinu je

$$H(x,y) = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0,$$

što znači da je jednačina eliptična, pa je tvrđenje pod A tačno.

Za $f(x,y) \equiv 0$, slobodan član je nula, tako da je jednačina homogena, te je tvrđenje pod B tačno.

Pošto funkcija f nije identički jednaka nuli, funkcija $u(x,y) \equiv 0$ ne zadovoljava datu jednačinu, tako da trivijalno rešenje nije rešenje date jednačine, pa je tvrđenje pod E netačno.

10. B, C

Trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ zadovoljava jednačinu i uslove problema, tako da je rešenje datog problema, pa je tvrđenje pod A netačno.

Data jednačina je linearna obična diferencijalna jednačina drugog reda, a dati uslovi su konturni uslovi jer se odnose na dve tačke. Uslovi zapisani u obliku (1.5.36) su

$$y(0) = 0 \ \text{ i } \ y(\pi) = 0,$$

tako da su u pitanju homogeni uslovi, pa je tvrđenje pod B tačno.

Tvrđenje pod D je netačno jer sopstvena vrednost problema nije funkcija.

Funkcija $y = C \cdot \sin 21x$ je rešenje jednačine $y'' + 21^2 y = 0$ jer važi da je

$$y' = 21C \cdot \cos 21x \ \text{ i } \ y'' = -21^2 C \cdot \sin 21x$$

pa se uvrštavanjem u jednačinu dobija

$$-21^2 C \cdot \sin 21x + 21^2 C \cdot \sin 21x = 0,$$

što je identitet. Dati uslovi su takođe zadovoljeni, $y(0) = C \cdot \sin 0 = 0$, $y(\pi) = C \cdot \sin 21\pi = 0$, te je tvrđenje pod C tačno.

Funkcija $y = C \cdot \cos 12x$ ne zadovoljava date uslove jer je $y(0) = C \cdot \cos 0 = C$. To znači da nije rešenje datog problema za $k = 12$, a samim tim ni karakteristična funkcija tog problema. Dakle, tvrđenje pod E je netačno.

Test 6.5

1. B, E

Za obične diferencijalne jednačine mogu biti definisani početni i konturni problemi, dok za parcijalne diferencijalne jednačine mogu biti definisani početni, konturni i mešoviti problemi, pri čemu mešoviti problemi imaju i početne i konturne uslove. To znači da su tvrđenja pod A i C netačna, a tvrđenje pod B je tačno.

Uslovi u konturnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na dve tačke, pa je tvrđenje pod D netačno.

Uslovi u početnom problemu sa običnom diferencijalnom jednačinom se odnose na jednu tačku, te je tvrđenje pod E tačno.

2. C, E

Parcijalna diferencijalna jednačina sa početnim uslovima čini početni problem, te je tvrđenje pod A netačno.

Na osnovu definicije 1.72, tvrđenje pod B je netačno.

Na osnovu teoreme 1.78, tvrđenje pod C je tačno.

Pošto su u_1 i u_2 rešenja jednačine $u''_{xx} + u = x$,

$$(u_1)''_{xx} + u_1 = x \ \text{ i } \ (u_2)''_{xx} + u_2 = x.$$

Za funkciju $u = u_1 + u_2$ važi da je

$$u'_x = (u_1)'_x + (u_2)'_x \ \text{ i } \ u''_{xx} = (u_1)''_{xx} + (u_2)''_{xx},$$

pa se uvrštavanjem u posmatranu jednačinu dobija

$$(u_1)''_{xx} + (u_2)''_{xx} + u_1 + u_2 = x, \ \text{ odnosno } 2x = x,$$

što je kontradikcija. Znači, funkcija u nije rešenje posmatrane jednačine, te je tvrđenje pod D netačno.

Obična diferencijalna jednačina sa graničnim uslovima čini granični problem, a rubni problem i granični problem su ekvivalentni termini, tako da je tvrđenje pod E tačno.

3. A, D

   Na osnovu definicije 1.68, tvrđenja pod A i D su tačna, a tvrđenja pod B i C netačna.

   Tvrđenje pod E je netačno jer je funkcija y napisana u eksplicitnom obliku.

4. B, D

   Na osnovu definicije 1.76, tvrđenje pod A je netačno, a tvrđenja pod B tačno.

   Na osnovu definicije 1.72, tvrđenje pod D je tačno, a tvrđenja pod C i E su netačna.

5. A, C

   Uslovi pod A i C su konturni uslovi jer su dati za tačke sa $x = 0$ i $x = 1$, tako da su tvrđenja pod A i C tačna.

   Uslovi pod B i E su početni uslovi jer su dati za tačke sa $t = 0$, tako da su tvrđenja pod B i E netačna.

   Uslovi pod D su početni uslovi jer su dati za tačke sa $x = 0$, tako da je tvrđenje pod D netačno.

6. A, E

   Sve date jednačine su diferencijalne jednačine. Jednačine pod B i C nisu linearna zbog članova $y' \cos y$ i $y'_x y'_t$, redom, tako da su tvrđenja pod B i C netačna. Ostale jednačine su linearne.

   U jednačinama pod A i E, slobodan član je nula, tako da su te jednačine homogene. Jednačina pod D je nehomogena jer joj je slobodan član $-x$. Dakle, tvrđenja pod A i E su tačna, a tvrđenje pod D je netačno.

7. B, C

   Data jednačina je ekvivalentna jednačini (1.5.38), tako da je talasna jednačina. Dakle, tvrđenje pod B je tačno, a tvrđenje pod A netačno.

   Funkcija u je funkcija dve promenljive i u jednačini je drugi parcijalni izvod najviši red izvoda, tako da je data jednačina parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda. Data jednačina je linearna jer je linearna po nepoznatoj funkciji i njenim parcijalnim izvodima. Slobodan član jednačine je nula, tako da je jednačina homogena. Znači, tvrđenje pod C je tačno, a tvrđenje pod D netačno.

   Po teoremi 1.78, za homogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda važi princip superpozicije, tako da je tvrđenje pod E netačno.

8. D, E

   Nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, tako da je jednačina problema obična diferencijalna jednačina i to drugog reda jer je drugi zvod najviši red izvoda u jednačini. Uslovi se odnose na dve tačke, $x = 0$ i $x = \pi$, tako da su u pitanju konturni uslovi, a samim tim i konturni problem. Znači, tvrđenje pod A je netačno. Na osnovu (1.5.36), dati uslovi su homogeni, pa je tvrđenje pod B netačno.

   Za funkciju $y = C \cdot \cos 7x$ važi da ne zadovoljava date uslove jer je $y(0) = C \cdot \cos 0 = C$, a C ne mora biti nula, pa je tvrđenje pod C netačno.

   Za funkciju $y = C \cdot \sin 2x$ važi da je

   $$y' = 2C \cdot \cos 2x, \quad y'' = -4C \cdot \sin 2x,$$

   pa se uvrštavanjem u jednačinu $y'' + 2^2 y = 0$ dobija

   $$-4C \cdot \sin 2x + 4C \cdot \sin 2x = 0,$$

   što je identitet, te je y rešenje posmatrane diferencijalne jednačine. Pored toga, y zadovoljava i date uslove jer je

   $$y(0) = C \cdot \sin 0 = 0 \;\text{ i }\; y(\pi) = C \cdot \sin 2\pi = 0.$$

   Dakle, tvrđenje pod D je tačno.

   Funkcija $y(x) \equiv 0$ zadovoljava datu jednačinu i uslove, tako da je trivijalno rešenje rešenje datog problema, pa je tvrđenje pod E tačno.

9. A, B

Data jednačina je linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, tako da je tvrđenje pod E netačno. Funkcija (1.5.37) za datu jednačinu je

$$H(x,y) = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0,$$

što znači da je jednačina eliptična, te je tvrđenje pod A tačno.

Za funkciju $u = \sin(\pi x)\left(C_1 e^{\pi y} + C_2 e^{-\pi y}\right)$ važi da je

$$u'_x = \pi \cos(\pi x)\left(C_1 e^{\pi y} + C_2 e^{-\pi y}\right), \;\; u'_y = \sin(\pi x)\left(\pi C_1 e^{\pi y} - \pi C_2 e^{-\pi y}\right),$$

$$u''_{xx} = -\pi^2 \sin(\pi x)\left(C_1 e^{\pi y} + C_2 e^{-\pi y}\right), \;\; u''_{yy} = \sin(\pi x)\left(\pi^2 C_1 e^{\pi y} + \pi^2 C_2 e^{-\pi y}\right),$$

pa se uvrštavanjem u jednačinu $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ dobija

$$-\pi^2 \sin(\pi x)\left(C_1 e^{\pi y} + C_2 e^{-\pi y}\right) + \sin(\pi x)\left(\pi^2 C_1 e^{\pi y} + \pi^2 C_2 e^{-\pi y}\right) = 0,$$

što je identitet, te je tvrđenje pod B tačno.

Za funkciju $u = \sin x \cos y$ važi da je

$$u'_x = \cos x \cos y, \;\; u'_y = -\sin x \sin y,$$

$$u''_{xx} = -\sin x \cos y, \;\; u''_{yy} = -\sin x \cos y,$$

pa se uvrštavanjem u jednačinu $u''_{xx} + u''_{yy} = f(x,y)$ dobija

$$-\sin x \cos y - \sin x \cos y = f(x,y),$$

odnosno

$$-2 \sin x \cos y = f(x,y).$$

Identitet se ne može dobiti ni za $f(x,y) = 2 \sin x \cos y$, ni za $f(x,y) \equiv 0$, tako da su tvrđenja pod C i D netačna.

10. C

Furijeova metoda razdvajanja promenljivih je postupak za rešavanje linearne parcijalne diferencijalne jednačine po kojem se rešenje traži u obliku proizvoda funkcija jedne promenljive, tako da je tvrđenje pod C tačno, a ostala su netačna.

Test 6.6

1. B, C 2. A, D 3. B, E 4. A, C 5. A, E 6. D 7. B, E 8. B, D 9. C 10. A, B

Test 6.7

1. A, C 2. C, E 3. B, E 4. A, C 5. B, D 6. A, E 7. A, B 8. B, E 9. A, D 10. C, D

Test 6.8

1. C, E 2. B, D 3. A, B 4. E 5. B, C 6. A, E 7. A, D 8. C, D 9. A, C 10. B

Test 6.9

1. A, E 2. B, E 3. A, C 4. D 5. A, D 6. C, D 7. C, E 8. B, D 9. B, C 10. B

Test 6.10

1. A, B 2. B, E 3. A, C 4. D 5. A, E 6. C, D 7. B, C 8. C, E 9. A, D 10. E

Glava 4

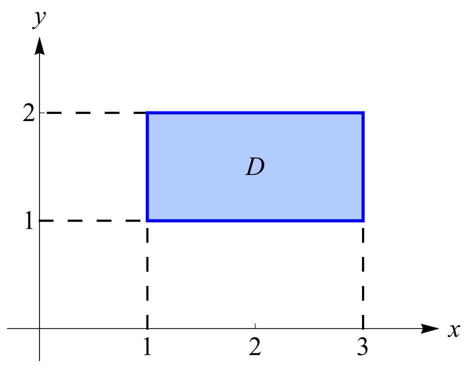
Rešeni reprezentativni ispitni zadaci

4.1 Dvostruki integrali

1. Izračunati dvostruki integral

$$\iint\limits_D \left(\frac{e^{-x}}{y} + \frac{y^3}{x^2}\right) dx\, dy,$$

gde je oblast integracije D data na slici 4.1.1.



Slika 4.1.1

Rešenje. Na osnovu slike, zaključujemo da je oblast integracije pravougaonik sa stranicama koje leže na pravama: $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$ i $y = 4$. To znači da je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2\}$, pa je

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \left(\frac{e^{-x}}{y} + \frac{y^3}{x^2}\right) dx\, dy = \int_1^3 \left(\int_1^2 \left(e^{-x} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{x^2} \cdot y^3\right) dy\right) dx = \\
&= \int_1^3 \left[e^{-x} \ln|y| + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_1^2 dx = \int_1^3 \left(e^{-x} \ln 2 + \frac{4}{x^2} - e^{-x} \ln 1 - \frac{1}{4x^2}\right) dx = \\
&= \int_1^3 \left(e^{-x} \ln 2 + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^3 \left(e^{-x} \ln 2 + \frac{15}{4} x^{-2}\right) dx = \ln 2 \int_1^3 e^{-x}\, dx + \frac{15}{4} \int_1^3 x^{-2}\, dx.
\end{aligned}$$

Smenom $t = -x$, koristeći da je $dt = -dx$, dobija se

$$\int e^{-x}\, dx \;=\; -\int e^t\, dt = -e^t + C = -e^{-x} + C,$$

gde je C proizvoljan realan broj, pa je

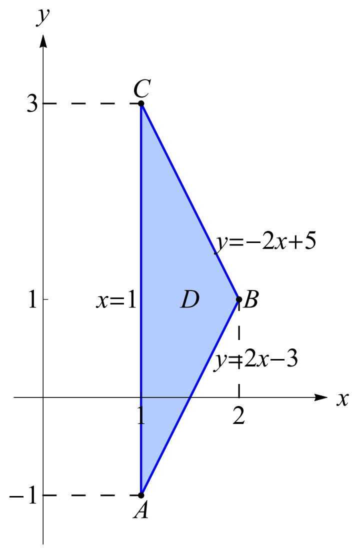
$$\begin{aligned}
I &= \ln 2 \cdot \left[-e^{-x}\right]\Big|_1^3 + \frac{15}{4}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]\Bigg|_1^3 = -\ln 2 \cdot \left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e}\right) - \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \\
&= \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}\right) \ln 2 + \frac{5}{2} \approx 2.72048.
\end{aligned}$$

Integral I se može izračunati i tako da se prvo integrali po promenljivoj x, a potom po promenljivoj y. U tom slučaju bi bilo

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^3 \left(\frac{1}{y} \cdot e^{-x} + y^3 \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx\right) dy.$$

2. Izračunati integral
$$\iint\limits_D (2x+3y^2+2)\,dx\,dy,$$
gde je oblast D trougao ABC sa $A(1,-1)$, $B(2,1)$ i $C(1,3)$. Nacrtati oblast integracije.

Rešenje. Oblast integracije je prikazana na slici 4.1.2.
Stranica AC leži na pravoj $x=1$. Jednačina prave određene tačkama A i B, prave p_1, je
$$p_1: \ \frac{y-(-1)}{1-(-1)} = \frac{x-1}{2-1},$$
odnosno
$$p_1: \ y = 2x-3.$$
Jednačina prave određene tačkama B i C, prave p_2, je
$$p_2: \ \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{1-2},$$
te je
$$p_2: \ y=-2x+5.$$
Pošto se oblast D nalazi u traci određenoj pravama $x=1$ i $x=2$ i odozdo je ograničena pravom p_1, a odozgo pravom p_2,



Slika 4.1.2

$$\text{za svako } \ x\in[1,2] \ \text{ važi da je } \ 2x-3\le y\le 5-2x.$$

To znači da je
$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (2x+3y^2+2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{2x-3}^{5-2x} (2x+3y^2+2)\,dy\right) dx = \\
&= \int_1^2 \left[(2x+2)\,y + 3\cdot\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{2x-3}^{5-2x} dx = \int_1^2 \left[(2x+2)\,y+y^3\right]\Big|_{2x-3}^{5-2x} dx = \\
&= \int_1^2 \left((2x+2)(5-2x)+(5-2x)^3-(2x+2)(2x-3)-(2x-3)^3\right) dx = \\
&= \int_1^2 \left(-4x^2+6x+10+125-150x+60x^2-8x^3-4x^2+2x+6-8x^3+36x^2-54x+27\right) dx = \\
&= \int_1^2 \left(-16x^3+88x^2-196x+168\right) dx = \left[-16\cdot\frac{x^4}{4}+88\cdot\frac{x^3}{3}-196\cdot\frac{x^2}{2}+168x\right]\Bigg|_1^2 = \\
&= \left[-4x^4+\frac{88}{3}x^3-98x^2+168x\right]\Bigg|_1^2 = -64+\frac{88}{3}\cdot 8-98\cdot 4+168\cdot 2-\left(-4+\frac{88}{3}-98+168\right) = \\
&= \frac{58}{3} = 19\,\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Integral I bi se mogao izračunati i tako da se prvo integrali po promenljivoj x, a potom po promenljivoj y. Međutim, u tom slučaju se oblast D treba podeliti na dva dela, na oblasti D_1 i D_2 takve da je
$$D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le y\le 1,\ 1\le x\le \frac{y+3}{2}\right\} \ \text{ i } \ D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le y\le 3,\ 1\le x\le \frac{5-y}{2}\right\}.$$
Tada, osobina (1.1.3) daje
$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_1^{\frac{y+3}{2}} (2x+3y^2+2)\,dx\right) dy + \int_1^3 \left(\int_1^{\frac{5-y}{2}} (2x+3y^2+2)\,dx\right) dy.$$

3. Izračunati integral

$$\int_1^e \left(\int_1^2 \frac{(x-1)\,\ln y}{x^3+4x^2+5x+2}\,dx \right) dy.$$

Rešenje. Pošto je oblast integracije datog integrala pravougaonik $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2, 1 \le y \le e\}$, a podintegralna funkcija se može napisati kao proizvod jedne funkcije po promenljivoj x i druge funkcije po promenljivoj y, na osnovu teoreme 1.10, dati integral je jednak proizvodu dva određena integrala.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \left(\int_1^2 \frac{(x-1)\,\ln y}{x^3+4x^2+5x+2}\,dx \right) dy = \int_1^e \left(\int_1^2 \frac{x-1}{x^3+4x^2+5x+2} \cdot \ln y\,dx \right) dy = \\ &= \left(\int_1^2 \frac{x-1}{x^3+4x^2+5x+2} dx \right) \left(\int_1^e \ln y\,dy \right) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Drugi integral iz (4.1.1) se može izračunati parcijalnom integracijom sa

$$u = \ln y \ \text{ i } \ dv = dy, \ \text{ odnosno } \ du = \frac{1}{y}\,dy \ \text{ i } \ v = \int dy = y,$$

te se dobija

$$\int_1^e \ln y\,dy = \Big[y\,\ln y \Big]\Big|_1^e - \int_1^e dy = e\,\ln e - \ln 1 - \Big[y \Big]\Big|_1^e = e - 0 - (e-1) = 1.$$

Podintegralna funkcija prvog integrala iz (4.1.1) je prava racionalna funkcija, pa se rastavlja na zbir parcijalnih razlomaka. Kako je skup $\{1,-1,2,-2\}$ skup mogućih racionalnih korena polinoma u imeniocu, proverom uz pomoć Hornerove šeme

-1	1	4	5	2
-1	1	3	2	0
	1	2	0	

dobija se da je $x^3+4x^2+5x+2 = (x+1)^2(x+2)$. Tako je

$$\frac{x-1}{x^3+4x^2+5x+2} = \frac{x-1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2},$$

te mora da važi da je

$$x-1 = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2.$$

Sa $x=-1$, $x=-2$ i $x=0$, dobija se sistem jednačina

$$-2 = B, \ \ -3 = C, \ \ -1 = 2A + 2B + C,$$

čije je rešenje

$$A = 3, \ \ B = -2, \ \ C = -3.$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x-1}{x^3+4x^2+5x+2}\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+2} \right) dx = \\ &= 3\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - 3\int_1^2 \frac{1}{x+2}\,dx \end{aligned}$$

Smenama:

$$t = x+1 \ \text{ i } \ s = x+2, \ \text{ pri čemu je } \ dt = dx \ \text{ i } \ ds = dx,$$

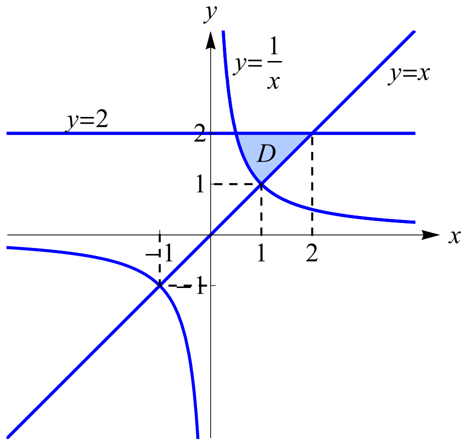
dobija se

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x-1}{x^3+4x^2+5x+2}\,dx &= 3\int_2^3 \frac{1}{t}\,dt - 2\int_2^3 \frac{1}{t^2}\,dt - 3\int_3^4 \frac{1}{s}\,ds = 3\Big[\ln|t|\Big]\Big|_2^3 - 2\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]\Big|_2^3 - 3\Big[\ln|s|\Big]\Big|_3^4 = \\ &= 3\,(\ln 3 - \ln 2) + 2\left[\frac{1}{t}\right]\Big|_2^3 - 3\,(\ln 4 - \ln 3) = \\ &= 3\,(\ln 3 - \ln 2 - (\ln 4 - \ln 3)) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 3\ln\frac{9}{8} - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

Dakle, traženi integral je $I = 3\ln\frac{9}{8} - \frac{1}{3} \approx 0.02002$.

4. Izračunati dvostruki integral
$$I=\iint\limits_{D} \ln y\,dx\,dy,$$
gde je oblast D ograničena krivama $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x$ i $y=2$.

