MARTINA VOJNIĆ PURČAR

STATIKA KONSTRUKCIJA 2

2026

Autor:
prof.dr Martina Vojnić Purčar

Naslov:
STATIKA KONSTRUKCIJA 2

Recenzenti:
prof.emeritus Aleksandar Prokić, dipl.inž.građ.
prof.dr ĐerđVarju, dipl.inž.građ.
prof.dr Ljiljana Kozarić, dipl.inž.građ.

Odobreno za izdavanje kao univerzitetski udžbenik iz predmetne naučne oblasti odlukom Nastavno naučnog veća Građevinskog fakulteta Subotica broj 68-11/2026 od 10.02.2026. godine.

Izdavač:
Univerzitet u Novom Sadu
Građevinski fakultet Subotica
24000 Subotica, Kozaračka 2a

Glavni i odgovorni urednik:
Prof. dr Milan Trifković, dipl.geod.inž., dekan

Tiraž:
50 primeraka

Štampa/Umnožava:
Biromarket 024 d.o.o.
24000 Subotica, Maksima Gorkog 40

Mesto i godina izdanja:
Prvo izdanje, Subotica, 2026.
ISBN *****

Zabranjeno preštampavanje, fotokopiranje i umnožavanje na elektronskom mediju. Sva prava zadržava autor i izdavač.

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik prvenstveno je namenjen studentima osnovnih akademskih studija Gradjevinskog fakulteta Subotica, koji slušaju nastavu iz predmeta Statika konstrukcija 2.

Pri formiranju udžbenika korišćena je odgovarajuća stručna literatura, a sadržaj je usaglašen sa nastavnim planom i programom predmeta.

Autor se zahvaljuje recenzentima prof. emeritusu Aleksandru Prokiću, prof. dr Varju Djerdju i prof. dr Ljiljani Kozarić na izvršenoj recenziji i korisnim sugestijama.

Takođe, posebnu zahvalnost Autor duguje Građevinskom fakultetu Subotica kao izdavaču.

Subotica, mart 2026. *Autor*

Sadržaj

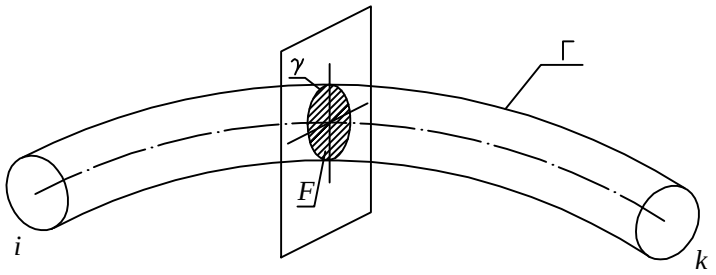
1. Linearna teorija štapa . . . 1
   - 1.1. Spoljašnje i unutrašnje sile . . . 1
     - 1.1.1. Spoljašnje sile . . . 1
     - 1.1.2. Unutrašnje sile . . . 3
     - 1.1.3. Uslovi ravnoteže elementa štapa . . . 4
   - 1.2. Deformacija štapa . . . 6
     - 1.2.1. Deformacija ose štapa . . . 6
     - 1.2.2. Deformacija štapa kao tela . . . 7
   - 1.3. Veze deformacijskih veličina, sila u presecima i temperaturnih promena . 10
   - 1.4. Rekapitulacija jednačina štapa . . . 12
2. Analiza linijskih nosača . . . 15
   - 2.1. Statički i deformacijski nepoznate veličine nosača . . . 15
   - 2.2. Osnovne jednačine ravnih nosača . . . 16
     - 2.2.1. Uslovi kompatibilnosti pomeranja čvorova nosača . . . 16
     - 2.2.2. Uslovi ravnoteže nosača . . . 18
   - 2.3. Klasifikacija nosača . . . 20
     - 2.3.1. Kinematička klasifikacija nosača . . . 20
     - 2.3.2. Statička klasifikacija nosača . . . 20
3. Statički neodređeni nosači . . . 22
   - 3.1. Metoda sila . . . 22
   - 3.2. Osnovni sistem . . . 24
   - 3.3. Uslovne jednačine za statički neodređene veličine . . . 25
   - 3.4. Određivanje presečnih sila . . . 27
   - 3.5. Koraci za određivanje uticaja kod statički neodređenih nosača . . . 27
   - 3.6. Zadatak 1 . . . 30
   - 3.7. Zadatak 2 . . . 36
   - 3.8. Rešetkasti nosači . . . 42
   - 3.9. Određivanje pomeranja . . . 43
   - 3.10. Zadatak 3 . . . 45
4. Uticajne linije i uticajne funkcije . . . 51
   - 4.1. Uticajne linije za pomeranja . . . 51
   - 4.2. Uticajne linije za statički neodređene veličine . . . 52
   - 4.3. Uticajne linije za reakcije i sile u presecima kod statički neodređnih nosača 53
   - 4.4. Uticajne linije za pomeranja kod statički neodređnih nosača . . . 53
5. Simetrični nosači . . . 58
   - 5.1. Simetrično opterećenje . . . 58
   - 5.2. Antimetrično opterećenje . . . 60
   - 5.3. Kombinacija simetričnog i antimetričnog opterećenja . . . 61
   - 5.4. Opterećenje u osi simetrije . . . 62
   - 5.5. Uslovi oslanjanja u osi simetrije - simetrično opterećenje (zglob u osi simetrije) . . . 63