Rešenje. Da bi se odredile granice datog integrala, potrebno je nacrtati grafik podintegralne oblasti D. Presečne tačke krivih koje određuju oblast D dobijaju se rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina.
Tačke preseka krivih $y=\frac{1}{x}$ i $y=x$ dobijaju se iz jednačine
$$\frac{1}{x}=x,$$
što je ekvivalentno sa $x^2=1$ za $x\neq 0$, pa je $x=1$ ili $x=-1$.
Znači, tražene presečne tačke su $(-1,-1)$ i $(1,1)$.
Presek krivih $y=\frac{1}{x}$ i $y=2$ je tačka $\left(\frac{1}{2},2\right)$, dok je tačka $(2,2)$ presek krivih $y=x$ i $y=2$.



Slika 4.1.3

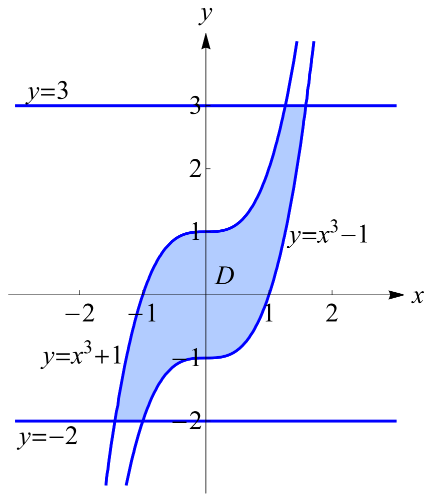
Oblast D je prikazana na slici 4.1.3. Kako je oblast D nalazi u traci određenoj pravama $y=1$ i $y=2$ i sa leve strane je ograničena krivom $x=\frac{1}{y}$, a sa desne strane pravom $x=y$,
$$\text{za svako } y\in[1,2] \text{ važi da je } \frac{1}{y}\le x\le y.$$
Zbog toga je
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2\left(\int_{\frac{1}{y}}^{y}\ln y\,dx\right)dy=\int_1^2\ln y\left(\int_{\frac{1}{y}}^{y}dx\right)dy=\int_1^2\ln y\cdot\Big[x\Big]\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}dy=\\ &=\int_1^2\ln y\cdot\left(y-\frac{1}{y}\right)dy=\int_1^2 y\ln y\,dy-\int_1^2\frac{\ln y}{y}\,dy.\end{aligned}$$
Prvi integral se može odrediti parcijalnom integracijom, koristeći da je
$$u=\ln y,\ \ dv=ydy,\ \text{ pa }\ du=\frac{1}{y}dy,\ \ v=\int ydy=\frac{y^2}{2}.$$
Drugi integral se može izračunati uvođenjem smene
$$t=\ln y,\ \text{ za koju je }\ dt=\frac{1}{y}dy.$$
Tako je
$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{y^2}{2}\ln y\right]\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 y\,dy-\int_0^{\ln 2}t\,dt=2\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^2-\left[\frac{t^2}{2}\right]\Big|_0^{\ln 2}=\\ &=2\ln 2-\frac{1}{4}(4-1)-\frac{1}{2}\left(\ln^2 2-\ln^2 1\right)=2\ln 2-\frac{3}{4}-\frac{\ln^2 2}{2}\approx 0.39607.\end{aligned}$$

Integral I se može odrediti i podelom oblasti D na oblasti
$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ \frac{1}{x}\le y\le 2\right\}\ \text{ i }\ D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x\le 2,\ x\le y\le 2\right\},$$
pa je tada
$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2}\ln y\,dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_x^2\ln y\,dy\right)dx.$$

5. Izračunati veličinu površine zatvorene oblasti ograničene krivama: $y = x^3 + 1$, $y = x^3 - 1$, $y = -2$ i $y = 3$ (koristeći dvostruki integral). Skicirati datu oblast.

Rešenje. Neka je sa D označena data zatvorena oblast. Grafik oblasti D je prikazan na slici 4.1.4, a njena površina je

$$P = \iint_D dxdy.$$



Slika 4.1.4

Oblast D se nalazi u traci određenoj pravama $y = -2$ i $y = 3$, sa leve strane je ograničena krivom $y = x^3 + 1$, odnosno $x = \sqrt[3]{y-1}$, a sa desne strane krivom $y = x^3 - 1$, odnosno $x = \sqrt[3]{y+1}$, tako da

$$\text{za svako } y \in [-2, 3] \text{ važi da je } \sqrt[3]{y-1} \le x \le \sqrt[3]{y+1}.$$

To znači da je

$$P = \int_{-2}^{3} \left(\int_{\sqrt[3]{y-1}}^{\sqrt[3]{y+1}} dx \right) dy = \int_{-2}^{3} x \Big|_{\sqrt[3]{y-1}}^{\sqrt[3]{y+1}} dy =$$

$$= \int_{-2}^{3} \left(\sqrt[3]{y+1} - \sqrt[3]{y-1} \right) dy = \int_{-2}^{3} (y+1)^{\frac{1}{3}}\, dy - \int_{-2}^{3} (y-1)^{\frac{1}{3}}\, dy.$$

Smenama

$$t = y + 1 \text{ i } s = y - 1,$$

koristeći da je

$$dt = dy \text{ i } ds = dy,$$

dobija se

$$P = \int_{-1}^{4} t^{\frac{1}{3}} dt - \int_{-3}^{2} s^{\frac{1}{3}} ds = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^{4} - \frac{3}{4} s^{\frac{4}{3}} \Big|_{-3}^{2} = \frac{3}{4} \left(4^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}} - \left(2^{\frac{4}{3}} - (-3)^{\frac{4}{3}} \right) \right) =$$

$$= \frac{3}{4} \left(4\sqrt[3]{4} - 1 - \left(2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{3} \right) \right) = \frac{3}{4} \left(4\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2} - 1 \right) \approx 5.36738.$$

Dakle, tražena površina je $P \approx 5.36738$.

Površina se može izračunati i obrnutim redosledom integraljenja. U tom slučaju je potrebno oblast D podeliti na tri podoblasti pravama $x = -1$ i $x = \sqrt[3]{2}$ (slika 4.1.5). Prva podoblast se nalazi u traci određenoj pravama $x = -\sqrt[3]{3}$ i $x = -1$, sa donje strane je ograničena pravom $y = -2$, a sa gornje strane krivom $y = x^3 + 1$, pa

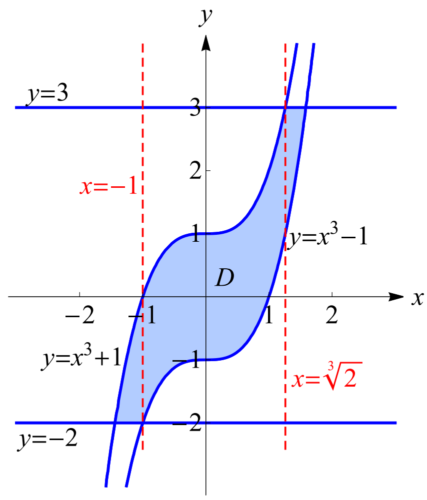
$$\text{za svako } x \in [-\sqrt[3]{3}, -1] \text{ važi da je } -2 \le y \le x^3 + 1.$$

Druga podoblast je u traci određenoj pravama $x = -1$ i $x = \sqrt[3]{2}$, sa donje strane je ograničena krivom $y = x^3 - 1$, a sa gornje strane krivom $y = x^3 + 1$, tako da

$$\text{za svako } x \in [-1, \sqrt[3]{2}] \text{ važi da je } x^3 - 1 \le y \le x^3 + 1.$$

Traka određena pravama $x = \sqrt[3]{2}$ i $x = \sqrt[3]{4}$ sadrži treću podoblast koja je sa donje strane ograničena krivom $y = x^3 - 1$, a sa gornje strane pravom $y = 3$, te

$$\text{za svako } x \in [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}] \text{ važi da je } x^3 - 1 \le y \le 3,$$



Slika 4.1.5

što implicira da je

$$P = \int_{-\sqrt[3]{3}}^{-1} \left(\int_{-2}^{x^3+1} dy \right) dx + \int_{-1}^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_{x^3-1}^{x^3+1} dy \right) dx + \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{4}} \left(\int_{x^3-1}^{3} dy \right) dx.$$

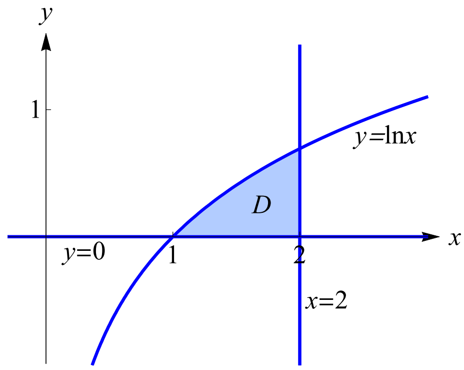
6. Izračunati dvostruki integral

$$\iint_D \frac{x^2y + xy + y}{\ln x}\,dx\,dy,$$

gde je oblast D ograničena krivama $y = \ln x$, $y = 0$ i $x = 2$. Nacrtati oblast integracije.

Rešenje. Označimo dati integral sa I.

$$I = \iint_D \frac{x^2y + xy + y}{\ln x}\,dx\,dy = \iint_D \frac{(x^2 + x + 1)\,y}{\ln x}\,dx\,dy,$$



Slika 4.1.6

Oblast integracije je prikazana na slici 4.1.6. Skup D se nalazi u traci između pravih $x = 1$ i $x = 2$ i između krivih $y = 0$ i $y = \ln x$, tako da

$$\text{za svako } x \in [1,2] \text{ važi da je } 0 \le y \le \ln x.$$

To implicira da je

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_0^{\ln x} \frac{(x^2+x+1)\,y}{\ln x}\,dy \right) dx = \int_1^2 \frac{x^2+x+1}{\ln x} \left(\int_0^{\ln x} y\,dy \right) dx = \\ &= \int_1^2 \frac{x^2+x+1}{\ln x} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_0^{\ln x} dx = \int_1^2 \frac{x^2+x+1}{\ln x} \cdot \frac{\ln^2 x}{2}\,dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2+x+1) \ln x\,dx. \end{aligned}$$

Dobijeni integral se može izračunati parcijalnom integracijom, uzimajući da je

$$u = \ln x, \;\; dv = (x^2 + x + 1)\,dx,$$

odakle je

$$du = \frac{1}{x}\,dx, \;\; v = \int (x^2+x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x.$$

Tako da je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\left[\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \right]\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \cdot \frac{1}{x}\,dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\left(\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) \ln 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) \ln 1 \right) - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 1 \right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{3} \ln 2 - \left[\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + x \right]\Bigg|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{3} \ln 2 - \left(\frac{8}{9} + 1 + 2 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1 \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{3} \ln 2 - \frac{91}{36} \right) = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{91}{72} \approx 1.04660. \end{aligned}$$

S obzirom na to da se oblast D nalazi i u traci između pravih $y = 0$ i $y = \ln 2$ i između krivih $x = e^y$ i $x = 2$,

$$\text{za svako } y \in [0, \ln 2] \text{ važi da je } e^y \le x \le 2,$$

pa je

$$I = \int_0^{\ln 2} y \left(\int_{e^y}^2 \frac{x^2+x+1}{\ln x}\,dx \right) dy.$$

Međutim, integraljenje u ovom redosledu je znatno komplikovanije.

7. Izračunati integral
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x+1}^{x+2}\frac{2(y-x)^5}{x^2-4}\,dy\right)dx.$$

Rešenje. Neka je dati integral označen sa I.
$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x+1}^{x+2}\frac{2(y-x)^5}{x^2-4}\,dy\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}\left(\int_{x+1}^{x+2}(y-x)^5\,dy\right)dx$$

Smenom
$$t = y - x, \text{ koristeći da je } dt = dy,$$

dobija se
$$I = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}\left(\int_{1}^{2}t^5\,dt\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}\left[\frac{t^6}{6}\right]\Bigg|_{1}^{2}dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}\left(2^6-1\right)dx = 21\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}dx.$$

Podintegralna funkcija preostalog integrala je prava racionalna funkcija, pa se rastavlja na zbir parcijalnih razlomaka.
$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2},$$

pa mora da važi da je
$$1 = A(x+2)+B(x-2).$$

Pošto su sa obe strane jednakosti polinomi i za njih važi da su jednaki za svako x, uzimajući da je
$$x = -2$$

dobija se
$$1 = -4B, \text{ odnosno da je } B = -\frac{1}{4}.$$

Za
$$x = 2$$

se dobija
$$1 = 4A, \text{ te je } A = \frac{1}{4}.$$

Tako je
$$I = 21\int_{-1}^{1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2}-\frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx = \frac{21}{4}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-2}\,dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}\,dx\right).$$

Oba integrala se mogu izračunati primenom smene. Za prvi integral smena je
$$p = x-2, \text{ sa } dp = dx,$$

dok je za drugi integral smena
$$q = x+2, \text{ sa } dq = dx,$$

te je
$$I = \frac{21}{4}\left(\int_{-3}^{-1}\frac{1}{p}\,dp-\int_{1}^{3}\frac{1}{q}\,dq\right) = \frac{21}{4}\left(\ln|p|\Big|_{-3}^{-1}-\ln|q|\Big|_{1}^{3}\right) =$$
$$= \frac{21}{4}\left(\ln 1-\ln 3-(\ln 3-\ln 1)\right) = \frac{21}{4}\left(-2\ln 3\right) = -\frac{21}{2}\ln 3.$$

8. Koristeći dvostruki integral, odrediti veličinu zapremine zatvorene oblasti ograničene površima: $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, $x + y = 1$ i $z = 3 - y^2$.

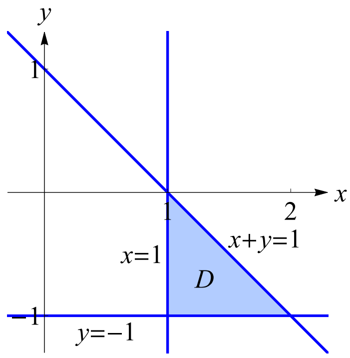
Rešenje. Neka je data oblast T. Površi $x = 1$, $y = -1$, $x + y = 1$ su ravni paralelne sa z-osom, tako da iz ravni $z = 0$ isecaju trougao D ograničen pravama:

$$x = 1, \quad y = -1, \quad x + y = 1,$$

čiji je grafik prikazan na slici 4.1.7. Pošto za tačke oblasti D važi da je $y \in [-1, 0]$ i još važi da je

$$3 - y^2 \geq 2 > 0 \ \text{ za } \ y \in [-1, 0],$$

telo T je odozdo ograničeno s ravni $z = 0$, a odozgo paraboličkim cilindrom $z = 3 - y^2$, dok je sa strane ograničeno ravnima: $x = 1$, $y = -1$, $x + y = 1$.



Slika 4.1.7

To znači da je projekcija tela T na xOy ravan njegova osnova D, te se zapremina tela T može odrediti formulom

$$V = \iint_D \left(3 - y^2\right) dx\, dy.$$

Kako je presek pravih $y = -1$ i $x + y = 1$ tačka $(2, -1)$, oblast D se nalazi u traci određenoj pravama $x = 1$ i $x = 2$, te je čine tačke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje važi:

$$-1 \leq y \leq 1 - x, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \int_{-1}^{1-x} \left(3 - y^2\right) dy\, dx = \int_1^2 \left[3y - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1-x} dx = \\
&= \int_1^2 \left(3(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3} - \left(-3 + \frac{1}{3}\right)\right) dx = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{17}{3} - 3x - \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3}\right) dx = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{16}{3} - 2x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right) dx = \\
&= \left[\frac{16}{3}x - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Dakle, zapremina datog tela je $V = \frac{5}{4}$.

9. Utvrditi veličinu površine zatvorene oblasti D koja je ograničena krivama: $x^2+y^2-16=0$, $y=-x$ i $y=0$ i nalazi se u drugom kvadrantu. Nacrtati oblast integracije D.

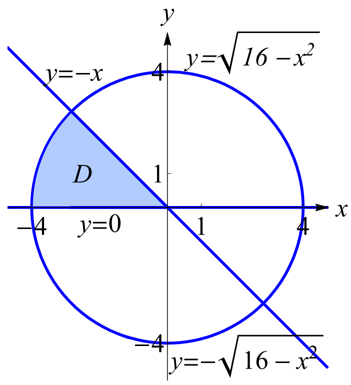
Rešenje. Oblast D je prikazana na slici 4.1.8, a njena površina dobija se na osnovu formule

$$P=\iint\limits_D dxdy.$$

S obzirom na to da je oblast integracije kružni isečak, praktično je preći na polarne koordinate. Smena na polarne koordinate r i φ je definisana sa

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ \text{pri čemu}\ \ r\in[0,\infty)\ \ \text{i}\ \ \varphi\in[0,2\pi].$$

Neka je S oblast integracije koja se nakon smene dobija od oblasti D. Jakobijan je



Slika 4.1.8

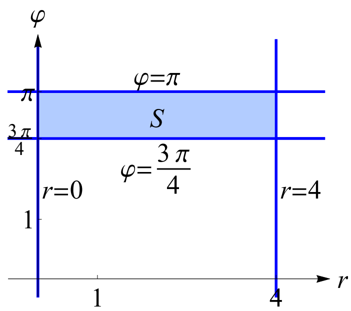
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$$

Kako je $r>0$, $|J|=|r|=r$, pa je

$$P=\iint\limits_S |J|\,dr\,d\varphi=\iint\limits_S r\,dr\,d\varphi.$$

Na osnovu grafika oblasti D mogu se utvrditi granice za promenljive r i φ. $r\in[0,4]$ jer je oblast D kružni isečak kruga sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 4. Ugao između prave $y=-x$ i x-ose je $\operatorname{arctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$ (jer je koeficijent pravca prave -1), a oblast D je u drugom kvadrantu ograničena pravama $y=-x$ i $y=0$, tako da $\varphi\in[\frac{3\pi}{4},\pi]$. To znači da je oblast S pravougaonik prikazan na slici 4.1.9, odnosno

$$S=\left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le 4,\ \frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\pi\right\},$$



Slika 4.1.9

pa je

$$P=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(\int_0^4 r\,dr\right)d\varphi=\left(\int_0^4 r\,dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\varphi\right)=\left[\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_0^4\cdot\left[\varphi\right]\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=8\cdot\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=2\pi.$$

Znači, tražena površina je $P=2\pi$.

Granice za promenljive r i φ se mogu odrediti uvođenjem smene u jednačine graničnih krivih oblasti D, uzevši u obzir da uslov da je oblast D u drugom kvadrantu definiše da je $\varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Pošto je

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2,$$

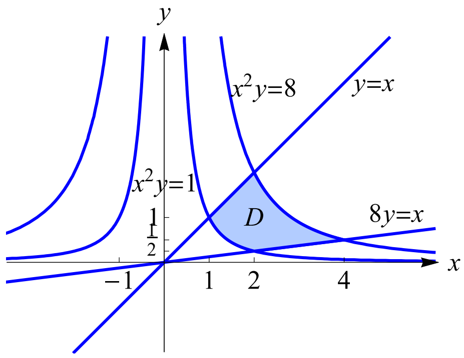
kružnica $x^2+y^2=16$ daje $r^2=16$, odnosno pravu $r=4$. Smenom, prava $y=0$ postaje $r\sin\varphi=0$, što daje $r=0$ i $\sin\varphi=0$, odnosno prave $r=0$ i $\varphi=\pi$. Prava $y=-x$ u $rO\varphi$ kooordinatnom sistemu ima jednačinu $r\sin\varphi=-r\cos\varphi$, odnosno $r(\sin\varphi+\cos\varphi)=0$, što daje $r=0$ i $\sin\varphi+\cos\varphi=0$. Poslednja jednačina je zadovoljena ako je $\sin\varphi=-\cos\varphi$, odnosno $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. Dakle, granične krive oblasti D daju prave: $r=4$, $r=0$, $\varphi=\pi$ i $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

10. Pomoću dvostrukog integrala, odrediti zapreminu tela ograničenog površima: $z = x$, $z = 0$, $x^2y = 1$, $x^2y = 8$, $y = x$ i $8y = x$. Prilikom izračunavanja upotrebiti smenu:

$$u = x^2y, \ \ v = \frac{y}{x}.$$

Rešenje. Pošto je dato telo odozgo i odozdo redom ograničeno ravnima $z = x$ i $z = 0$, a oivičeno cilindričnim površima $x^2y = 1$ i $x^2y = 8$ i ravnima $y = x$ i $8y = x$, osnova mu je zatvorena oblast D (prikazana na slici 4.1.10), u ravni $z = 0$, određena krivama $x^2y = 1$, $x^2y = 8$, $y = x$ i $8y = x$. Stoga se tražena zapremina može izračunati formulom

$$V = \iint\limits_D x\,dx\,dy.$$



Slika 4.1.10

Da bi se primenila data smena, potrebno je izraziti promenljive x i y preko promenljivih u i v. Iz $v = \frac{y}{x}$ dobija se da je $y = xv$, pa uvrštavanjem u $u = x^2y$, dobija se da je $u = x^3v$. Odavde je $x^3 = \frac{u}{v}$, odnosno

$$x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}}, \ \text{ pa je } \ y = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \cdot v, \ \text{ odnosno } \ y = \sqrt[3]{uv^2}.$$

Jakobijan je

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{9}\,u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}\,u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}.$$

Kako je $x > 0$ i $y > 0$, važi da je $u > 0$ i $v > 0$, te je

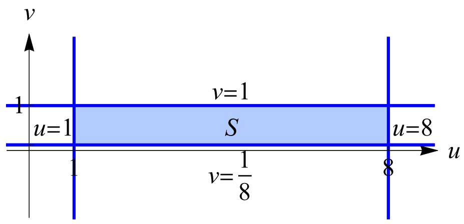
$$|J| = \left|\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}\right| = \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}.$$

Datom smenom, granične krive oblasti D: $x^2y = 1$, $x^2y = 8$, $y = x$ i $8y = x$ postaju prave

$$u = 1, \ \ u = 8, \ \ v = 1 \ \text{ i } \ v = \frac{1}{8},$$

te je oblast D u uOv koordinatnom sistemu pravougaonik sa stranicama paralelnim koordinatnim osama

$$S = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le u \le 8, \ \frac{1}{8} \le v \le 1\},$$



Slika 4.1.11

prikazan na slici 4.1.11. Tako dobijamo da je

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_S u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \cdot |J|\,du dv = \iint\limits_S u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}\,du dv = \frac{1}{3}\iint\limits_S v^{-1}\,du dv = \\ &= \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{8}}^{1}\left(\int_1^8 \frac{1}{v}\,du\right) dv = \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{1}{v}\,dv\right)\cdot\left(\int_1^8 du\right) = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\Big[\ln|v|\Big]\Big|_{\frac{1}{8}}^{1}\cdot\Big[u\Big]\Big|_1^8 = \frac{1}{3}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{8}\right)\cdot 7 = \frac{7}{3}\ln 8. \end{aligned}$$

Dakle, tražena zapremina je $V = \frac{7}{3}\ln 8$.

4.2 Trostruki integrali

1. Izračunati integral
$$\int_{-2}^{-1}\left(\int_{0}^{2}\left(\int_{z}^{3z}\frac{(2y^2+3y+2)\,e^{z^2+1}}{y^3+y}\,dx\right)dz\right)dy.$$

Rešenje. Označimo dati integral sa I, te je
$$I=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{0}^{2}\frac{(2y^2+3y+2)\,e^{z^2+1}}{y^3+y}\left(\int_{z}^{3z}dx\right)dz\right)dy=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{0}^{2}\frac{(2y^2+3y+2)\,e^{z^2+1}}{y^3+y}\Big[x\Big]\Big|_{z}^{3z}dz\right)dy=$$
$$=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{0}^{2}\frac{(2y^2+3y+2)\,e^{z^2+1}2z}{y^3+y}\,dz\right)dy=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{0}^{2}\frac{2y^2+3y+2}{y^3+y}\cdot e^{z^2+1}2z\,dz\right)dy.$$

Pošto je oblast integracije pravougaonik, a podintegralana funkcija je proizvod funkcije po promenljivoj y i funkcije po promenljivoj z, na osnovu teoreme 1.10, integral I se može zapisati kao proizvod određenih integrala, odnosno
$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{2y^2+3y+2}{y^3+y}\,dy\int_{0}^{2}e^{z^2+1}2z\,dz.$$

Podintegralna funkcija prvog integrala je prava racionalna funkcija, pa se može rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka. Kako je
$$\frac{2y^2+3y+2}{y^3+y}=\frac{2y^2+3y+2}{y\,(y^2+1)}=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{y^2+1},$$
parametri A, B i C treba da zadovolje uslov
$$2y^2+3y+2=A\left(y^2+1\right)+(By+C)\,y.$$
Za $y=0$ uslov postaje
$$2=A,$$
za $y=1$ daje
$$7=2A+B+C,$$
a za $y=-1$
$$1=2A+B-C.$$
To znači da se parametri B i C dobijaju iz sistema jednačina
$$B+C=3,\;\; B-C=-3,$$
tako da je $B=0$ i $C=3$.
$$\int_{-2}^{-1}\frac{2y^2+3y+2}{y^3+y}\,dy=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{2}{y}+\frac{3}{y^2+1}\right)dy=\Big[2\ln|y|+3\,\mathrm{arctg}\,y\Big]\Big|_{-2}^{-1}=$$
$$=2\ln 1+3\,\mathrm{arctg}\,(-1)-(2\ln 2+3\,\mathrm{arctg}\,(-2))=-3\cdot\frac{\pi}{4}-2\ln 2+3\,\mathrm{arctg}\,2,$$
primenivši da je funkcija $f(y)=\mathrm{arctg}\,y$ neparna.

Da bi se izračunao drugi integral, potrebno je uvesti smenu
$$t=z^2+1,\;\;\text{pa je } dt=2z\,dz,$$
a nove granice su $t=1$ za $z=0$ i $t=5$ za $z=2$, tako da je
$$\int_{0}^{2}e^{z^2+1}2z\,dz=\int_{1}^{5}e^t\,dt=e^t\Big|_{1}^{5}=e^5-e.$$

Dakle,
$$I=\left(3\,\mathrm{arctg}\,2-3\cdot\frac{\pi}{4}-2\ln 2\right)\left(e^5-e\right)\approx-61.34376.$$

2. Izračunati integral
$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^x \frac{(x-z)\, e^x}{x\,(y^2-4y+3)}\, dz \right) dy \right) dx.$$

Rešenje. Neka je sa I označen dati integral, tako da je
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x\,(y^2-4y+3)} \left(\int_0^x (x-z)\, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x\,(y^2-4y+3)} \left[xz - \frac{z^2}{2} \right] \Bigg|_0^x dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x\,(y^2-4y+3)} \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x\,(y^2-4y+3)} \frac{x^2}{2}\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{e^x x}{y^2-4y+3}\, dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 e^x x \cdot \frac{1}{y^2-4y+3}\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^x x\, dx \int_{-1}^0 \frac{1}{y^2-4y+3}\, dy, \end{aligned}$$
primenivši teoremu 1.10, jer je oblast integracije dobijenog dvostrukog integrala pravougaonik, a podintegralana funkcija je proizvod funkcije po promenljivoj x i funkcije po promenljivoj y.

Prvi određeni integral se može izračunati parcijalnom integracijom:
$$u = x, \;\; dv = e^x\, dx, \;\; \text{odakle je} \;\; du = dx, \;\; v = \int e^x\, dx = e^x,$$
pa je
$$\int_0^1 e^x x\, dx \;=\; \left[xe^x \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - \left[e^x \right] \Big|_0^1 = e - \left(e - e^0 \right) = 1.$$
Drugi određeni integral se može izračunati rastavljanjem podintegrale funkcije, koja je prava racionalna funkcija, na zbir parcijalnih razlomaka. Pošto su koreni jednačine $y^2 - 4y + 3 = 0$,
$$y_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}, \;\; \text{odnosno} \;\; y_1 = 3 \;\; \text{i} \;\; y_2 = 1,$$
važi da je $y^2 - 4y + 3 = (y-3)(y-1)$. Stoga je
$$\frac{1}{y^2-4y+3} = \frac{1}{(y-3)(y-1)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y-1},$$
pa mora da važi da je
$$1 = A(y-1) + B(y-3), \;\; \text{odnosno} \;\; 1 = (A+B)y - A - 3B.$$
To znači da je
$$A + B = 0, \;\; -A - 3B = 1,$$
te je
$$A = \frac{1}{2} \;\; \text{i} \;\; B = -\frac{1}{2}.$$
Tako je
$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{y^2-4y+3}\, dy &= \int_{-1}^0 \left(\frac{\frac{1}{2}}{y-3} - \frac{\frac{1}{2}}{y-1} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 \frac{1}{y-3}\, dy - \int_{-1}^0 \frac{1}{y-1}\, dy \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-4}^{-3} \frac{1}{t}\, dt - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{s}\, ds \right) = \frac{1}{2} \left(\ln|t| \Bigg|_{-4}^{-3} - \ln|s| \Bigg|_{-2}^{-1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 3 - \ln 4 - (\ln 1 - \ln 2) \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}, \end{aligned}$$
pri čemu su upotrebljene smene
$$t = y - 3 \;\; \text{i} \;\; s = y - 1, \;\; \text{gde je} \;\; dt = dy \;\; \text{i} \;\; ds = dy.$$
Dakle,
$$I = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}.$$

3. Izračunati integral
$$\int_1^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{x+y} \frac{3(x+y)}{x^2\,(x^2+6x+9)}\,dz \right) dy \right) dx.$$

Rešenje. Neka je dati integral označen sa I.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{x+y} \frac{3(x+y)}{x^2\,(x^2+6x+9)}\,dz \right) dy \right) dx = \\ &= 3\int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(\int_0^x (x+y) \left(\int_0^{x+y} dz \right) dy \right) dx = \\ &= 3\int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(\int_0^x (x+y) \left(z\Big|_0^{x+y} \right) dy \right) dx = \\ &= 3\int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(\int_0^x (x+y)^2\,dy \right) dx, \end{aligned}$$

pa se, u unutrašnjem integralu, smenom

$$t = x+y, \ \text{gde je} \ dt = dy,$$

a donja granica $t = x+0 = x$ i gornja granica $t = x+x = 2x$, dobija

$$\begin{aligned} I &= 3\int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(\int_x^{2x} t^2\,dt \right) dx = 3\int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(\frac{t^3}{3}\Big|_x^{2x} \right) dx = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(t^3\Big|_x^{2x} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2\,(x^2+6x+9)} \left(8x^3 - x^3\right) dx = \\ &= 7\int_1^2 \frac{x^3}{x^2\,(x^2+6x+9)}\,dx = 7\int_1^2 \frac{x}{x^2+6x+9}\,dx. \end{aligned}$$

U preostalom određenom integralu, podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija, tako da se rastavlja na zbir parcijalnih razlomaka.

$$\frac{x}{x^2+6x+9} = \frac{x}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2},$$

tako da treba da važi da je

$$x = A\,(x+3) + B,$$

što za $x = -3$ daje da je

$$-3 = B,$$

a za $x = 0$ da je

$$1 = 4A + B, \ \text{odnosno} \ A = 1,$$

te je

$$\frac{x}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}.$$

Tako je

$$\begin{aligned} I &= 7\int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2} \right) dx = 7\int_1^2 \frac{1}{x+3}\,dx - 21\int_1^2 \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = 7\int_4^5 \frac{1}{s}\,ds - 21\int_4^5 s^{-2}\,ds = \\ &= 7\Big[\ln|s|\Big]\Big|_4^5 + 21\Big[s^{-1}\Big]\Big|_4^5 = 7\,(\ln 5 - \ln 4) + 21\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) = 7\ln\frac{5}{4} - \frac{21}{20} \approx 0.51200, \end{aligned}$$

pri čemu je upotrebljena smena

$$s = x+3, \ \text{sa} \ ds = dx.$$

4. Izračunati integral

$$\iiint\limits_S 2z\,dxdydz,$$

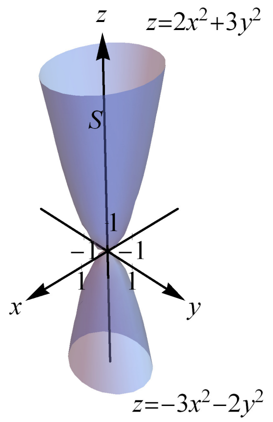
gde je oblast S ograničena površima $z = 2x^2 + 3y^2$, $z = -3x^2 - 2y^2$, $y = 1 - 3x$, $y = -2$ i $x = -1$.

Rešenje. Neka je dati integral označen sa I. Pošto je

$$2x^2 + 3y^2 \geq 0 \ \text{ i } \ -3x^2 - 2y^2 = -\left(3x^2 + 2y^2\right) \leq 0,$$

paraboloidi $z = 2x^2 + 3y^2$ i $z = -3x^2 - 2y^2$ (prikazani na slici 4.2.1) odozgo i odozdo ograničavaju oblast integracije. Ravni $y = 1 - 3x$, $y = -2$ i $x = -1$ (prikazane na slici 4.2.2) su paralelne sa z-osom, tako da one sa strane ograničavaju oblast S. To znači da se može prvo integraliti po promenljivoj z, te su granice za unutrašnji integral (po z)

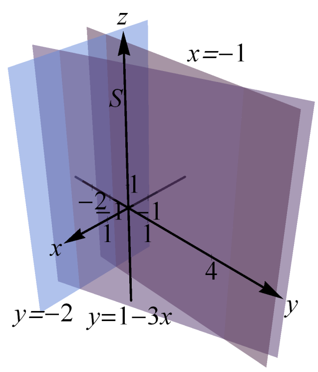
$$-3x^2 - 2y^2 \leq z \leq 2x^2 + 3y^2.$$



Slika 4.2.1

Za granice po promenljivama x i y je potreban grafik projekcije tela S na xOy ravan, koji je prikazan na slici 4.2.3. Ukoliko se za redosled integraljenja odabere prvo promenljiva y, a potom promenljiva x, granice su

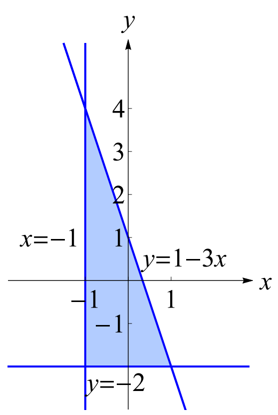
$$-2 \leq y \leq 1 - 3x \ \text{ i } \ -1 \leq x \leq 1.$$



Slika 4.2.2

Dakle,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1-3x}\int_{-3x^2-2y^2}^{2x^2+3y^2} 2z\,dz\,dy\,dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1-3x} z^2\Big|_{-3x^2-2y^2}^{2x^2+3y^2} dy\,dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1-3x} \left(\left(2x^2+3y^2\right)^2 - \left(-3x^2-2y^2\right)^2\right) dy\,dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1-3x} \left(4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4 - \left(9x^4 + 12x^2y^2 + 4y^4\right)\right) dy\,dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1-3x} \left(-5x^4 + 5y^4\right) dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left[-5x^4y + y^5\right]\Big|_{-2}^{1-3x} dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-5x^4(1-3x) + (1-3x)^5 - \left(10x^4 - 32\right)\right) dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-5x^4 + 15x^5 - 10x^4 + 32 + (1-3x)^5\right) dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(15x^5 - 15x^4 + 32\right) dx + \int_{-1}^{1} (1-3x)^5\,dx.
\end{aligned}$$



Slika 4.2.3

Uvođenjem smene

$$t = 1 - 3x, \ \text{gde je} \ dt = -3\,dx, \ \text{odnosno} \ dx = -\frac{1}{3}\,dt,$$

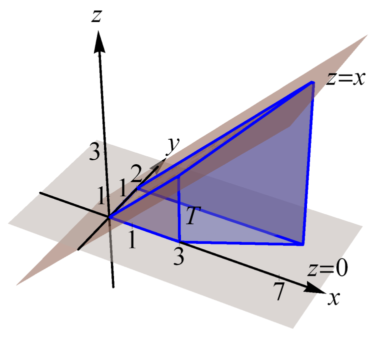
u drugi integral, dobija se da je

$$\begin{aligned}
I &= \left[15\,\frac{x^6}{6} - 15\,\frac{x^5}{5} + 32x\right]\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\int_{4}^{-2} t^5\,dt = \left[\frac{5}{2}\,x^6 - 3x^5 + 32x\right]\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{t^6}{18}\Bigg|_{4}^{-2} = \\
&= \frac{5}{2} - 3 + 32 - \left(\frac{5}{2} + 3 - 32\right) - \frac{1}{18}\,(64 - 4096) = 282.
\end{aligned}$$

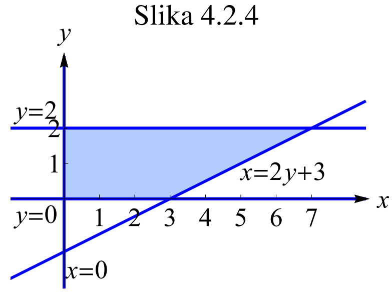
5. Izračunati integral
$$\iiint\limits_T (z+x)\,dxdydz,$$
gde je T zatvorena oblast ograničena površima $y=0$, $y=2$, $x=2y+3$, $z=x$ i $z=0$.

Rešenje. Neka je
$$I=\iiint\limits_T (z+x)\,dxdydz.$$

Na osnovu ravni koje ograničavaju oblast integracije, T se nalazi između ravni $y=0$ i $y=2$, tako da
$$y\in[0,2].$$



Slika 4.2.4



Slika 4.2.5

Oblast T se nalazi i između ravni $z=x$ i $z=0$. Te ravni su paralelne sa y-osom i upravo u njoj se seku, što implicira da je T ograničena i sa ravni $x=0$. Granična ravan $x=2y+3$ je paralelna sa z-osom i za njen deo koji se nalazi između ravni $y=0$ i $y=2$ važi da $x\in[3,7]$, odnosno da je
$$x>0,$$
tako da je telo T odozdo ograničeno s ravni $z=0$, a odozgo s ravni $z=x$, i nalazi se između ravni $x=0$ i $x=2y+3$. Grafik oblasti T je prikazan na slici 4.2.4. Praktično je integraliti prvo po promenljivoj z, tako da projekcija tela T na xOy ravan, prikazana na slici 4.2.5, definiše granice za integrale po promenljivama x i y. Jednostavnije je da se pre integrali po x, a potom po y promenljivoj (jer bi se u suprotnom oblast trebala podeliti na dva dela). Tako da su granice
$$0\le z\le x,\ \ 0\le x\le 2y+3,\ \ 0\le y\le 2.$$

Dakle,
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2\left(\int_0^{2y+3}\left(\int_0^x (z+x)\,dz\right)dx\right)dy=\int_0^2\left(\int_0^{2y+3}\left[\frac{z^2}{2}+xz\right]\Bigg|_0^x dx\right)dy=\\
&= \int_0^2\left(\int_0^{2y+3}\left(\frac{x^2}{2}+x^2\right)dx\right)dy=\int_0^2\left(\int_0^{2y+3}\frac{3}{2}\,x^2\,dx\right)dy=\\
&= \int_0^2\frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2y+3}dy=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3\Big|_0^{2y+3}dy=\frac{1}{2}\int_0^2(2y+3)^3\,dy.
\end{aligned}$$

Primenom smene
$$t=2y+3,\ \text{ gde je }\ dt=2dy,$$
dobija se da je
$$I=\frac{1}{4}\int_3^7 t^3dt=\frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]\Bigg|_3^7=\frac{1}{16}\left[t^4\right]\Big|_3^7=\frac{1}{16}\left(7^4-3^4\right)=145.$$

6. Odrediti zapreminu zatvorene oblasti ograničene površima:

$$x = 4 - y^2, \; x = 1, \; y = -1, \; y = 1, \; z = 0 \text{ i } z = \frac{1}{x^2}.$$

Rešenje. Neka je T data oblast. S obzirom na to da je T trodimezionalna oblast, njena zapremina se dobija formulom

$$V = \iiint\limits_T dxdydz.$$

Oblast T se nalazi između ravni $y = -1$ i $y = 1$, te promenljiva y može imati vrednosti iz intervala $[-1, 1]$. To implicira da je

$$3 \leq 4 - y^2 \leq 4,$$

pa je $1 < 4 - y^2$. Samim tim, pošto se T nalazi između paraboličkog cilindra $x = 4 - y^2$ i ravni $x = 1$, važi da je

$$1 \leq x \leq 4 - y^2.$$

Sledi da je $\frac{1}{x^2} > 0$, što sa ograničenošću tela T sa ravni $z = 0$ i cilindričnom površi $z = \frac{1}{x^2}$ daje da je

$$0 \leq z \leq \frac{1}{x^2}.$$

To znači da su granice oblasti T

$$-1 \leq y \leq 1, \; 1 \leq x \leq 4 - y^2 \text{ i } 0 \leq z \leq \frac{1}{x^2},$$

s tim da je redosled integranjenja definisan time da se prvo integrali po promenljivoj z, a tek potom po promenljivoj x, ali i da se prvo integrali po promenljivoj x, a tek potom po promenljivoj y. Tako je

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{4-y^2}\int_{0}^{\frac{1}{x^2}} dz\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{4-y^2} z\Big|_0^{\frac{1}{x^2}} dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{4-y^2} \frac{1}{x^2}\,dx\,dy = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{4-y^2} x^{-2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[-x^{-1}\right]\Big|_1^{4-y^2} dy = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\Big|_1^{4-y^2} dy = -\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4-y^2} - 1\right) dy = \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-y^2}\,dy + \int_{-1}^{1} dy = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-y^2}\,dy + \left[y\right]\Big|_{-1}^{1} = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-y^2}\,dy + 2.
\end{aligned}$$

Podintegralna funkcija preostalog integrala je prava racionalna funkcija, tako da se rastavlja na zbir parcijalnih razlomaka.

$$\frac{1}{4-y^2} = \frac{1}{(2-y)(2+y)} = \frac{A}{2-y} + \frac{B}{2+y},$$

pa je

$$1 = A(2+y) + B(2-y).$$

Jednakost važi i za $y = -2$ i $y = 2$, tako da se dobija da je

$$1 = 4B \text{ i } 1 = 4A, \text{ odnosno } B = \frac{1}{4} \text{ i } A = \frac{1}{4}.$$