5.6. Uslovi oslanjanja u osi simetrije - simetrično opterećenje (oslonac u osi simetrije) . . . 63
5.7. Zadatak . . . 64
6. Matrična analiza . . . 71
6.1. Matrica krutosti i matrica fleksibilnosti . . . 72
6.2. Analiza štapa . . . 74
6.2.1. Vektor sila i vektor pomeranja . . . 74
6.2.2. Matrica krutosti štapa . . . 75
6.2.3. Vektor ekvivalentnog opterećenja . . . 75
6.3. Analiza strukture štapova . . . 76
6.4. Tipovi štapova i matrice krutosti . . . 77
6.4.1. Prost štap . . . 78
6.4.2. Štap tipa k . . . 82
6.4.3. Štap tipa g . . . 88
6.5. Transformacije matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja . . . 94
6.5.1. Prost štap . . . 94
6.5.2. Štap tipa k . . . 97
6.5.3. Štap tipa g . . . 100
6.6. Formiranje uslovnih jednačina za određivanje pomeranja nosača . . . 102
6.6.1. Konturni uslovi i određivanje pomeranja čvorova i reakcija oslonaca 105
6.6.2. Formiranje marice krutosti sistema postupkom kodnih brojeva . 106
6.6.3. Zadatak . . . 108
6.7. Rešetkasti nosači . . . 116
6.8. Kontinualni nosači . . . 118
6.9. Ortogonalni nosači . . . 119
6.9.1. Zadatak . . . 121
6.10. Simetrični nosači . . . 127
6.10.1. Zadatak . . . 130

Literatura **137**

1. Linearna teorija štapa

Poznato je da štap predstavlja osnovni element linijskog nosača. Definicija štapa po M. Đuriću je sledeća: Neka je data proizvoljna linija ik (slika 1), i neka su u ravnima normalnim na tu liniju opisane zatvorene krive γ koje ograničavaju površi F. Težišta površi F, čije su dimenzije male u odnosu na dužinu linije ik, leže na liniji ik. Geometrijsko mesto tačaka krivih γ je zatvorena površ Γ. Telo ograničeno površi Γ i površinama F u tačkama i i k nazivamo štapom.



Slika 1.