Tako je

$$\begin{aligned}
V &= 2 - \int_{-1}^{1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{2-y} + \frac{\frac{1}{4}}{2+y}\right) dy = 2 - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{2+y}\right) dy = \\
&= 2 - \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{2-y}\,dy + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+y}\,dy\right) = 2 - \frac{1}{4}\left(-\int_{3}^{1} \frac{1}{t}\,dt + \int_{1}^{3} \frac{1}{s}\,ds\right) = \\
&= 2 - \frac{1}{4}\left(-\left[\ln|t|\right]\Big|_3^1 + \left[\ln|s|\right]\Big|_1^3\right) = 2 - \frac{1}{4}\left(-(\ln 1 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 1)\right) = 2 - \frac{\ln 3}{2},
\end{aligned}$$

pri čemu su upotrebljene smene

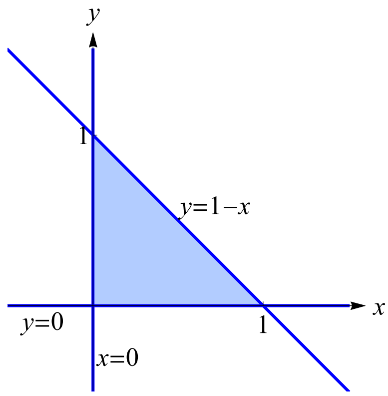
$$t = 2 - y \text{ i } s = 2 + y, \text{ gde je } dt = -dy \text{ i } ds = dy.$$

7. Izračunati zapreminu tela T koje je ograničeno površima

$$z=0,\ \ z=x\sqrt{x}+y\sqrt{y},\ \ y=0,\ \ x+y=1 \ \text{ i } \ x=0.$$

Rešenje. Zapremina tela T je

$$V=\iiint\limits_T dxdydz.$$



Slika 4.2.6

Ravni $y=0$, $x+y=1$ i $x=0$, koje su paralelne sa z-osom, sa strane ograničavaju telo T. Njihov presek s ravni xOy je prikazan na slici 4.2.6. Pošto je taj presek između pravih $x=0$ i $x=1$ i odozdo je ograničen pravom $y=0$, a odozgo pravom $y=1-x$, važi da je

$$0\leq y\leq 1-x \ \text{ za svako } x\in[0,1]. \tag{4.2.2}$$

To znači da je $x\geq 0$ i $y\geq 0$, a samim tim je i

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq 0.$$

Odavde sledi da ravan $z=0$ ograničava telo T odozdo, a površ $z=x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$ odozgo i da je osnova tela T definisana tačkama $(x,y,0)\in\mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju (4.2.2). Stoga su granice tela T:

$$0\leq z\leq x\sqrt{x}+y\sqrt{y},\ \ 0\leq y\leq 1-x,\ \ 0\leq x\leq 1,$$

s tim da je potrebno prvo integraliti po promenljivoj z, potom po promenljivoj y, a tek potom po promenljivoj x. Tako je

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}dz\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} z\Big|_0^{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}dy\right)dx= \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(x^{\frac32}+y^{\frac32}\right)dy\right)dx=\int_0^1\left[x^{\frac32}y+\frac25 y^{\frac52}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx= \\ &= \int_0^1\left(x^{\frac32}(1-x)+\frac25(1-x)^{\frac52}\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac32}-x^{\frac52}\right)dx+\frac25\int_0^1(1-x)^{\frac52}\,dx. \end{aligned}$$

Prvi integral je zbir dva tablična integrala, pa je

$$\int_0^1\left(x^{\frac32}-x^{\frac52}\right)dx=\left[\frac25x^{\frac52}-\frac27x^{\frac72}\right]\Bigg|_0^1=\frac25-\frac27=\frac{4}{35},$$

dok se drugi integral može izračunati smenom

$$t=1-x,\ \text{ gde je } \ dt=-dx,\ \text{ odnosno } \ dx=-dt,$$

te je nova donja granica $t=1-0=1$, a nova gornja granica $t=1-1=0$. Tako je

$$\int_0^1(1-x)^{\frac52}\,dx=-\int_1^0 t^{\frac52}\,dt=-\frac27t^{\frac72}\Bigg|_1^0=\frac27.$$

Dakle, zapremina tela T je

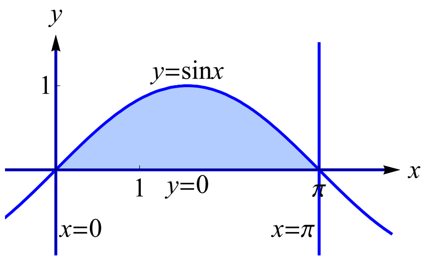
$$V=\frac{4}{35}+\frac25\cdot\frac27=\frac{8}{35}.$$

8. Izračunati zapreminu cilindričnog tela T koje je ograničeno površima:

$$x=0,\ \ x=\pi,\ \ y=0,\ \ y=\sin x,\ \ z=0 \ \text{ i } \ z=x^2+1.$$

Rešenje. Zapremina tela T se može dobiti formulom

$$V=\iiint\limits_T dxdydz.$$



Slika 4.2.7

Pošto je $x^2\geq 0$, odnosno $x^2+1\geq 0$, važi da je $0\leq z\leq x^2+1$. To znači da je telo T odozdo ograničeno s ravni $z=0$, a odozgo parabolićnim cilindrom $z=x^2+1$. S obzirom na to da je T cilindrično telo, granice za promenljive x i y se mogu odrediti na osnovu grafika preseka površi $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ i $y=\sin x$ s ravni xOy (prikazanog na slici 4.2.7). Posmatrani presek daje dvodimenzionalnu oblast koja se nalazi u traci određenoj pravama $x=0$ i $x=\pi$, a odozdo i odozgo je redom ograničena krivama $y=0$ i $y=\sin x$. Tako da,

$$\text{za svako } \ x\in[0,\pi] \ \text{ važi da je } \ 0\leq y\leq \sin x,$$

pa su granice trodimenzionalne oblasti T:

$$0\leq x\leq\pi,\ \ 0\leq y\leq\sin x,\ \ 0\leq z\leq x^2+1,$$

sa redosledom integraljenja redom po promenljivama z, y, x. Sada je

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin x}\left(\int_0^{x^2+1}dz\right)dy\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin x}z\Big|_0^{x^2+1}dy\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin x}(x^2+1)\,dy\right)dx=\\ &= \int_0^{\pi}(x^2+1)\left(\int_0^{\sin x}dy\right)dx=\int_0^{\pi}(x^2+1)\,\Big[y\Big]\Big|_0^{\sin x}dx=\int_0^{\pi}(x^2+1)\sin x\,dx. \end{aligned}$$

Dobijeni integral se može izračunati parcijalnom integracijom

$$u=x^2+1 \ \text{ i } \ dv=\sin x\,dx,\ \text{ odakle je } \ du=2x\,dx \ \text{ i } \ v=\int\sin x\,dx=-\cos x,$$

pa je

$$V=\Big[-(x^2+1)\cos x\Big]\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}x\cos x\,dx.$$

Preostali integral se može izračunati parcijalnom integracijom

$$u_2=x \ \text{ i } \ dv_2=\cos x\,dx,\ \text{ odakle je } \ du_2=dx \ \text{ i } \ v_2=\int\cos x\,dx=\sin x,$$

tako da je

$$\begin{aligned} V &= -(\pi^2+1)\cos\pi+\cos 0+2\left(\Big[x\sin x\Big]\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)=\\ &= \pi^2+1+1+2\left(\pi\sin\pi+\Big[\cos x\Big]\Big|_0^{\pi}\right)=\pi^2+2+2(\cos\pi-\cos 0)=\\ &= \pi^2+2+2\cdot(-2)=\pi^2-2\approx 7.86960 \end{aligned}$$

Dakle, tražena zapremina je $V=\pi^2-2$.

9. Uvodeći cilindrične koordinate, izračunati trostruki integral

$$\iiint\limits_T \frac{1}{9}\sqrt{x^2z+y^2z}\,dxdydz,$$

gde je oblast T ograničena površima: $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=1$, $y=x$ i $y=0$ i nalazi se u prvom oktantu.

Rešenje. Pošto je oblast integracije ograničena cilindrom $x^2+y^2=9$, cilindrične koordinate su definisane sa

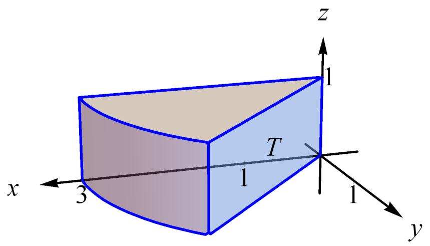
$$x=\rho\cos\theta,\;\; y=\rho\sin\theta,\;\; z=h,\;\; \text{gde}\;\; \rho\in[0,\infty),\;\; \theta\in[0,2\pi],\;\; h\in\mathbb{R}.$$

Uvođenjem cilindričnih koordinata potrebno je izračunati i Jakobijan

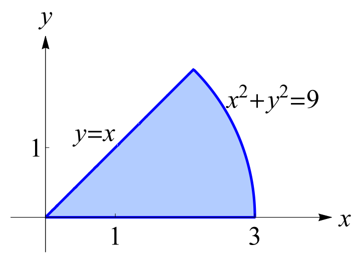
$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,h)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial h}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial h}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial h}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=$$
$$=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^\theta=\rho\left(\cos^2\theta+\sin^\theta\right)=\rho.$$

Kako je $\rho\ge 0$, $|J|=|\rho|=\rho$.

Granice za nove promenljive se mogu odrediti pomoću grafika oblasti T, te je on prikazan na slici 4.2.8. Pošto je T odozdo ograničeno s ravni $z=0$, a odozgo s ravni $z=1$, za promenljivu h važi da $0\le h\le 1$. Projekcija tela T na xOy ravan, koja je prikazana na slici 4.2.9, daje granice za promenljive ρ i θ. Projekcija je kružni isečak određen kružnicom $x^2+y^2=9$, te je $0\le\rho\le 3$. Prave $y=0$ i $y=x$ daju granice za θ. Jednačina $y=x$ daje da je $\rho\sin\theta=\rho\cos\theta$, odakle je



Slika 4.2.8



Slika 4.2.9

$$\rho=0\;\;\text{ili}\;\;\sin\theta=\cos\theta.$$

Poslednja jednačina je zadovoljena za $\theta=\frac{\pi}{4}$ jer je kružni isečak u prvom kvadrantu. To znači da je $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. Dakle, nova oblast integracije je kvadar

$$S=\left\{(\rho,\theta,h)\mid 0\le\rho\le 3,\; 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\; 0\le h\le 1\right\}.$$

Na osnovu

$$\sqrt{x^2z+y^2z}=\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{h}\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\sqrt{h}\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}=\sqrt{h}\,|\rho|=\sqrt{h}\,\rho,$$

dobija se da je

$$\iiint\limits_T \frac{1}{9}\sqrt{x^2z+y^2z}\,dxdydz=\frac{1}{9}\iiint\limits_S \sqrt{h}\,\rho\cdot|J|\,d\rho d\theta dh=\frac{1}{9}\iiint\limits_S \sqrt{h}\,\rho^2\,d\rho d\theta dh=$$
$$=\frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^3\left(\int_0^1\sqrt{h}\,\rho^2 dh\right)d\rho\right)d\theta=\frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^3\rho^2\left(\int_0^1 h^{\frac{1}{2}}\,dh\right)d\rho\right)d\theta=$$
$$=\frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^3\rho^2\left[\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 d\rho\right)d\theta=\frac{2}{27}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^3\rho^2\,d\rho\right)d\theta=$$
$$=\frac{2}{27}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]\Bigg|_0^3 d\theta=\frac{2}{81}\int_0^{\frac{\pi}{4}}3^3\,d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{2}{3}\Big[\theta\Big]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

10. Uvođenjem smene

$$x = 2\rho\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad z = 2\rho\sin\varphi,$$

gde je $\rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$ i $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, izračunati trostruki integral

$$\iiint\limits_T \left(x^2 + 4y^2 + z^2\right) dxdydz,$$

gde je oblast T određena s površi $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$.

Rešenje. Primenom smene kod trostrukog integrala, potreban je i Jakobijan.

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta\cos\varphi & -2\rho\cos\varphi\sin\theta & -2\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 0 & 2\rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 4\rho^2\cos^2\theta\cos^3\varphi + 4\rho^2\cos\varphi\sin^2\theta\sin^2\varphi + 4\rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + 4\rho^2\cos^3\varphi\sin^2\theta = \\ &= 4\rho^2\cos^3\varphi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 4\rho^2\cos\varphi\sin^2\varphi\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = \\ &= 4\rho^2\cos^3\varphi + 4\rho^2\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\rho^2\cos\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4\rho^2\cos\varphi \end{aligned}$$

Kako je $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, važi da je $\cos\varphi \geq 0$, te je $|J| = |4\rho^2\cos\varphi| = 4\rho^2\cos\varphi$.

Pošto je

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} &= \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin\varphi^2 = \\ &= \rho^2\left(\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\cos^2\varphi + \sin\varphi^2\right) = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin\varphi^2\right) = \rho^2, \end{aligned}$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4\left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4}\right) = 4\rho^2,$$

a iz jednačine elipsoida $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ sledi da je $\rho^2 = 1$, odnosno da je $\rho = 1$, pa je oblast S dobijena nakon smene određena ravnima:

$$\rho = 0, \;\; \rho = 1, \;\; \theta = 0, \;\; \theta = 2\pi, \;\; \varphi = -\frac{\pi}{2} \;\text{ i }\; \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

To znači da je nova oblast integracije kvadar

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Tako je

$$\begin{aligned} \iiint\limits_T \left(x^2 + 4y^2 + z^2\right) dxdydz &= \iiint\limits_S 4\rho^2 \cdot 4\rho^2\cos\varphi\, d\rho d\theta d\varphi = 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^4\cos\varphi\, d\rho\right) d\theta\right) d\varphi = \\ &= 16\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^1 \rho^4\, d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \\ &= 16\Big[\sin\varphi\Big]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]\Big|_0^1 \cdot \Big[\theta\Big]\Big|_0^{2\pi} = 16\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\pi = \\ &= \frac{32\pi}{5}(1+1) = \frac{64\pi}{5} \approx 40.21239, \end{aligned}$$

pri čemu je trostruki integral jednak proizvodu tri određena integrala na osnovu teoreme 1.20.

4.3 Brojni i funkcionalni redovi

1. (a) Ispitati konvergenciju brojnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^2},$$

gde je $0 < a < 2$.

Rešenje. Opšti član datog brojnog reda je

$$a_n = \frac{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)}{n! \cdot n^2}.$$

Pošto je $a > 0$, opšti član je pozitivan, pa se može primeniti Rabeov kriterijum.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{n!\cdot n^2}}{\frac{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}{(n+1)!\cdot(n+1)^2}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{1}{n!\cdot n^2}}{\frac{a+n}{n!\cdot(n+1)\cdot(n+1)^2}} - 1 \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{a+n}{(n+1)^3}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)^3}{n^2(a+n)} - 1 \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} n \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^2(a+n)}{n^2(a+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3-a)n^2 + 3n + 1}{n(a+n)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \left(3 - a + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{a}{n} + 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - a + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{a}{n} + 1} = 3 - a,
\end{aligned}$$

te se, koristeći da je $0 < a < 2$, dobija da je

$$3 - a < 3 - 0 = 3$$

i

$$3 - a > 3 - 2 = 1.$$

To znači da

$$1 < \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 3,$$

pa dati red konvergira.

(b) Utvrditi oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{n!} (x-1)^n.$$

Rešenje. Dati red je stepeni red sa

$$\text{centrom u } \ x_0 = 1 \ \text{ i koeficijentima } \ c_n = \frac{-3}{n!}.$$

Njegov poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{-3}{n!}}{\frac{-3}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!\,(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Na osnovu teoreme 1.45, stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{n!} (x-1)^n$ apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira, na $\mathbb{R}$. Dakle, tražena oblast konvergencije je skup realnih brojeva.

2. (a) Pokazati da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n(-1)^n}{n^2+2}$$

konvergira.

Rešenje. Dati red je alternativni red, tako da se njegova konvergencija može pokazati Lajbnicovim kriterijumom, pod uslovom da su zadovoljeni uslovi kriterijuma. Pošto je opšti član reda

$$a_n = \frac{7n(-1)^n}{n^2+2},$$

posmatra se niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$b_n = |a_n| = \frac{7n}{n^2+2}.$$

Uslovi Lajbnicovog kriterijuma su da je niz $\{b_n\}$ nenegativan, monotono nerastući i da teži ka nuli. Za svako n iz $\mathbb{N}$ važi da je

$$n > 0 \text{ i } n^2+2 > 0,$$

pa je i $b_n > 0$, što znači da je ispunjen uslov nenegativnosti.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{7n+7}{(n+1)^2+2} - \frac{7n}{n^2+2} = \frac{(7n+7)\left(n^2+2\right) - 7n\left(n^2+2n+3\right)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \\ &= \frac{7n^3+14n+7n^2+14-7n^3-14n^2-21n}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \frac{-7n^2-7n+14}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \\ &= \frac{-7\left(n^2+n-2\right)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \frac{-7\,(n-1)\,(n+2)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} \leq 0 \end{aligned}$$

jer je $n \geq 1$. Znači, $b_{n+1} \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je niz $\{b_n\}$ monotono nerastući.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n\left(n+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n+\frac{2}{n}} = 0,$$

te je zadovoljen i uslov konvergencije ka nuli. Dakle, na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira.

(b) Utvrditi oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}(x+2)^n.$$

Rešenje. Dati red je stepeni red sa

$$\text{centrom u } x_0 = -2 \text{ i koeficijentima } c_n = \frac{n!}{3^n}.$$

Njegov poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!}{3^n}}{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{1}}{\frac{n!\,(n+1)}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0.$$

Na osnovu teoreme 1.45, dati stepeni red apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira, za $x = -2$ i divergira na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Dakle, tražena oblast konvergencije je skup $\{-2\}$.

3. (a) Ispitati konvergenciju brojnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n - \cos n}.$$

Rešenje. Opšti član datog brojnog reda je

$$a_n = \frac{3}{3n - \cos n}.$$

Pošto je

$$n \geq 1 \text{ i } -1 \leq \cos n \leq 1 \text{ za svako } n \in \mathbb{N},$$

opšti član je pozitivan, pa se može primeniti minorantni (uporedni) kriterijum. Koristeći da je

$$3n - \cos n \leq 3n - (-1) = 3n + 1,$$

dobija se da je

$$a_n = \frac{3}{3n - \cos n} > \frac{3}{3n+1}.$$

Ostaje da se pokaže da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n+1}$ divergira. Neka je

$$b_n = \frac{3}{3n+1}.$$

Za funkciju

$$f(x) = \frac{3}{3x+1} \text{ sa } x \in [1, \infty)$$

važi da je:

- ◇ $f(n) = \frac{3}{3n+1} = b_n$ za $n \in \mathbb{N}$;
- ◇ neprekidna jer je $3x + 1 \neq 0$ za svako $x \in [1, \infty)$;
- ◇ nenegativna jer je $3x + 1 > 0$ za $x \geq 1$;
- ◇ monotono opadajuća jer je

$$f'(x) = \left(3\,(3x+1)^{-1}\right)' = -3\,(3x+1)^{-2} = -\frac{3}{(3x+1)^2} < 0 \text{ za svako } x \in [1, \infty).$$

To znači da su zadovoljeni uslovi integralnog kriterijuma. Nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{3x+1}\,dx = \lim_{T \to \infty} \int_1^T \frac{3}{3x+1}\,dx.$$

Uvođenjem smene $t = 3x + 1$, gde je $dt = 3\,dx$,

$$\int_1^T \frac{3}{3x+1}\,dx = \int_4^{3T+1} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_4^{3T+1} = \ln|3T+1| - \ln 4,$$

pa je

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T \to \infty} (\ln(3T+1) - \ln 4) = \infty.$$

To znači da posmatrani nesvojstveni integral divergira, pa, na osnovu integralnog kriterijuma, divergira i brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Na osnovu minorantnog kriterijuma i brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

(b) Dokazati da funkcionalni red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!\,\sqrt[3]{8+(n+1)x^2}}$$
uniformno konvergira na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Rešenje. Opšti član datog funkcionalnog reda je
$$f_n(x) = \frac{2}{(n+1)!\,\sqrt[3]{8+(n+1)x^2}}.$$
Uniformna konvergencija funkcionalnog reda na datom intervalu se može pokazati Vajerštrasovim kriterijumom. Za svako $x \in (-\infty, \infty)$ važi da je $x^2 \geq 0$. Pošto je još i $n > 0$,
$$8+(n+1)x^2 \geq 8.$$
Sledi da je
$$|f_n(x)| = \left|\frac{2}{(n+1)!\,\sqrt[3]{8+(n+1)x^2}}\right| = \frac{2}{(n+1)!\,\sqrt[3]{8+(n+1)x^2}} \leq \frac{2}{(n+1)!\,\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{(n+1)!}.$$
Potrebno je pokazati konvergenciju brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$. Neka je
$$a_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$
Kako je $a_n > 0$, može se primeniti Dalamberov kriterijum. Na osnovu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+2)!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!\,(n+2)}}{\dfrac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)} = 0 < 1$$
sledi da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, pa na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na intervalu $(-\infty, \infty)$.

4. (a) Ispitati konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}.$$
Rešenje. Dati red je brojni red sa opštim članom
$$a_n = \frac{n!}{(n+1)^n}.$$
Kako je $a_n > 0$, može se primeniti Dalamberov kriterijum.
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{n!}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{-1} = \\
&= e^{-1} < 1,
\end{aligned}$$
pri čemu je upotrebljeno da
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
i da $n+1 \to \infty$ kad $n \to \infty$. Na osnovu Dalamberovog kriterijuma, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ implicira da dati brojni red konvergira.

(b) Utvrditi oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}(x-3)^n.$$

Rešenje. Dati red je stepeni red sa

$$\text{centrom u } \ x_0 = 3 \ \text{ i koeficijentima } \ c_n = \frac{n}{(-2)^n}.$$

Njegov poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(-2)^n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n}}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2,$$

jer je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Pošto je

$$x_0 - R = 3 - 2 = 1 \ \text{ i } \ x_0 + R = 3 + 2 = 5,$$

na osnovu teoreme 1.45, stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}(x-3)^n$ apsolutno konvergira za $x \in (1,5)$ i divergira za $x \in (-\infty,1) \cup (5,\infty)$. Ostaje da se ispita konvergencija za $x = 1$ i $x = 5$.

Za $x = 1$ dobija se brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

čiji je opšti član

$$a_n = n.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0,$$

na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju 1.25, brojni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.

Za $x = 5$ dobija se brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (-1)^n$$

čiji je opšti član

$$b_n = n \cdot (-1)^n.$$

Pošto niz $\{b_n\}$ ne konvergira,

$$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0,$$

pa na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju 1.25 i brojni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira.

Dakle, stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}(x-3)^n$ apsolutno konvergira na intervalu $(1,5)$ i divergira na $(-\infty,1] \cup [5,\infty)$.

5. (a) Ispitati konvergenciju brojnog reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Rešenje. Opšti član datog brojnog reda je
$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$
koji je pozitivan jer je $n > 0$. Kako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je
$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < \frac{2n+2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2(n+1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2}{n^2(n+1)} = \frac{2}{n^3+n^2} < \frac{2}{n^3},$$
može se primeniti majorantni (uporedni) kriterijum ukoliko red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ konvergira. Neka je
$$b_n = \frac{2}{n^3}.$$
Funkcija
$$f(x) = \frac{2}{x^3},\ x \in [1,\infty),$$
ima sledeće osobine.

- ◇ $f(n) = \frac{2}{n^3} = b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ◇ Pošto je $x \in [1,\infty)$, $f(x) \geq 0$ i funkcija f je neprekidna.
- ◇ Funkcija $f(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{x^3}$ je monotono opadajuća na $[1,\infty)$.

Znači, zadovoljeni su uslovi za integralni kriterijum. Nesvojstveni integral
$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T 2x^{-3}\,dx = \lim_{T\to\infty} 2\,\frac{x^{-2}}{-2}\bigg|_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\bigg|_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{T^2}+1\right) = 1,$$
pa konvergira, što, na osnovu integralnog kriterijuma, implicira da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira. Na osnovu majorantnog kriterijuma i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(b) Odrediti poluprečnik konvergencije i interval konvergencije stepenog reda
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4^{n+1}+5^n)(n^2+2n+1)}{n+2} \cdot \left(x+\frac{1}{5}\right)^n.$$

Rešenje. Centar i koeficijenti datog stepenog reda su
$$x_0 = -\frac{1}{5} \ \text{ i } \ c_n = \frac{(4^{n+1}+5^n)(n^2+2n+1)}{n+2},$$
redom, a njegov poluprečnik konvergencije je
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(4^{n+1}+5^n)(n^2+2n+1)}{n+2}}{\frac{(4^{n+2}+5^{n+1})((n+1)^2+2(n+1)+1)}{n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(4^{n+1}+5^n)(n^2+2n+1)(n+3)}{(4^{n+2}+5^{n+1})(n^2+4n+4)(n+2)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}+\frac{1}{5}\right)}{5^{n+2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n+2}+\frac{1}{5}\right)} \cdot \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} \cdot \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}+\frac{1}{5}}{5\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n+2}+\frac{1}{5}\right)} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} \cdot \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{5}.$$
$$x_0 - R = -\frac{1}{5}-\frac{1}{5} = -\frac{2}{5} \ \text{ i } \ x_0+R = -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = 0,$$
pa, na osnovu teoreme 1.45, $\left(-\frac{2}{5},0\right)$ je interval konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\left(x+\frac{1}{5}\right)^n$.

6. (a) Ispitati konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+10}{n^3+3n^2+n+3}.$$

Rešenje. Dati red je brojni red sa opštim članom
$$a_n = \frac{n^2+3n+10}{n^3+3n^2+n+3}.$$

Pošto je $n > 0$, $a_n > 0$, pa se može primeniti uporedni kriterijum. Iz $n \geq 1$ sledi da je
$$n^3 \geq n^2 \geq n,$$

te je
$$a_n = \frac{n^2+3n+10}{n^3+3n^2+n+3} > \frac{n^2}{n^3+3n^2+n+3} \geq \frac{n^2}{n^3+3n^3+n^3+3n^3} = \frac{n^2}{8n^3} = \frac{1}{8n}.$$

Divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, gde je
$$b_n = \frac{1}{8n},$$

može se pokazati integralnim kriterijumom. Naime, funkcija
$$f(x) = \frac{1}{8x} \text{ sa } x \in [1, \infty)$$

je nenegativna, neprekidna i monotono nerastuća i $f(n) = b_n$ za $n \in \mathbb{N}$, pa su zadovoljeni uslovi integralnog kriterijuma. Nesvojstveni integral
$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)\,dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{8}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{8}\ln|x|\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{8}(\ln|N| - \ln 1) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{8}\ln N = \infty,\end{aligned}$$

tako da divergira. Na osnovu integralnog kriterijuma, divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, a na osnovu minorantnog kriterijuma, i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

(b) Odrediti interval konvergencije reda
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{x}{3}+1\right)^n,$$

pri čemu je $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Dati red je stepeni red jer je
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{x}{3}+1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{1}{3}(x+3)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}(x+3)^n, \tag{4.3.3}$$

te mu je
$$\text{centar u } x_0 = -3 \text{ i koeficijenti su mu } c_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n}.$$

Njegov poluprečnik konvergencije je
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{\sqrt{n}}{3^n}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{3^n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}{\sqrt[n]{3^n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = 3,$$

primenivši da je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
Pošto je
$$x_0 - R = -3 - 3 = -6 \ \text{ i } \ x_0 + R = -3 + 3 = 0,$$
na osnovu teoreme 1.45, dati stepeni red apsolutno konvergira za $x \in (-6, 0)$ i divergira za $x \in (-\infty, -6) \cup (0, \infty)$. Ostaje da se ispita konvergencija za $x = -6$ i $x = 0$.

Sa $x = -6$ dobija se brojni red
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n} (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$$
čiji je opšti član
$$a_n = (-1)^n \sqrt{n}.$$
Niz $\{a_n\}$ divergira, pa važi da je
$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$
To znači da nije zadovoljen potreban uslov za konvergenciju 1.25, tako da brojni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.

Sa $x = 0$ dobija se brojni red
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n} 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$
čiji je opšti član
$$b_n = \sqrt{n}.$$
Pošto je
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \neq 0,$$
na osnovu potrebnog uslova za konvergenciju 1.25, brojni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira.

Dakle stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x+3)^n$ apsolutno konvergira na intervalu $(-6, 0)$ i divergira na $(-\infty, -6] \cup [0, \infty)$.

7. Ispitati konvergenciju reda
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} x^n.$$

Rešenje. Dati red je stepeni red sa
$$\text{centrom u } \ x_0 = 0 \ \text{ i koeficijentima } \ c_n = \frac{2n}{n^2+3}.$$
Njegov poluprečnik konvergencije je
$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2n}{n^2+3}}{\frac{2(n+1)}{(n+1)^2+3}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+3}}{\frac{n+1}{(n+1)^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+3}}{\frac{n+1}{n^2+2n+4}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n^2+2n+4\right)}{\left(n^2+3\right)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right) n \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n}\right) n \left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1. \end{aligned}$$
To znači da dati stepeni red apsolutno konvergira za $x \in (-1, 1)$ i divergira za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Ostaje da se ispita konvergencija za $x = -1$ i $x = 1$.

Sa $x = -1$ dobija se brojni red
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} (-1)^n,$$

dok sa $x = 1$ brojni red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}.$$

Neka je

$$a_n = \frac{2n}{n^2+3}(-1)^n \text{ i } b_n = \frac{2n}{n^2+3}.$$

Integralni kriterijum je pogodan za utvrđivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$. Naime, za funkciju

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3} \text{ sa } x \in [2, \infty)$$

važi da je:

- ◇ $f(n) = \frac{2n}{n^2+3} = b_n$ za svako za $n \in \mathbb{N}$;
- ◇ pozitivna jer je $x^2 + 3 > 0$ i $2x > 0$ za svako $x \in [2, \infty)$;
- ◇ neprekidna jer je $x^2 + 3 \neq 0$ za svako $x \in [2, \infty)$;
- ◇ monotono opadajuća, a samim tim i monotono nerastuća, jer je

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+3\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{6-2x^2}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{2(3-x^2)}{\left(x^2+3\right)^2} < 0 \text{ za } x \geq 2.$$

To znači da su zadovoljeni uslovi za integralni kriterijum. Nesvojstveni integral

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x)\,dx &= \int_2^{\infty} \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_2^{N} \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_7^{N^2+3} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{N\to\infty} \left(\ln|t|\right)\Big|_7^{N^2+3} = \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\ln\left(N^2+3\right) - \ln 7\right) = \infty, \end{aligned}$$

pri čemu je upotrebljena smena $t = x^2 + 3$, sa $dt = 2x\,dx$. Pošto nesvojstveni integral divergira, divergira i brojni red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$.

Red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ je alternativni red, pa se, koristeći da je $b_n = |a_n|$, mogu proveriti uslovi za Lajbnicov kriterijum. Za brojni niz $\{b_n\}_{n=2,3,\ldots}$ važi:

- ◇ $b_n \geq 0$ jer su $2n > 0$ i $n^2 + 3 > 0$ za svako $n \geq 2$;
- ◇ monotono opada jer je $n^2 + n - 3 > 0$ za svako $n \geq 2$, pa je

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{2n+2}{(n+1)^2+3} - \frac{2n}{n^2+3} = \frac{(2n+2)\left(n^2+3\right) - 2n\left(n^2+2n+4\right)}{((n+1)^2+3)\,(n^2+3)} = \\ &= \frac{2n^3+6n+2n^2+6-2n^3-4n^2-8n}{((n+1)^2+3)\,(n^2+3)} = \frac{-2n^2-2n+6}{((n+1)^2+3)\,(n^2+3)} = \\ &= -\frac{2\left(n^2+n-3\right)}{((n+1)^2+3)\,(n^2+3)} < 0; \end{aligned}$$

- ◇ konvergira ka nuli jer

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\left(n+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+\frac{3}{n}} = 0.$$

To znači da su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, te brojni red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dakle, stepeni red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} x^n$ apsolutno konvergira (a samim tim i konvergira) na intervalu $(-1, 1)$, konvergira za $x = -1$ i divergira na $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$.

8. Utvrditi oblast konvergencije reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x-1)^n.$$

Rešenje. Dati red je stepeni red sa

$$\text{centrom u } x_0 = 1 \text{ i koeficijentima } c_n = \frac{3^n}{n^2}.$$

Njegov poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n^2}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pošto je
$$x_0 - R = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ i } x_0 + R = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

na osnovu teoreme 1.45, stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x-1)^n$ apsolutno konvergira za $x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ i divergira za $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$. Ostaje da se ispita konvergencija za $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{4}{3}$.

Za $x = \frac{2}{3}$ dobija se brojni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}\left(\frac{2}{3} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

dok za $x = \frac{4}{3}$ brojni red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}\left(\frac{4}{3} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Za ispitivanje konvergencije brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ može se primeniti integralni kriterijum jer za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x \in [1, \infty)$$

važi da je $f(n) = \frac{1}{n^2}$ za $n \in \mathbb{N}$ i da je pozitivna, neprekidna i monotono nerastuća nad intervalom $[1, \infty)$.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left(-x^{-1}\right)\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{N} + 1\right) = 1,$$

što znači da izračunati nesvojstveni integral konvergira, pa, na osnovu integralnog kriterijuma, konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i pošto važi da je

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \text{ i } \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

sledi da brojni redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ apsolutno konvergiraju.

Dakle, stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x-1)^n$ apsolutno konvergira, a samim tim i konvergira, na intervalu $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ i divergira na $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$.

9. (a) Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Rešenje. Dati red je brojni red sa opštim članom

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, potrebno je ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ gde je

$$b_n = |a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2n+3}\right| = \frac{1}{2n+3}.$$

Za ispitivanje se može primeniti integralni kriterijum jer za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad \text{sa} \quad x \in [1, \infty)$$

važi da je:

- ◇ $f(n) = \frac{1}{2n+3} = b_n$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$;
- ◇ nenegativna i neprekidna jer je $2n+3 > 0$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$;
- ◇ monotono nerastuća nad intervalom $[1, \infty)$ jer je

$$f'(x) = \left((2x+3)^{-1}\right)' = -2(2x+3)^{-2} = -\frac{2}{(2x+3)^2} < 0 \quad \text{za} \quad x \in [1, \infty).$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x)\,dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{2x+3}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{2x+3}\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \int_5^{2N+3} \frac{1}{t}\,dt = \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_5^{2N+3} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln(2N+3) - \ln 5\right) = \infty, \end{aligned}$$

gde je upotrebljena smena: $t = 2x+3$, $dt = 2\,dx$. Kako izračunati nesvojstveni integral divergira, na osnovu integralnog kriterijuma, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, odnosno $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, divergira. To znači da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira apsolutno.

Na osnovu Lajbnicovog kriterijuma red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Naime, za niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ važi:

- ◇ $b_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$;
- ◇ monotono opada, a samim tim je i monotono nerastući, jer je

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+3-(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-2}{(2n+5)(2n+3)} < 0;$$

- ◇ konvergira ka nuli jer

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0.$$

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira.

(b) Dokazati da red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin x}{n^n}$$
uniformno konvergira za $x \in (-\infty, \infty)$.

Rešenje. Dati red je funkcionalni red sa opštim članom
$$f_n(x) = \frac{-\sin x}{n^n}.$$
Iz $-1 \leq \sin x \leq 1$ sledi da je
$$0 \leq |\sin x| \leq 1,$$
tako da je
$$|f_n(x)| = \left| \frac{-\sin x}{n^n} \right| = \frac{|\sin x|}{n^n} \leq \frac{1}{n^n} \quad \text{za svako} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Neka je
$$c_n = \frac{1}{n^n}.$$
Konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ može se ispitati Košijevim kriterijumom jer je opšti član nenegativan.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$
pa na osnovu Košijevog kriterijuma red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, a na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira za svako $x \in (-\infty, \infty)$.

10. (a) Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

Rešenje. Dati red je brojni red sa opštim članom
$$a_n = \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$
Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira. Neka je
$$b_n = |a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \right| = \frac{1}{4n^2 - 1}.$$
Za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ može se primeniti integralni kriterijum jer za funkciju
$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1} \quad \text{sa} \quad x \in [1, \infty)$$
važi da je:

- ◇ $f(n) = b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;
- ◇ nenegativna i neprekidna jer $x \geq 1$ obezbeđuje da je $4x^2 - 1 > 0$;
- ◇ monotono opadajuća jer je
$$f'(x) = \left((4x^2 - 1)^{-1} \right)' = -(4x^2 - 1)^{-2} \cdot 8x = -\frac{8x}{(4x^2 - 1)^2} < 0 \quad \text{za} \quad x \in [1, \infty).$$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{4x^2-1}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{4x^2-1}\,dx,$$

te je podintegralnu funkciju, koja je prava racionalna funkcija, potrebno rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka.

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{(2x-1)\,(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1},$$

pa važi da je

$$1 = A\,(2x+1) + B\,(2x-1)\,.$$

Pošto su obe strane jednakosti polinomi koji treba da su jednaki za svako x, uzimajući da je $x = -\frac{1}{2}$, odnosno $x = \frac{1}{2}$, dobija se da je $1 = -2B$, odnosno $1 = 2A$, što daje da je $A = \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int_1^N \frac{1}{4x^2-1}\,dx &= \int_1^N \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}\,dx - \int_1^N \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^N \frac{1}{2x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^N \frac{1}{2x+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{4}\int_1^{2N-1} \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{4}\int_3^{2N+1} \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{4}\ln|t|\Big|_1^{2N-1} - \frac{1}{4}\ln|s|\Big|_3^{2N+1} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln|2N-1| - \ln 1\right) - \frac{1}{4}\left(\ln|2N+1| - \ln 3\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln(2N-1) - \ln(2N+1) + \ln 3\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{3(2N-1)}{2N+1},
\end{aligned}$$

pri čemu su upotrebljene smene: $t = 2x-1$ sa $dt = 2\,dx$ i $s = 2x+1$ sa $ds = 2\,dx$.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\ln\frac{3(2N-1)}{2N+1} = \frac{1}{4}\ln\left(\lim_{N\to\infty}\frac{3N\left(2-\frac{1}{N}\right)}{N\left(2+\frac{1}{N}\right)}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\lim_{N\to\infty}\frac{3\left(2-\frac{1}{N}\right)}{\left(2+\frac{1}{N}\right)}\right) = \frac{1}{4}\ln(3)$$

što znači da nesvojstveni integral konvergira, pa, na osnovu integralnog kriterijuma, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira. Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

(b) Dokazati da red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n + x^2}$$

apsolutno konvergira za $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Dati red je funkcionalni red sa opštim članom

$$f_n(x) = \frac{n^2}{2^n + x^2}.$$

Pošto $x \in (-\infty, \infty)$, važi da je $x^2 \geq 0$, pa je

$$|f_n(x)| = \left|\frac{n^2}{2^n + x^2}\right| = \frac{n^2}{2^n + x^2} \leq \frac{n^2}{2^n + 0} = \frac{n^2}{2^n} \quad \text{za svako } \ x \in \mathbb{R}.$$

Konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ gde je

$$c_n = \frac{n^2}{2^n}$$

može se pokazati, na primer, Košijevim kriterijumom jer je opšti član nenegativan.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

primenivši da je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Na osnovu Košijevog kriterijuma, uslov $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} < 1$ daje da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, pa na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira za svako $x \in (-\infty, \infty)$.

4.4 Furijeovi redovi

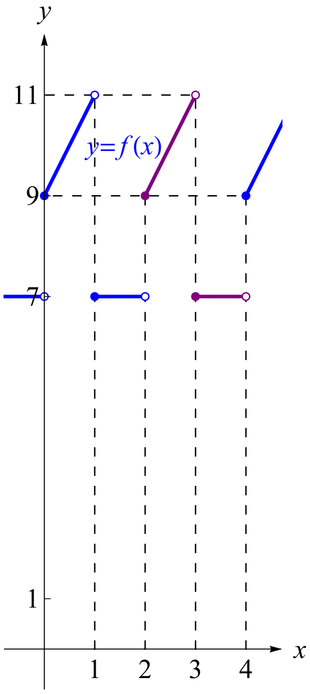
1. Periodičnu funkciju f, s osnovnim periodom 2, razviti u Furijeov red ako je

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \in [2,3), \\ 7, & x \in [3,4). \end{cases}$$

Skicirati grafik funkcije f.

Rešenje. Grafik funkcije f je prikazan na slici 4.4.1. Razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$



Slika 4.4.1

gde je $l = 1$ (jer je 2 osnovni period funkcije f), a Furijeovi koeficijenti se određuju na sledeći način.