Kriva ik je osa štapa, površ F je poprečni presek štapa, a površ Γ je omotač štapa koji sa poprečnim presecima na krajevima predstavlja spoljašnju površinu štapa.

Prema obliku ose štapovi se mogu podeliti na prave i krive . U zavisnosti od oblika poprečnog preseka, štapovi mogu biti konstantnog poprečnog preseka, ako su im poprečni preseci u svim tačakama ose isti, i promenljivog poprečnog preseka, ako su duž ose štapa poprečni preseci promenljivi.

U ovom udžbeniku razmatra se proračun konstrukcija zasnovan na linearnoj teoriji štapa. U okviru ove teorije, jednačine koje uspostavljaju vezu između sila, pomeranja i deformacija štapa imaju linearan oblik, što je omogućeno uvođenjem sledećih pretpostavki:

- pretpostavka o malim pomeranjima (pretpostavka o statičkoj linearnosti),
- pretpostavka o malim deformacijama (pretpostavka o geometrijskoj linearnosti),
- Hooke-ov zakon (pretpostavka o fizičkoj linearnosti).

Dalja izlaganja odnosiće se na prave štapove.

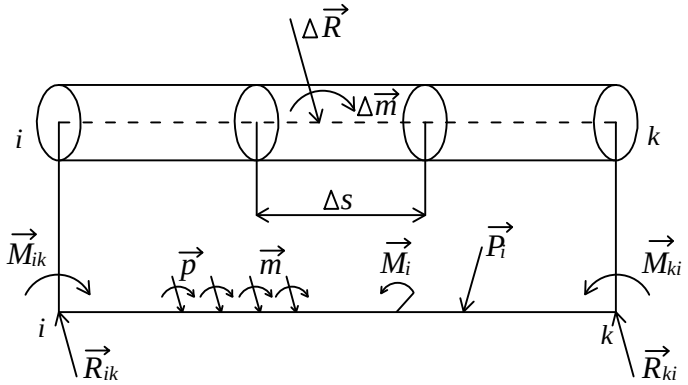
1.1. Spoljašnje i unutrašnje sile

1.1.1. Spoljašnje sile

Na štap deluju tzv. spoljašnje sile, kao zapreminske i površinske sile. One mogu biti aktivne i reaktivne. U aktivne sile spada spoljašnje opterećenje štapa, dok reaktivne sile predstavljaju reakcije oslonaca i momenti uklještenja. Spoljašnje sile mogu biti konzervativne i nekozervativne. Konzervativne sile su one čiji rad ne zavisi od putanje napadnih tačaka sila, već samo od početnog i krajnjeg položaja sila. Za konzervativno opterećenje je karakteristično da ne menja pravac niti veličinu pri deformaciji štapa, dok rad nekonzervativne sile zavisi od putanje napadnih tačaka. One menjaju pravac i veličinu sa deformacijom štapa.

Ravan štap je štap čija osa sa jednom od glavnih centralnih osa inercije poprečnih preseka leži u jednoj ravni, koju nazivamo ravan štapa. Pod uticajem spoljašnjih sila štap se deformiše. Pretpostavićemo da se radi o ravnoj deformaciji štapa, odnosno da osa štapa i posle deformacije leži u ravni štapa.

Saglasno tehničkoj teoriji savijanja štapa spoljašnje opterećenje zamenjujemo statički ekvivalentnim silama $\overrightarrow{p}$ i momentima $\overrightarrow{m}$ raspodeljenim duž ose štapa (slika 2).



Slika 2.