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^3 (2x+5)\,dx + \int_3^4 7\,dx = \left[2\frac{x^2}{2} + 5x \right]\Big|_2^3 + \left[7x\right]\Big|_3^4 =$$
$$= 9 + 15 - (4+10) + 7(4-3) = 17,$$

a za $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{1}\int_2^4 f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_2^3 (2x+5)\cos n\pi x\,dx + \int_3^4 7\cos n\pi x\,dx.$$

Integral iz drugog sabirka se može izračunati smenom

$$t = n\pi x \quad \text{sa} \quad dt = n\pi\,dx, \tag{4.4.4}$$

a integral iz prvog primenom parcijalne integracije

$$u = 2x+5, \quad dv = \cos n\pi x\,dx,$$

$$du = 2\,dx, \quad v = \int \cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\int \cos t\,dt = \frac{1}{n\pi}\sin t = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x,$$

pri čemu je upotrebljena smena (4.4.4). Tako je

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{2x+5}{n\pi}\sin n\pi x \right]\Big|_2^3 - \frac{2}{n\pi}\int_2^3 \sin n\pi x\,dx + \frac{7}{n\pi}\int_{3n\pi}^{4n\pi}\cos t\,dt = \\ &= \frac{11}{n\pi}\sin 3n\pi - \frac{9}{n\pi}\sin 2n\pi - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_{2n\pi}^{3n\pi}\sin t\,dt + \frac{7}{n\pi}\left[\sin t\right]\Big|_{3n\pi}^{4n\pi} = \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos t\right]\Big|_{2n\pi}^{3n\pi} + \frac{7}{n\pi}(\sin 4n\pi - \sin 3n\pi) = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos 3n\pi - \cos 2n\pi) = \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^{3n} - (-1)^{2n}\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right). \end{aligned}$$

Koeficijent

$$b_n = \frac{1}{1}\int_2^4 f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_2^3 (2x+5)\sin n\pi x\,dx + \int_3^4 7\sin n\pi x\,dx$$

što, primenom smene (4.4.4) i parcijalne integracije

$$u_1 = 2x+5, \quad dv_1 = \sin n\pi x\,dx,$$

$$du_1 = 2\,dx, \quad v_1 = \int \sin n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{n\pi}\cos t = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x,$$

daje da je

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left[-\frac{2x+5}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_2^3 + \frac{2}{n\pi}\int_2^3 \cos n\pi x\,dx + \frac{7}{n\pi}\int_{3n\pi}^{4n\pi}\sin t\,dt = \\
&= -\frac{11}{n\pi}\cos 3n\pi + \frac{9}{n\pi}\cos 2n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\int_{2n\pi}^{3n\pi}\cos t\,dt - \frac{7}{n\pi}\Big[\cos t\Big]\Big|_{3n\pi}^{4n\pi} = \\
&= -\frac{11}{n\pi}(-1)^{3n} + \frac{9}{n\pi}(-1)^{2n} + \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\sin t\Big]\Big|_{2n\pi}^{3n\pi} - \frac{7}{n\pi}(\cos 4n\pi - \cos 3n\pi) = \\
&= -\frac{11}{n\pi}(-1)^n + \frac{9}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2}(\sin 3n\pi - \sin 2n\pi) - \frac{7}{n\pi}((-1)^{4n} - (-1)^{3n}) = \\
&= -\frac{11}{n\pi}(-1)^n + \frac{9}{n\pi} - \frac{7}{n\pi}(1-(-1)^n) = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(2(-1)^{n+1}+1\right).
\end{aligned}
$$

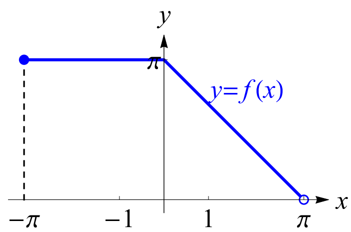
Znači,

$$
f(x) = \frac{17}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi x + \frac{2}{n\pi}\left(2(-1)^{n+1}+1\right)\sin n\pi x\right),
$$

odnosno

$$
f(x) = \frac{17}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos n\pi x + \frac{2(-1)^{n+1}+1}{n}\sin n\pi x\right).
$$

2. Odrediti Furijeov red periodične funkcije f, s osnovnim periodom 2π, čiji je grafik koji odgovara intervalu $[-\pi,\pi)$ prikazan na slici 4.4.2.



Slika 4.4.2

Rešenje. Na osnovu grafika funkcije,

$$
f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in [-\pi, 0), \\ \pi - x, & x \in [0,\pi). \end{cases}
$$

Razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija se

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right),
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi x\Big|_{-\pi}^{0} + \left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 + \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2},
\end{aligned}
$$

a, za $n \in \mathbb{N}$,

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right)
$$

i

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\right).
$$

Primenom smene

$$
t = nx, \quad \text{odakle je } dt = n\,dx, \quad \text{odnosno } dx = \frac{1}{n}\,dt,
$$

$$
\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos t\,dt = \frac{1}{n}\sin nx + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R},
$$

i

$$
\int \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{n}\cos nx + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R},
$$

pa se Furijeovi koeficijenti a_n mogu izračunati parcijalnom integracijom gde je

$$u = \pi - x, \;\; dv = \cos nx \, dx,$$
$$du = -dx, \;\; v = \int \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx,$$

pa je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\pi}{n} \sin nx \right] \Bigg|_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\pi - x}{n} \sin nx \right] \Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} (\sin 0 - \sin(-n\pi)) - \frac{\pi}{n} \sin 0 - \frac{1}{n^2} \left[\cos nx \right] \Bigg|_0^{\pi} \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi n^2} (\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}.
\end{aligned}$$

Furijeovi koeficijenti b_n, $n \in \mathbb{N}$, se mogu izračunati parcijalnom integracijom sa

$$u_1 = \pi - x, \;\; dv_1 = \sin nx \, dx,$$
$$du_1 = -dx, \;\; v_1 = \int \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx,$$

te je

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\pi}{n} \cos nx \right] \Bigg|_{-\pi}^{0} - \left[\frac{\pi - x}{n} \cos nx \right] \Bigg|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} (\cos 0 - \cos(-n\pi)) + \frac{\pi}{n} \cos 0 \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} (1 - (-1)^n) + \frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{n} (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

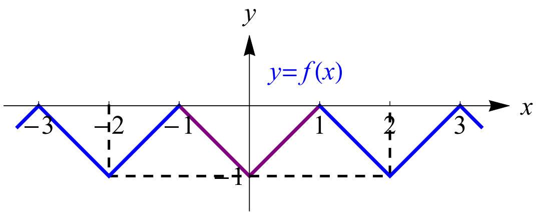
Dakle,

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right), \;\; x \in [-\pi, \pi).$$

3. Neka je f periodična funkcija s osnovnim periodom 2 takva da je $f(x) = |x| - 1$ za $x \in [-1, 1]$. Skicirati grafik funkcije f, potom funkciju f razviti u Furijeov red.

Rešenje. Grafik funkcije f je prikazan na slici 4.4.3. Razvojem funkcije f u Furijeov red dobija se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x).$$



Slika 4.4.3

Furijeovi koeficijenti definisani intervalom $[-1, 1]$ su:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx, \;\; a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx, \;\; b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x \, dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Pošto je grafik funkcije f simetričan u odnosu na y-osu, funkcija f je parna*. Kako je i kosinusna funkcija parna, a sinusna funkcija neparna, činjenice da je proizvod neparne i parne funkcije neparna funkcija i proizvod dve parne funkcije parna funkcija daju da je podintegralna funkcija za koeficijente a_n parna, a podintegralna funkcija za koeficijente b_n neparna. Koristeći da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu nula i integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak dvostrukom integralu na polovini oblasti integracije,

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) \, dx, \;\; a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx, \;\; b_n = 0.$$

*Parnost funkcije f se mogla utvrditi i na osnovu činjenica da je funkcija f periodična s periodom 2 i da za $x \in [-1, 1]$ važi da je

$$f(-x) = |-x| - 1 = |x| - 1 = f(x).$$

Pošto je

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \le x \le 1, \\ -x-1, & -1 \le x < 0, \end{cases}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (x-1)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - x\right]\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1,$$

$$a_n = 2\int_0^1 (x-1)\cos n\pi x\, dx = 2\left(\left[\frac{x-1}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Bigg|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\, dx\right)$$

na osnovu parcijalne integracije sa

$$u = x-1,\ \ dv = \cos n\pi x\, dx,$$

$$du = dx,\ \ v = \int \cos n\pi x\, dx = \frac{1}{n\pi}\int \cos t\, dt = \frac{1}{n\pi}\sin t = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x,$$

pri čemu je upotrebljena smena

$$t = n\pi x, \ \text{ odakle je } \ dt = n\pi\, dx.$$

Dalje je, primenom iste smene,

$$a_n = 2\left(\frac{1}{n\pi}\sin 0 - \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} \sin t\, dt\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\cos t\Big]\Bigg|_0^{n\pi} = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right),$$

pa je

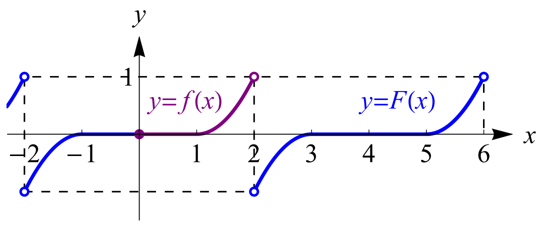
$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi x.$$

4. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ (x-1)^2, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

proširiti u funkciju $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tako da funkcija F bude neparna i periodična s osnovnim periodom 4. Zatim, funkciju F razviti u Furijeov red. Nacrati grafik $y = F(x)$.

Rešenje. Prvo je potrebno funkciju f proširiti u neparnu funkciju $\bar{f} : (-2, 2) \to \mathbb{R}$. Potom se funkcija $\bar{f}$ može proširiti u funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je periodična s osnovnim periodom 4. Grafici funkcija f i F su prikazani na slici 4.4.4.
Pošto je funkcija F periodična s osnovnim periodom 4, njenim razvijanjem u Furijeov red dobija se



Slika 4.4.4

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right),$$

gde su Furijeovi koeficijenti, definisani intervalom $(-2, 2)$,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\, dx,\ \ a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\, dx \ \text{ i } \ b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\, dx,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći da je funkcija F neparna, kosinusna funkcija parna, proizvod neparne i parne funkcije neparna funkcija i integral neparne funkcije na simetričnom intervalu nula,

$$a_0 = 0 \ \text{ i } \ a_n = 0 \ \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Na osnovu neparnosti funkcije F i sinusne funkcije i činjenica da je proizvod dve neparne funkcije parna funkcija, a integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak dvostrukom integralu na polovini tog intervala,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 F(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 F(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \\ &= \int_0^1 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (x-1)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_1^2 (x-1)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx. \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom sa

$$u = (x-1)^2,\;\; dv = \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx,$$

$$du = 2(x-1)\,dx,\;\; v = \int \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\int \sin t\,dt = -\frac{2}{n\pi}\cos t = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2},$$

gde je primenjena smena

$$t = \frac{n\pi x}{2},\;\; dt = \frac{n\pi}{2}\,dx, \tag{4.4.5}$$

je

$$b_n = \left[-\frac{2}{n\pi}(x-1)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]\Bigg|_1^2 + \frac{4}{n\pi}\int_1^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n\pi}\int_1^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx.$$

Parcijalnom integracijom sa

$$u_1 = x-1,\;\; dv_1 = \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx,$$

$$du_1 = dx,\;\; v_1 = \int \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\int \cos t\,dt = \frac{2}{n\pi}\sin t = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2},$$

primenivši smenu (4.4.5), je dalje

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\left(\left[\frac{2}{n\pi}(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\right]\Bigg|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \\ &= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\sin n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]\Bigg|_1^2\right) = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{16}{n^3\pi^3}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \\ &= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{16}{n^3\pi^3}(-1)^n - \frac{16}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{n^3\pi^3}\left(\left(8-n^2\pi^2\right)(-1)^n - 8\cos\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Dakle, razvijanjem funkcije F u Furijeov red dobija se red sinusa,

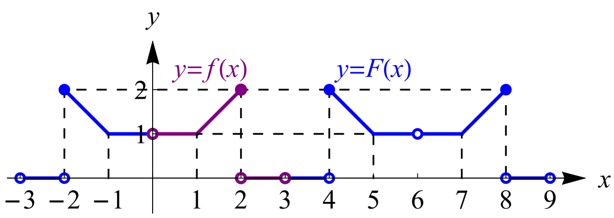
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi^3}\left(\left(8-n^2\pi^2\right)(-1)^n - 8\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

5. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in(0,1], \\ x, & x\in(1,2], \\ 0, & x\in(2,3) \end{cases}$$

proširiti u parnu i periodičnu funkciju s osnovnim periodom 6, a zatim proširenu funkciju razviti u Furijeov red. Skicirati grafik proširene funkcije.

Rešenje. Prvo je potrebno proširiti funkciju f u parnu funkciju $\bar{f} : (-3,3)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. Zatim se funkcija $\bar{f}$ može proširiti u funkciju $F : \mathbb{R}\setminus\{6k \mid k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ koja je periodična s osnovnim periodom 6. Grafici funkcija f i F su prikazani na slici 4.4.5.



Slika 4.4.5

Pošto je funkcija F periodična s osnovnim periodom 6, njenim razvijanjem u Furijeov red dobija se

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{3} + b_n\sin\frac{n\pi x}{3}\right),$$

gde su koeficijenti, određeni intervalom $(-3,3)$,

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\,dx, \ \ a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx \ \text{ i } \ b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx, \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Funkcija F i kosinusna funkcija su parne, sinusna funkcija je neparna, proizvod dve parne funkcije je parna funkcija, proizvod parne i neparne funkcije je neparna funkcija, integral neparne funkcije na simetričnom intervalu je nula i integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak je dvostrukom integralu na polovini tog intervala, pa je

$$b_n = 0 \ \text{ za svako } n\in\mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3}\cdot 2\int_0^3 F(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 1\,dx + \int_1^2 x dx + \int_2^3 0\,dx\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left(\left[x\right]\Big|_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2\right) = \frac{2}{3}\left(1+2-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_1^2 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right).$$

Smenom

$$t = \frac{n\pi x}{3}, \ \ dt = \frac{n\pi}{3}\,dx, \tag{4.4.6}$$

je

$$\int \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{3}{n\pi}\int \cos t\,dt = \frac{3}{n\pi}\sin t + C, \ C\in\mathbb{R},$$

te se parcijalnom integracijom sa

$$u = x, \ \ dv = \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx,$$

$$du = dx, \ \ v = \int \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3},$$

dobija da je

$$a_n = \frac{2}{3}\left(\left[\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]\Big|_0^1 + \left[\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]\Big|_1^2 - \frac{3}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right).$$

Primenom smene (4.4.6) u poslednjem sabirku,

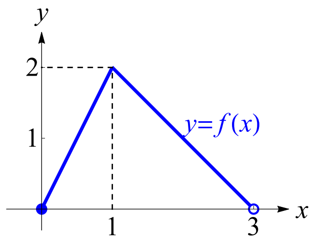
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi}\sin 0 + \frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\int_{\frac{n\pi}{3}}^{\frac{2n\pi}{3}} \sin t\,dt\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\left[\cos t\right]\Big|_{\frac{n\pi}{3}}^{\frac{2n\pi}{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\right)\right) = \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left(2n\pi\sin\frac{2n\pi}{3} + 3\cos\frac{2n\pi}{3} - 3\cos\frac{n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Znači, razvijanjem funkcije F u Furijeov red dobija se red kosinusa

$$F(x) = \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\left(2n\pi\sin\frac{2n\pi}{3} + 3\cos\frac{2n\pi}{3} - 3\cos\frac{n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

6. Nacrtati grafik funkcije
$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \in [0,1], \\ 3-x\,, & x \in (1,3), \end{cases}$$
a potom je razviti u red sinusa.

Rešenje. Grafik funkcije f je prikazan na slici 4.4.6. Da bi se funkcija f razvila u red sinusa, potrebno je proširiti je u neparnu funkciju $\bar{f} : (-3,3) \to \mathbb{R}$ koja se potom proširi u periodičnu funkciju F sa osnovnim periodom 6 i razvije u Furijeov red. Dakle, funkcija F je neparna i važi da je
$$F(x) = f(x) \quad \text{za } x \in [0,3),$$
pa se njenim razvijanjem u Furijeov red dobija
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{3} + b_n \sin \frac{n\pi x}{3} \right)$$



Slika 4.4.6

s koeficijentima
$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} F(x)\,dx, \;\; a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} F(x) \cos \frac{n\pi x}{3}\,dx \;\text{ i }\; b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} F(x) \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$
Koristeći da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu jednak nuli, a integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak dvostrukom integralu te funkcije na polovini simetričnog intervala,
$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} \overbrace{F(x)}^{\text{neparna}}\,dx = 0 \;\text{ i, za } n \in \mathbb{N}, \;\; a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{neparna}} \overbrace{\cos \frac{n\pi x}{3}}^{\text{parna}}}_{\text{neparna}}\,dx = 0 \;\text{ i}$$
$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{neparna}} \overbrace{\sin \frac{n\pi x}{3}}^{\text{neparna}}}_{\text{parna}}\,dx = \frac{1}{3} \cdot 2 \int_{0}^{3} F(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{2}{3} \int_{0}^{3} f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx =$$
$$= \frac{2}{3} \left(\int_{0}^{1} 2x \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_{1}^{3} (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx \right) = \frac{2}{3} \left(2 \int_{0}^{1} x \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_{1}^{3} (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx \right).$$
Oba integrala se mogu izračunati parcijalnom integracijom. Prvi sa
$$u = x, \;\; dv = \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx,$$
$$du = dx, \;\; v = \int \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{3}{n\pi} \int \sin t\,dt = -\frac{3}{n\pi} \cos t = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3},$$
pri čemu je upotrebljena smena
$$t = \frac{n\pi x}{3}, \;\; \text{gde je } \; dt = \frac{n\pi}{3}\,dx, \;\; \text{odnosno } \; dx = \frac{3}{n\pi}\,dt. \tag{4.4.7}$$
$$\int_{0}^{1} x \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx = \left[-x \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \right] \Bigg|_{0}^{1} + \frac{3}{n\pi} \int_{0}^{1} \cos \frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 \int_{0}^{\frac{n\pi}{3}} \cos t\,dt =$$
$$= -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \Big[\sin t \Big] \Bigg|_{0}^{\frac{n\pi}{3}} = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{n\pi}{3} - \sin 0 \right) =$$
$$= -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{3},$$
primenivši istu smenu. Parcijalna integracija za integral iz drugog sabirka koeficijenta b_n je
$$u_1 = 3 - x, \;\; dv_1 = \sin \frac{n\pi x}{3}\,dx,$$
$$du_1 = -dx, \;\; v_1 = v = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3},$$
te je

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx &= \left[-(3-x)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]\Bigg|_1^3 - \frac{3}{n\pi}\int_1^3 \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \\ &= 2\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \left(\frac{3}{n\pi}\right)^2\int_{\frac{n\pi}{3}}^{n\pi}\cos t\,dt = \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2}\Big[\sin t\Big]\Bigg|_{\frac{n\pi}{3}}^{n\pi} = \\ &= \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3},\end{aligned}$$

s tim da je primenjena smena (4.4.7). Stoga je

$$b_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{18}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} = \frac{18}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3},$$

te je

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{3},$$

a samim tim i

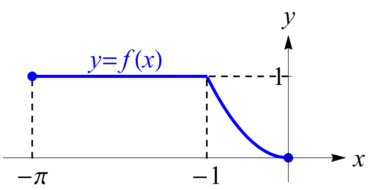
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{3} \quad \text{za } x\in[0,3).$$

7. Nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in[-\pi,-1], \\ x^2, & x\in(-1,0], \end{cases}$$

a potom je razviti u red kosinusa.

Rešenje. Grafik funkcije f je prikazan na slici 4.4.7. Da bi se funkcija f razvila u red kosinusa, potrebno ju je



Slika 4.4.7

proširiti u parnu funkciju $\bar{f}:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ koja se potom proširi u periodičnu funkciju F sa osnovnim periodom 2π i razvije u Furijeov red. Dakle, funkcija F je parna i važi da je

$$F(x) = f(x) \quad \text{za } x\in[-\pi,0],$$

pa se njenim razvijanjem u Furijeov red dobija

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

s koeficijentima

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx \ \text{ i } \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Koristeći da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu jednak nuli, a integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak dvostrukom integralu te funkcije na polovini simetričnog intervala,

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{F(x)}^{\text{parna}}\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{-\pi}^{0}F(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-1}dx + \int_{-1}^{0}x^2\,dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\Big[x\Big]\Bigg|_{-\pi}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{0}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-1+\pi+\frac{1}{3}(0+1)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{2}{3}\right) = 2-\frac{4}{3\pi},\end{aligned}$$

i, za $n\in\mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{parna}}\cdot\overbrace{\sin nx}^{\text{neparna}}}_{\text{neparna}}\,dx = 0$$

i

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{parna}} \cdot \overbrace{\cos nx}^{\text{parna}}}_{\text{parna}} dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{-\pi}^{0} F(x)\cdot\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos nx\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-1}\cos nx\,dx + \int_{-1}^{0} x^2\cos nx\,dx\right).$$

Smenom

$$t = nx, \text{ gde je } dt = n\,dx, \tag{4.4.8}$$

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos t\,dt = \frac{1}{n}\sin t + C = \frac{1}{n}\sin nx + C,\ C\in\mathbb{R},$$

pa se parcijalnom integracijom

$$u = x^2,\ dv = \cos nx\,dx,$$

$$du = 2x\,dx,\ v = \int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx,$$

dobija da je

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{-1} + \left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{2}{n}\int_{-1}^{0} x\sin nx\,dx\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\sin(-n) - \sin(-n\pi)\right) - \frac{1}{n}\sin(-n) - \frac{2}{n}\int_{-1}^{0} x\sin nx\,dx\right) = -\frac{4}{n\pi}\int_{-1}^{0} x\sin nx\,dx.$$

Primenom parcijalne integracije

$$u_1 = x,\ dv_1 = \sin nx\,dx,$$

$$du_1 = dx,\ v_1 = \int \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{n}\cos t = -\frac{1}{n}\cos nx,$$

pri čemu je ponovo upotrebljena smena (4.4.8),

$$\int_{-1}^{0} x\sin nx\,dx = \left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-1}^{0}\cos nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos(-n) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]\Bigg|_{-1}^{0} =$$
$$= -\frac{1}{n}\cos n + \frac{1}{n^2}\left(\sin 0 - \sin(-n)\right) = -\frac{1}{n}\cos n + \frac{1}{n^2}\sin n,$$

koristeći parnost kosinusne funkcije i neparnost sinusne funkcije. Dalje je

$$a_n = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos n + \frac{1}{n^2}\sin n\right) = \frac{4}{n^3\pi}\left(n\cos n - \sin n\right).$$

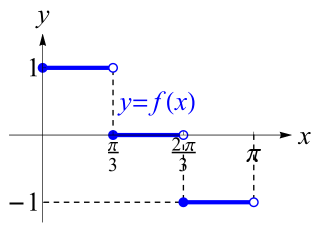
Sada je

$$F(x) = 1 - \frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(n\cos n - \sin n\right)}{n^3\pi}\cos nx,$$

te je

$$f(x) = 1 - \frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(n\cos n - \sin n\right)}{n^3\pi}\cos nx \quad \text{za } x\in[-\pi,0].$$

8. Grafik funkcije
$$f : [0, \pi) \to \mathbb{R}$$
je dat na Slici 4.4.8. Funkciju f razviti u red kosinusa.

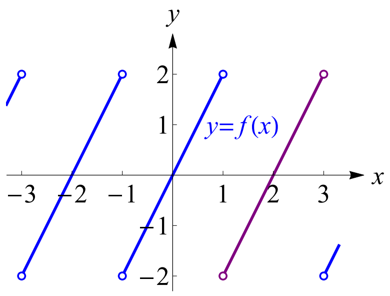


Slika 4.4.8

Rešenje. Na osnovu datog grafika funkcije f,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right), \\ 0, & x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right). \end{cases}$$
Da bi se dobio red kosinusa funkcije f, potrebno je proširiti funkciju f u parnu funkciju $\bar{f} : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ koja se potom proširi u periodičnu funkciju F sa osnovnim periodom 2π i razvije u Furijeov red. Znači, funkcija F je parna i važi da je
$$F(x) = f(x) \quad \text{za} \ \ x \in [0, \pi),$$
pa se njenim razvijanjem u Furijeov red dobija
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
gde je
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, dx, \ \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\, dx \ \text{ i } \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx\, dx, \ \ n \in \mathbb{N}.$$
Pošto je funkcija F parna, a sinusna funkcija neparna, činjenice da je proizvod parne i neparne funkcije neparna funkcija i da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu nula daju da je
$$b_n = 0, \ \ \text{za svako} \ \ n \in \mathbb{N},$$
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} F(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\Big[x\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \Big[x\Big]\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \left(\pi - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 0, \end{aligned}$$
a, za $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} F(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos nx\, dx - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos nx\, dx \right).$$
Smenom
$$t = nx, \ \ \text{sa} \ \ dt = n\, dx, \ \ \text{odnosno} \ \ \frac{1}{n} dt = dx,$$
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \int_0^{\frac{n\pi}{3}} \cos t\, dt - \frac{1}{n} \int_{\frac{2n\pi}{3}}^{n\pi} \cos t\, dt \right) = \frac{2}{n\pi} \left(\Big[\sin t\Big]\Big|_0^{\frac{n\pi}{3}} - \Big[\sin t\Big]\Big|_{\frac{2n\pi}{3}}^{n\pi} \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{3} - \sin 0 - \sin n\pi + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right). \end{aligned}$$
Stoga je
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \cos nx,$$
pa je
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \cos nx, \quad x \in [0, \pi).$$

9. Nacrtati grafik periodične funkcije f s osnovnim periodom 2 za koju važi da je $f(x) = 2x - 4$ za $x \in (1, 3)$, a potom je razviti u Furijeov red.

Rešenje. Funkcija f je neparna jer za njen grafik (prikazan na slici 4.4.9) važi da je na intervalu $(-1, 1)$ osno simetričan u odnosu na kooordinatni početak. Osnovni period funkcije f je 2, te njenim razvijanjem u Furijeov red,



Slika 4.4.9

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

s koeficijentima određenim na osnovu intervala $(1, 3)$:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (2x-4)\,dx = \left[x^2 - 4x\right]\Big|_1^3 =$$
$$= 9 - 12 - (1-4) = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_1^3 (2x-4)\cos n\pi x\,dx$$

$$\text{i}\ \ b_n = \frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_1^3 (2x-4)\sin n\pi x\,dx,\ \ \text{za}\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Pošto se smenom

$$t = n\pi x,\ \ dt = n\pi\,dx,\ \ \text{odnosno}\ \ \frac{1}{n\pi}\,dt = dx, \tag{4.4.9}$$

dobija da je

$$\int \cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\int \cos t\,dt = \frac{1}{n\pi}\sin t + C_1 = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}, \tag{4.4.10}$$

i

$$\int \sin n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{n\pi}\cos t + C_2 = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R},$$

parcijalnom integracijom

$$u = 2x - 4,\ \ dv = \cos n\pi x\,dx,$$
$$du = 2\,dx,\ \ v = \int \cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x,$$

dobija se

$$a_n = \left[\frac{2x-4}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Big|_1^3 - \frac{2}{n\pi}\int_1^3 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin 3n\pi + \frac{2}{n\pi}\sin n\pi - \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_1^3 =$$
$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos 3n\pi - \cos n\pi) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^{3n} - (-1)^n\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - (-1)^n\right) = 0.$$

Parcijalnom integracijom

$$u_1 = 2x - 4,\ \ dv_1 = \sin n\pi x\,dx,$$
$$du_1 = 2\,dx,\ \ v_1 = \int \sin n\pi x\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x,$$

dobija se da je

$$b_n = \left[-\frac{2x-4}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_1^3 + \frac{2}{n\pi}\int_1^3 \cos n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos 3n\pi - \frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Big|_1^3 =$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^{3n} + (-1)^n\right) + \frac{2}{n^2\pi^2}(\sin 3n\pi - \sin n\pi) = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n + (-1)^n\right) =$$
$$= -\frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Znači, funkcija f razvijena u red sinusa je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x.$$

Pošto je funkcija f periodična, Furijeovi koeficijenti se mogu odrediti i na osnovu intervala $(-1,1)$, s tim da je

$$f(x) = (2(x+2)-4) = 2x \quad \text{za} \;\; x \in (-1,1).$$

U tom slučaju se može iskoristiti neparnost funkcije f, odnosno da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu jednak nuli, a integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak dvostrukom integralu te funkcije na polovini simetričnog intervala. Tada su Furijeovi koeficijenti:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \overbrace{f(x)}^{\text{neparna}}\,dx = 0, \;\; \text{i, za} \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{neparna}}\;\overbrace{\cos n\pi x}^{\text{parna}}}_{\text{neparna}}\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{neparna}}\;\overbrace{\sin n\pi x}^{\text{neparna}}}_{\text{parna}}\,dx = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx = 4\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx.$$

Parcijalnom integracijom

$$u_2 = x, \;\; dv_2 = \sin n\pi x\,dx,$$
$$du_2 = dx, \;\; v_2 = v_1 = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x,$$

i koristeći da važi (4.4.9),

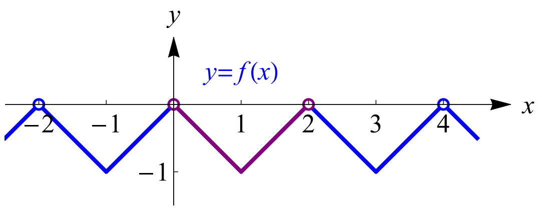
$$\begin{aligned} b_n &= 4\left(\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Bigg|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx\right) = 4\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Bigg|_0^1\right) = \\ &= 4\left(-\frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi - \sin 0\right)\right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}. \end{aligned}$$

10. Nacrtati grafik periodične funkcije f s osnovnim periodom 2 za koju važi da je

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0,1], \\ x-2, & x \in (1,2), \end{cases}$$

a potom je razviti u Furijeov red.

Rešenje. Grafik funkcije f, prikazan na slici 4.4.10, je simetričan u odnosu na y-osu, tako da je funkcija f parna.



Slika 4.4.10

Pošto je osnovni period funkcije 2, razvijanjem funkcije f u Furijeov red dobija se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\right).$$

Furijeovi koeficijenti određeni na osnovu intervala $(0,2)$ su:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (x-2)\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]\Bigg|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2} + 2 - 4 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = -1 \end{aligned}$$

i, za $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,dx = -\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (x-2)\cos n\pi x\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,dx = -\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 (x-2)\sin n\pi x\,dx. \end{aligned}$$

Pošto se smenom

$$t = n\pi x, \ \ dt = n\pi\, dx, \tag{4.4.11}$$

dobija da je

$$\int \cos n\pi x\, dx = \frac{1}{n\pi}\int \cos t\, dt = \frac{1}{n\pi}\sin t + C_1 = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x + C_1, \ \ C_1 \in \mathbb{R},$$

i

$$\int \sin n\pi x\, dx = \frac{1}{n\pi}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{n\pi}\cos t + C_2 = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + C_2, \ \ C_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.4.12}$$

parcijalne integracije

$$\begin{gathered} u = x, \ \ dv = \cos n\pi x\, dx, \\ du = dx, \ \ v = \int \cos n\pi x\, dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x, \end{gathered} \tag{4.4.13}$$

i

$$u_1 = x - 2, \ \ dv_1 = \cos n\pi x\, dx$$

$$du_1 = dx, \ \ v_1 = v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x,$$

daju da je

$$\begin{aligned} a_n &= -\left(\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\, dx\right) + \left[\frac{x-2}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Big|_1^2 - \frac{1}{n\pi}\int_1^2 \sin n\pi x\, dx = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\sin n\pi + \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) - \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(-(\cos n\pi - \cos 0) + \cos 2n\pi - \cos n\pi\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right). \end{aligned}$$

Parcijalnim integracijama

$$u_2 = x, \ \ dv_2 = \sin n\pi x\, dx,$$

$$du_2 = dx, \ \ v_2 = \int \sin n\pi x\, dx = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x,$$

i

$$u_3 = x - 2, \ \ dv_3 = \sin n\pi x\, dx$$

$$du_3 = dx, \ \ v_3 = v_2 = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x,$$

dobija se da je

$$\begin{aligned} b_n &= -\left(\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx\right) - \left[\frac{x-2}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Big|_1^2 + \frac{1}{n\pi}\int_1^2 \cos n\pi x\, dx = \\ &= \frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]\Big|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2}(\sin n\pi - \sin 0) + \frac{1}{n^2\pi^2}(\sin 2n\pi - \sin n\pi) = 0, \end{aligned}$$

te je Furijeov red date funkcije

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1 - (-1)^n\right)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

Pošto je funkcija f periodična, Furijeovi koeficijenti se mogu odrediti i na osnovu intervala $(-1,1)$. U tom slučaju se može iskoristiti parnost funkcije f, odnosno da je integral neparne funkcije na simetričnom intervalu jednak nuli i da je integral parne funkcije na simetričnom intervalu jednak dvostrukom integralu te funkcije na polovini simetričnog intervala. U tom slučaju su Furijeovi koeficijenti:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \overbrace{f(x)}^{\text{parna}}\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = -2\int_0^1 x\,dx = -2\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 = -1,\\
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{parna}}\overbrace{\cos n\pi x}^{\text{parna}}}_{\text{parna}}\,dx = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = -2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx,\\
b_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{parna}}\overbrace{\sin n\pi x}^{\text{neparna}}}_{\text{neparna}}\,dx = 0, \quad \text{za } n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom (4.4.13) i koristeći da važi (4.4.12),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx &= \left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right]\Bigg|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) - \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]\Bigg|_0^1 = \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right),
\end{aligned}$$

pa je

$$a_n = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2}.$$

4.5 Numerička analiza

1. Izračunati približnu vrednost integrala
$$I = \int_{-0.8}^{0.8} \log_3^2 (1 - x^2)\, dx,$$
koristeći

   (a) interpolacioni polinom drugog stepena sa ekvidistantnom podelom;

   (b) trapeznu formulu, deleći interval integracije sa devet ekvidistantnih čvorova;

   (c) Simpsonovu formulu, deleći interval integracije na osam ekvidistantnih podintervala.

   Rešenje.

   (a) Približna vrednost integrala se može odrediti pomoću interpolacionog polinoma tako što se podintegralna funkcija aproksimira interpolacionim polinomom. Stoga se, označavanjem podintegralne funkcije sa f, zadatak svodi na:
$$I = \int_{-0.8}^{0.8} f(x)\, dx \approx \int_{-0.8}^{0.8} L_2(x)\, dx.$$
Za interpolacioni polinom drugog stepena je potrebno interval $[-0.8, 0.8]$ podeliti na dva podintervala dužine $h = \frac{0.8-(-0.8)}{2} = 0.8$, pa se dobija da je
$$x_0 = -0.8,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 0.8 \ \text{ i}$$
$$y_0 = f(x_0) = 0.86480,\ \ y_1 = f(x_1) = 0,\ \ y_2 = f(x_2) = 0.86480.$$
Sada je Lagranžov interpolacioni polinom
$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= 0.86480\,\frac{x(x-0.8)}{-0.8\cdot(-1.6)} + 0.86480\,\frac{(x+0.8)x}{1.6\cdot 0.8} = \\ &= 0.67562(x^2-0.8x) + 0.67562(x^2+0.8x) = 1.35124x^2, \end{aligned}$$
pa je
$$I \approx \int_{-0.8}^{0.8} 1.35124x^2 dx = 1.35124\frac{x^3}{3}\Big|_{-0.8}^{0.8} = \frac{1.35124}{3}(0.8^3 + 0.8^3) = 0.46122\,.$$

   (b) Za podelu intervala integracije sa devet ekvidistantnih čvorova, potrebno je interval $[-0.8, 0.8]$ podeliti na osam podintervala dužine $h = \frac{0.8-(-0.8)}{8} = 0.2$. Tako je

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$y_i = f(x_i)$	0.86480	0.16502	0.02519	0.00138	0	0.00138	0.02519	0.16502	0.86480

.

   Sada je
$$\begin{aligned} I &\approx T_8 = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{7} y_i + y_8\right) = \\ &= \frac{0.2}{2}(0.86480 + 2(0.16502 + 0.02519 + 0.00138 + 0.00138 + 0.02519 + 0.16502) + 0.86480) = \\ &= 0.24960 \end{aligned}$$

   (c) U ovom slučaju su čvorovi isti kao u delu pod (b), tako da je
$$\begin{aligned} I &\approx S_8 = \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1+y_3+y_5+y_7) + 2(y_2+y_4+y_6) + y_8) = \\ &= \frac{0.2}{3}\,(0.86480 + 4(0.16502 + 0.00138 + 0.00138 + 0.16502) + 2(0.02519 + 0.02519) + 0.86480) = \\ &= 0.21077 \end{aligned}$$

2. Neka je $f(x) = 2\log(\cos x)$ data funkcija.

   (a) Odrediti interpolacioni polinom funkcije f za interval $[-1, 1]$, koristeći tri ekvidistantno raspoređena interpolaciona čvora. Kolika apsolutna greška se dobija računajući $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ dobijenim interpolacionim polinomom?

   (b) Primenom trapezne formule, izračunati približnu vrednost veličine površine zatvorene oblasti određene krivama $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ i $x = 1$. Upotrebiti sedam ekvidistantno raspoređenih čvorova integracije.

   (c) Izračunati približnu vrednost integrala $\int_{-1}^{1} (f(x))^2\, dx$, koristeći Simpsonovu formulu sa intervalom integracije podeljenim na šest jednakih delova.

Rešenje.

(a) Traženi interpolacioni polinom za tri ekvidistantna interpolaciona čvora je Lagranžov interpolacioni polinom sa dva podintervala

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

gde je

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$y_i = f(x_i)$	-0.53473	0	-0.53473

jer je dužina podintervala $h = \frac{1-(-1)}{2} = 1$. Dalje je

$$\begin{aligned} L_2(x) &= -0.53473\,\frac{x(x-1)}{-1\cdot(-2)} - 0.53473\,\frac{(x+1)x}{2} = -0.26737(x^2-x) - 0.26737(x^2+x) = \\ &= = -0.53473x^2. \end{aligned}$$

Tražena apsolutna greška je

$$\Delta_A\left(L_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - L_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|-\log 2 + 0.53473\cdot\frac{\pi^2}{16}\right| \approx 0.02882 \approx 2.88\%.$$

(b) Pošto za $x \in [-1, 1]$ važi da je $\cos x \in [\cos 1, 1]$, sledi da je $f(x) \le 0$, pa je tražena površina

$$P = -\int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

Primenom trapezne formule sa sedam ekvidistantno raspoređenih čvorova integracije, dobija se šest podintervala dužine $h = \frac{1-(-1)}{6} = \frac{1}{3}$, tako da je

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y_i = f(x_i)$	-0.53473	-0.20928	-0.04918	0	-0.04918	-0.20928	-0.53473

Stoga je

$$\begin{aligned} P &\approx -T_6 = -\frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5) + y_6) = \\ &= -\frac{1}{6}(-0.53473 + 2(-0.20928 - 0.04918 - 0.04918 - 0.20928) - 0.53473) = 0.35055. \end{aligned}$$

(c) U pitanju je isti interval integracije i broj podintervala kao u delu pod (b), tako da su i čvorovi integracije isti, s tim da je sada

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y_i = (f(x_i))^2$	0.28593	0.04380	0.00242	0	0.00242	0.04380	0.28593

.

Odavde je

$$\int_{-1}^{1} (f(x))^2\,dx \approx S_6 = \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6) =$$
$$= \frac{1}{9}(0.28593 + 4(0.04380 + 0.04380) + 2(0.00242 + 0.00242) + 0.28593) = 0.103549.$$

3. Neka su za funkciju f poznate vrednosti navedene u tabeli

x	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$f(x)$	3.58385	3.57094	3.56857	3.5403	3.45255	3.27829	3

Odrediti veličinu površine zatvorene oblasti određene krivama $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ i $x = 0$.

(a) primenom interpolacionog polinoma trećeg stepena koji aproksimira funkciju f na intervalu $[-2, 0]$, koristeći ekvidistantnu podelu intervala;

(b) primenom Simpsonove formule.

Rešenje. Kako su date vrednosti funkcije f pozitivne, tražena površina je

$$P = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx.$$

(a) Površina P se može odrediti pomoću interpolacionog polinoma tako što se funkcija f aproksimira njime. Za interpolacioni polinom trećeg stepena je potrebno interval integracije podeliti na 3 podintervala, pa su podintervali dužine $h = \frac{2}{3}$, što znači da je

$$x_0 = -2,\ \ x_1 = -\frac{4}{3},\ \ x_2 = -\frac{2}{3},\ \ x_3 = 0,\ \ \text{odnosno}$$

$$y_0 = f(x_0) = 3.58385,\ \ y_1 = f(x_1) = 3.56857,\ \ y_2 = f(x_2) = 3.45255,\ \ y_3 = f(x_3) = 3.$$

Sada je Lagranžov interpolacioni polinom

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
&\quad + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\
&= 3.58385\frac{\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)x}{-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(-2)} + 3.56857\frac{(x+2)\left(x+\frac{2}{3}\right)x}{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} + \\
&\quad + 3.45255\frac{(x+2)\left(x+\frac{4}{3}\right)x}{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} + 3\frac{(x+2)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \\
&= -2.01592\left(x^3 + 2x^2 + \frac{8}{9}x\right) + 6.02196\left(x^3 + \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right) - \\
&\quad - 5.82618\left(x^3 + \frac{10}{3}x^2 + \frac{8}{3}x\right) + \frac{27}{16}\left(x^3 + 4x^2 + \frac{44}{9}x + \frac{16}{9}\right) = \\
&= -0.13264x^3 - 0.64388x^2 - 1.04913x + 3,
\end{aligned}$$

pa je

$$P \approx \int_{-2}^{0} L_3(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \left(-0.13264x^3 - 0.64388x^2 - 1.04913x + 3\right)\,dx =$$
$$= -\left[0.13264\frac{x^4}{4} + 0.64388\frac{x^3}{3} + 1.04913\frac{x^2}{2} - 3x\right]\Bigg|_{-2}^{0} \approx 6.91181.$$

(b) Na osnovu vrednosti u datoj tabeli se može zaključiti da je u pitanju ekvidistantna podela intervala na 6 podintervala dužine $\frac{1}{3}$, pa su čvorovi integracije i vrednosti podintegralne funkcije u njima:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$y_i = f(x_i)$	3.58385	3.57094	3.56857	3.5403	3.45255	3.27829	3

Tako je

$$P \approx S_6 = \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6) =$$
$$= \frac{1}{9}(3.58385 + 4(3.57094 + 3.5403 + 3.27829) + 2(3.56857 + 3.45255) + 3) \approx 6.90936$$

4. (a) Odrediti približnu vrednost izraza $\sqrt{2^{-3}}$ i $\sqrt{2^{-1}}$ primenom Lagranžovog interpolacionog polinoma na funkciju $f(x) = \sqrt{2^{-x}}$ na intervalu $[0,4]$, deleći interval na dva jednaka dela. Potom utvrditi koja približna vrednost je tačnija.

(b) Neka je $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^2$. Izračunati približnu veličinu površine oblasti određene grafikom funkcije g, x-osom i pravama: $x = 1$ i $x = 3$ primenom:

i. trapezne formule sa 6 ekvidistantnih podintervala;

ii. Simpsonove formule sa 6 ekvidistantnih podintervala.

Rešenje.

(a) Pošto se interval interpolacije deli na dva jednaka dela, $n = 2$, te se određuje Lagranžov interpolacioni polinom $L_2(x)$, a potom tražene približne vrednosti sa

$$\sqrt{2^{-3}} \approx L_2(3) \quad \text{i} \quad \sqrt{2^{-1}} \approx L_2(1).$$

Čvorovi interpolacije su:

$$x_0 = 0,\;\; x_1 = 2,\;\; x_2 = 4,$$

a vrednosti funkcije f u njima:

$$y_0 = f(x_0) = 1,\;\; y_1 = f(x_1) = \frac{1}{2},\;\; y_2 = f(x_2) = \frac{1}{4},$$

pa je Lagranžov interpolacioni polinom

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$
$$= 1\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)} =$$
$$= \frac{1}{8}(x^2-6x+8) - \frac{1}{8}(x^2-4x) + \frac{1}{32}(x^2-2x) = \frac{1}{32}x^2 - \frac{5}{16}x + 1$$

Tako su tražene približne vrednosti:

$$\sqrt{2^{-3}} \approx \frac{1}{32} \cdot 3^2 - \frac{5}{16} \cdot 3 + 1 = \frac{11}{32} \approx 0.34375,$$

$$\sqrt{2^{-1}} \approx \frac{1}{32} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 1 + 1 = \frac{23}{32} \approx 0.71875.$$

Tačnost približnih vrednosti se može utvrditi njihovim relativnim greškama.

$$\Delta_R\left(L_2(3)\right) = \frac{\left|\sqrt{2^{-3}} - L_2(3)\right|}{\left|\sqrt{2^{-3}}\right|} = \frac{|0.353553390\ldots - 0.34375|}{0.353553390\ldots} \approx 0.02773 \approx 2.77\%,$$

$$\Delta_R\left(L_2(1)\right) = \frac{\left|\sqrt{2^{-1}} - L_2(1)\right|}{\left|\sqrt{2^{-1}}\right|} = \frac{|0.707106781\ldots - 0.71875|}{0.707106781\ldots} \approx 0.01647 \approx 1.65\%.$$

Znači, približna vrednost $L_2(1)$ je tačnija.

(b) Funkcija g je logaritamska funkcija s osnovom manjom od 1, tako da monotono opada za $x > 0$, a samim tim i na intervalu $[1,3]$. Kako je $g(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, važi da je $f(x) \leq 0$ za $x \in [1,3]$, te je tražena površina

$$P = -\int_1^3 g(x)\, dx.$$

Pošto se interval integracije deli na 6 ekvidistantnih podintervala, $n = 6$, pa je dužina svakog podintervala $h = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$. Čvorovi integracije i vrednosti funkcije f u njima su:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
$y_i = g(x_i)$	0	-0.83007	-1.47393	-2	-2.44478	-2.83007	-3.16993

.

i. Stoga je

$$P \approx -T_6.$$

S obzirom na to da je

$$\begin{aligned} T_6 &= \frac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_5) + y_6\right) = \\ &= \frac{1}{6}\left(2(-0.83007 - 1.47393 - 2 - 2.44478 - 2.83007) - 3.16993\right) \approx -3.72128, \end{aligned}$$

trapezna formula daje da je tražena približna vrednost površine $P \approx 3.72128$.

ii. Analogno je

$$P \approx -S_6.$$

Pošto je

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\right) = \\ &= \frac{1}{9}\left(4(-0.83007 - 2 - 2.83007) + 2(-1.47393 - 2.44478) - 3.16993\right) \approx -3.73866, \end{aligned}$$

na osnovu Simpsonove formule tražena približna vrednost površine je $P \approx 3.73866$.

5. Data je funkcija $f(x) = 1 + \ln x$.

   (a) Odrediti Lagranžov interpolacioni polinom funkcije f za interval $[2,3]$, deleći interval na dva jednaka dela.

   (b) Koristeći trapeznu formulu izračunati približnu vrednost integrala $\int_2^3 f(x)\,dx$ s greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje.

(a) Kako se interval deli na dva jednaka dela, $n = 2$ i $h = \frac{3-2}{2} = 0.5$. Čvorovi interpolacije i približne vrednosti date funkcije u njima su:

i	0	1	2
x_i	2	2.5	3
$y_i = f(x_i)$	1.69315	1.91629	2.09861

Lagranžov interpolacioni polinom je

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= 1.69315\frac{(x-2.5)(x-3)}{(2-2.5)(2-3)} + 1.91629\frac{(x-2)(x-3)}{(2.5-2)(2.5-3)} + 2.09861\frac{(x-2)(x-2.5)}{(3-2)(3-2.5)} = \\ &= 3.38630(x^2-5.5x+7.5) - 7.66516(x^2-5x+6) + 4.19722(x^2-4.5x+5) = \\ &= -0.08164x^2 + 0.81366x + 0.39239. \end{aligned}$$

(b) Greška koja se dobija primenom trapezne formule na integral $I = \int_2^3 (1+\ln x)\,dx$ može se oceniti sa

$$|I - T_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2,\ \ M_2 = \max_{2\le x\le 3}\left|f''(x)\right|,$$

gde je $a = 2$ i $b = 3$. Kako se traži da se vrednost integrala I odredi s greškom manjom od 10^{-3}, potrebno je da važi da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 < 10^{-3},\ \text{ odnosno }\ \frac{1}{12n^2}M_2 < 10^{-3}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ \ f''(x) = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},\ \text{ pa je }\ \left|f''(x)\right| = \frac{1}{x^2}.$$

Pošto je

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}\ \text{ i }\ -\frac{2}{x^3} < 0 \text{ za } x \in [2,3],$$

funkcija $|f''(x)| = \frac{1}{x^2}$ je monotono opadajuća na intervalu $[2,3]$, pa je

$$M_2 = \max_{2\le x\le 3}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Na osnovu

$$\frac{1}{12n^2}\cdot\frac{1}{4} < 10^{-3},\ \text{ dobija se da je }\ n^2 > \frac{1000}{48},\ \text{ odnosno }\ n > 4.56435.$$

Znači, primenom trapezne formule sa $n = 5$ podintervala dobija se približna vrednost integrala I s greškom manjom od 10^{-3}. Dužina podintervala je $h = \frac{3-2}{5} = 0.2$, pa su čvorovi integracije i približne vrednosti date funkcije u njima:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
$y_i = f(x_i)$	1.69315	1.78846	1.87547	1.95551	2.02962	2.09861

Tražena vrednost je

$$\begin{aligned} I \approx T_5 &= \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1+y_2+y_3+y_4) + y_5) = \\ &= \frac{0.2}{2}(1.69315 + 2(1.78846 + 1.87547 + 1.95551 + 2.02962) + 2.09861) = 1.90899. \end{aligned}$$

6. Neka je $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

   (a) Odrediti Lagranžov interpolacioni polinom sa tri ekvidistantna interpolaciona čvora koji aproksimira funkciju f na intervalu $[1,5]$.

   (b) Izračunati približnu veličinu površine zatvorene oblasti određene grafikom funkcije f i pravama $y = 0$, $x = 1$ i $x = 5$ primenom Simpsonove formule s greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje.

(a) Primenom Lagranžovog interpolacionog polinoma sa tri ekvidistantna interpolaciona čvora, $n = 2$, pa se interval $[1,5]$ deli na 2 jednaka dela. Tako su čvorovi interpolacije:

$$x_0 = 1, \ \ x_1 = 3, \ \ x_2 = 5,$$

a vrednosti funkcije f u njima:

$$y_0 = f(x_0) \approx 0.47943, \ \ y_1 = f(x_1) \approx 0.99749, \ \ y_2 = f(x_2) \approx 0.59847.$$

Lagranžov interpolacioni polinom je

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\
&= 0.47943\cdot\frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} + 0.99749\cdot\frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} + 0.59847\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \\
&= 0.05993(x^2-8x+15) - 0.24937(x^2-6x+5) + 0.07481(x^2-4x+3) = \\
&= -0.11463^2 + 0.71754 - 0.12347.
\end{aligned}$$

(b) Tražena površina je

$$P = \int_1^5 f(x)\,dx \approx S_n,$$

gde je n broj podintervala. Da bi se dobila približna vrednost površine s greškom manjom od 10^{-3}, potrebno je da važi

$$|P - S_n| < 10^{-3}.$$

Pošto je

$$|P - S_n| \leq \frac{(5-1)^5}{180n^4}\cdot M_4, \ \ M_4 = \max_{1\leq x\leq 5}|f^{(4)}(x)|,$$

uslov

$$\frac{(5-1)^5}{180n^4}\cdot M_4 < 10^{-3}, \ \ \text{odnosno} \ \ \frac{256}{45n^4}\cdot M_4 < 10^{-3}$$

daje potreban broj podintervala za traženu tačnost.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, \ \ f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}, \ \ f'''(x) = -\frac{1}{8}\cos\frac{x}{2}, \ \ f^{(4)}(x) = \frac{1}{16}\sin\frac{x}{2},$$

pa je

$$M_4 = \max_{1\leq x\leq 5}\left|\frac{1}{16}\sin\frac{x}{2}\right| = \max_{1\leq x\leq 5}\frac{1}{16}\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$$

Funkcija $g(x) = \sin\frac{x}{2}$ je nenegativna na intervalu $[0,2\pi]$, a samim tim i na intervalu $[1,5]$, tako da je

$$M_4 = \max_{1\leq x\leq 5}\frac{1}{16}\sin\frac{x}{2}$$

Pošto funkcija g, na intervalu $[0,2\pi]$, ima maksimum u tački $x = \pi$, a $\pi \in [1,5]$,

$$M_4 = \frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}.$$

Stoga je

$$\frac{256}{45n^4} \cdot \frac{1}{16} < 10^{-3}, \text{ odnosno } \frac{16}{45n^4} < 10^{-3},$$

te je

$$\frac{16000}{45} < n^4.$$

Dakle,

$$n > \sqrt[4]{\frac{16000}{45}} \approx 4.34237.$$

Simpsonova formula je primenljiva samo za paran broj podintervala, tako da se sa $n = 6$ podintervala može dobiti tražena tačnost aproksimacije. Dužina svakog podintervala je $h = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$, te su čvorovi integracije i vrednosti funkcije f u njima:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	1.66667	2.33333	3	3.66667	4.33333	5
$y_i = f(x_i)$	0.47943	0.74018	0.91944	0.99749	0.96573	0.82766	0.59847

Sada je

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6) = \\ &= \frac{2}{9}(0.47943 + 4(0.74018 + 0.99749 + 0.82766) + 2(0.91944 + 0.96573) + 0.59847) \approx 3.35768, \end{aligned}$$

pa je $P \approx 3.35768$.

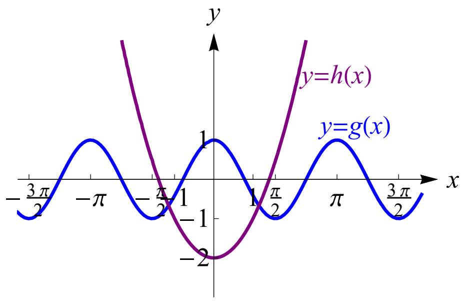
7. Utvrditi koliko rešenja ima jednačina $\cos 2x - x^2 + 2 = 0$. Potom primenom postupka sečice odrediti pozitivno rešenje jednačine s greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje. Neka je

$$f(x) = \cos 2x - x^2 + 2.$$

Da bi se odredilo pozitivno rešenje jednačine $f(x) = 0$, potrebno je grafičkom lokalizacijom utvrditi interval u kojem se nalazi to rešenje. Rastavljanjem funkcije f na razliku funkcija g i h:

$$g(x) = \cos(2x) \text{ i } h(x) = x^2 - 2,$$



Slika 4.5.1

dobijaju se grafici prikazani na slici 4.5.1. Grafici funkcija g i h seku se u jednoj tački sa pozitivnom apscisom, tako da je ta apscisa traženo rešenje. Ona se nalazi između najmanje pozitivne nule funkcije g i pozitivne nule funkcije h, dakle, u intervalu $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

Kako je $\frac{\pi}{4} \approx 0.78540$, a $\sqrt{2} \approx 1.41421$, za početne aproksimacije postupka sečice se mogu uzeti

$$x_0 = 0.8 \text{ i } x_1 = 1.4.$$

Pošto je $f(x_0) = 1.33080$ i $f(x_1) = -0.90222$, naredna aproksimacija je

$$x_2 = x_1 - \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} \cdot f(x_1) \approx 1.15758.$$

Kako je

$$|x_2 - x_1| = 0.24242 > 10^{-3},$$

računa se naredna aproksimacija.

$$x_3 = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \cdot f(x_2)$$

što sa $f(x_2) = -0.01750$ daje da je

$$x_3 \approx 1.15278.$$

$$|x_3 - x_2| = 0.00480 > 10^{-3},$$

pa se računa

$$x_4 = x_3 - \frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)} \cdot f(x_3).$$

$f(x_3) = 0.00069$, te je

$$x_4 \approx 1.15296.$$

$$|x_4 - x_3| = 0.00018 < 10^{-3},$$

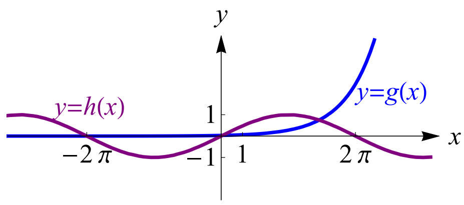
tako da je x_4 traženo približno rešenje.

Dakle, pozitivno rešenje date jednačine je $x^* = 1.15296$.

8. Utvrditi broj nula funkcije $f(x) = 2^{x-5} - \sin\frac{x}{2}$, kao i interval u kojem se nalazi najveća nula. Potom, s greškom manjom od 10^{-3}, odrediti približnu nulu koja se dobija primenom Njutnovog postupka uzimajući 4 za početnu aproksimaciju.

Rešenje. Nula funkcije f je rešenje jednačine $f(x) = 0$. Tako da se broj nula funkcije f može utvrditi grafičkom lokalizacijom, rastavljanjem funkcije f na razliku funkcija g i h:

$$g(x) = 2^{x-5} \;\text{ i }\; h(x) = \sin\frac{x}{2}.$$



Slika 4.5.2

Na osnovu grafika prikazanih na slici 4.5.2, grafici funkcija g i h seku se u beskonačno mnogo tačaka, tako da funkcija f ima beskonačno mnogo nula.

Za Njutnov postupak je potreban izvod funkcije f,

$$f'(x) = 2^{x-5}\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Kako je data početna aproksimacija $x_0 = 4$, $f(x_0) = -0.40930$ i $f'(x_0) = 0.55465$, naredna aproksimacija je

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 4.73794$$

Pošto je

$$|x_1 - x_0| = 0.73794 > 10^{-3},$$

računa se naredna aproksimacija. Kako je $f(x_1) = 0.13588$ i $f'(x_1) = 0.93605$,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 4.59278.$$

$$|x_2 - x_1| = 0.14516 > 10^{-3},$$

pa se računa

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

$f(x_2) = 0.00597$ i $f'(x_2) = 0.85447$, te je

$$x_3 \approx 4.58579$$

i

$$|x_3 - x_2| = 0.00699 = 0.699\cdot 10^{-2} > 10^{-3}.$$

Znači, računa se i naredna aproksimacija. Pošto je $f(x_3) = 0.00001$ i $f'(x_3) = 0.85064$,

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 4.58578.$$

$$|x_4 - x_3| = 0.00001 = 0.1\cdot 10^{-4} < 10^{-3},$$

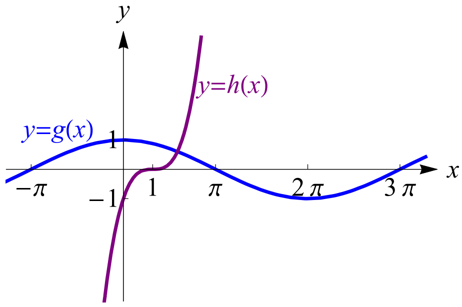
tako da je x_4 tražena približna nula funkcije f.

Dakle, tražena približna nula je $x^* = 4.58578$.

9. Grafički lokalizovati nulu funkcije $f(x) = \cos\frac{x}{2} - (x-1)^3$, zatim odrediti njenu približnu vrednost s greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje. Da bi se odredila nula funkcije f, potrebno je rešiti jednačinu $f(x) = 0$. Za grafičku lokalizaciju potrebno je rastaviti funkciju f na razliku funkcija

$$g(x) = \cos\frac{x}{2} \ \text{ i } \ h(x) = (x-1)^3.$$



Slika 4.5.3

Grafici funkcija g i h su prikazani na slici 4.5.3. Apscisa tačke preseka grafika funkcija g i h nalazi se u intervalu $(1, \pi)$, pa se može zaključiti da se rešenje jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $(1, \pi)$. Interval $(1, \pi)$ se može suziti tabličnom lokalizacijom:

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	0.87758	0.60669	−0.45970		

Pošto je $f(1.5)f(2) < 0$, teorema 1.67 daje da se rešenje jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $(1.5, 2)$.

Funkcija f je diferencijabilna, tako da se približno rešenje jednačine $f(x) = 0$ može odrediti Njutnovim postupkom. Izvod funkcije f je

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - 3(x-1)^2.$$

Za početnu aproksimaciju se može uzeti, na primer,

$$x_0 = 2.$$

$f(x_0) = -0.45970$ i $f'(x_0) = -3.42074$, pa je naredna aproksimacija

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1.86561.$$

Pošto je

$$|x_1 - x_0| = 0.13439 > 10^{-3},$$

računa se naredna aproksimacija. $f(x_1) = -0.05300$ i $f'(x_1) = -2.64949$ daju da je

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.84561.$$

$$|x_2 - x_1| = 0.02000 > 10^{-3},$$

pa se računa i

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

$f(x_2) = -0.00107$ i $f'(x_2) = -2.54382$, te je

$$x_3 \approx 1.84519$$

i

$$|x_3 - x_2| = 0.00042 < 10^{-3},$$

što daje da je x_3 tražena približna nula funkcije f.

Dakle, tražena približna nula je $x^* = 1.84519$.

10. Naći korene jednačine $\log_3 x = -x^2$ s tolerancijom od 10^{-3}.

Rešenje. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\log_3 x + x^2 = 0.$$

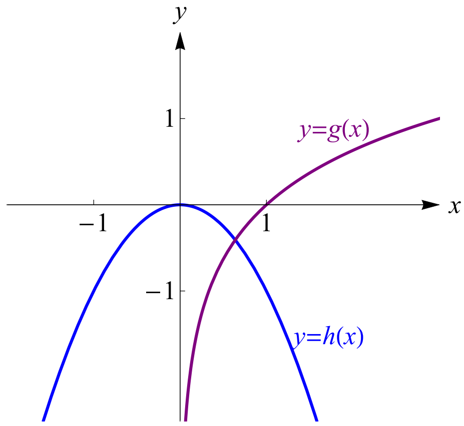
Neka je

$$f(x) = \log_3 x + x^2.$$

Grafičkom lokalizacijom funkcije f rastavljene na razliku funkcija

$$g(x) = \log_3 x \;\text{ i }\; h(x) = -x^2$$

dobijaju se grafici prikazani na slici 4.5.4. Apscisa tačke preseka grafika funkcija g i h nalazi se u intervalu $(0,1)$, tako da je rešenje date jednačine u intervalu $(0,1)$.



Slika 4.5.4

Približno rešenje jednačine $f(x) = 0$ se može odrediti primenom postupka sečice. Neka su početne aproksimacije:

$$x_0 = 0.1 \;\text{ i }\; x_1 = 1.$$

Pošto je $f(x_0) \approx -2.08590$ i $f(x_1) = 1$,

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \approx 0.70835,$$

pa je $|x_2 - x_1| = 0.29165 > 10^{-3}$. Kako je $f(x_2) \approx 0.18789$,

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2) \approx 0.64087.$$

$|x_3 - x_2| = 0.06748 > 10^{-3}$, te se računa naredna aproksimacija. $f(x_3) \approx 0.00572$ daje da je

$$x_4 = x_3 - \frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)} f(x_3) \approx 0.63875.$$

Pošto je

$$|x_4 - x_3| = 0.00212 > 10^{-3},$$

potrebna je i aproksimacija

$$x_5 = x_4 - \frac{x_3 - x_4}{f(x_3) - f(x_4)} f(x_4).$$

$f(x_4) \approx -0.00001$, pa je

$$x_5 \approx 0.63875$$

i

$$|x_5 - x_4| = 0.00000 < 10^{-3},$$

što daje da je x_5 traženo približno rešenje.

Dakle, traženo približno rešenje je $x^* = 0.63875$.

Literatura

[1] R. A. Adams, C. Essex, *Calculus: a complete course*, 7th editon, Pearson Canada, Toronto, USA, 2010.

[2] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza I*, Nauka, Studentski trg, Beograd, 1995.

[3] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza II*, Nauka, Studentski trg, Beograd, 1994.

[4] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, New York, 2008.

[5] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, Springer, New York, 2008.

[6] H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus: Early Transcendentals*, 7th editon, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2002.

[7] M. Bertolino, *Diferencijalne jednačine*, Naučna Knjiga, Beograd, 1980.

[8] A. Croft, R. Davison, *Mathematics for Engineers*, 4th editon, Pearson Education, Edinburgh Gate, 2015.

[9] J. Detki, *Matematika II*, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Subotica, 1984.

[10] O. Hadžić, Đ. Takači, *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2000.

[11] D. Herceg, N. Krejić, *Numerička analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[12] A. Neumaier, *Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[13] E. Pap, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Univerzitet u Novom Sadu, IRO „Građevinska knjiga", Beograd, 1987.

[14] H. Peić, *Matematika I*, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Subotica, 2006.

[15] H. Peić, *Matematika 2*, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Subotica, 2016.

[16] D. Perišić, S. Pilipović, M. Stojanović, *Funkcije više promenljivih, diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1997.

[17] J. Kovács, G. Takács, M. Takács, *Analízis*,Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001.

[18] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd editon, McGraw-Hill, USA, 1976.