Specifično raspodeljeno opterećenje $\overrightarrow{p}$, predstavlja silu po jedinici dužine ose štapa:

$$\overrightarrow{p} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{R}}{\Delta s} = \frac{d\overrightarrow{R}}{ds} \tag{1..1}$$

Specifični raspodeljeni moment $\overrightarrow{m}$, predstavlja moment po jedinici dužine ose štapa:

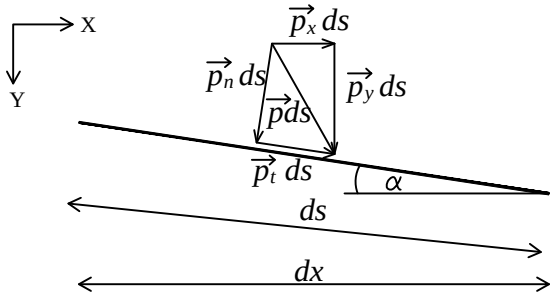
$$\overrightarrow{m} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{m}}{\Delta s} = \frac{d\overrightarrow{m}}{ds} \tag{1..2}$$

Da bi štap i posle deformacije ostao u svojoj ravni (ravan deformacije) sile $\overrightarrow{p}$ i spregovi momenata moraju da leže u ravni štapa.

Opterećenja $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{m}$ duž diferencijalno malog elementa ose štapa zamenjujemo koncentrisanom silom $\overrightarrow{P}$ i koncentrisanim momentom $\overrightarrow{M}$.

Momenti su često ili jednaki nuli ili su tako mali da mogu da se zanemare. Iz tog razloga pretpostavljamo da je štap opterećen samo raspodeljenim ili koncentrisanim silama. Opterećenje može biti zadato duž ose štapa ili po projekcijama ose štapa.

Posmatramo raspodeljeno opterećenje proizvoljnog pravca $\overrightarrow{p}ds$ koje možemo razložiti na komponente u pravcu ose štapa, odnosno tangente i upravno na osu štapa, odnosno normale: $\overrightarrow{p}_t ds$ i $\overrightarrow{p}_n ds$, ili na horizontalnu i vertikalnu komponentu: $\overrightarrow{p}_x ds$ i $\overrightarrow{p}_y ds$. Ako je α ugao koji osa štapa zaklapa sa X-osom, veza između komponenata je sledeća, slika 3:

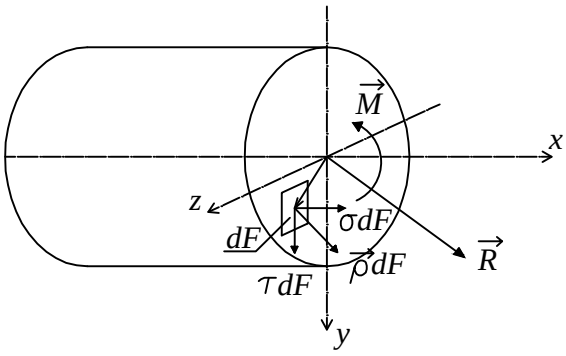


Slika 3.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p}_t &= \overrightarrow{p}_x \cos\alpha + \overrightarrow{p}_y \sin\alpha \\
\overrightarrow{p}_n &= -\overrightarrow{p}_x \sin\alpha + \overrightarrow{p}_y \cos\alpha \\
\overrightarrow{p}_x &= \overrightarrow{p}_t \cos\alpha - \overrightarrow{p}_n \sin\alpha \\
\overrightarrow{p}_y &= \overrightarrow{p}_n \cos\alpha + \overrightarrow{p}_t \sin\alpha
\end{aligned} \tag{1..3}$$

1.1.2. Unutrašnje sile

Delovanje spoljašnjih sila izaziva u štapu pojavu unutrašnjih sila. Unutrašnje sile shvatamo kao površinske sile koje se prenose preko zamišljenih preseka u telu a izražavamo ih preko napona. Ako je $\overrightarrow{\rho}$ totalni napon na elementu površine dF tada je $\overrightarrow{\rho}\,dF$ ukupna unutrašnja sila koja se prenosi preko elementa dF. Komponente totalnog napona $\overrightarrow{\rho}$ su normalna komponenta napona $\sigma = \sigma_x$ i smičuća komponenta napona $\tau = \tau_{xy}$ (slika 4).



Slika 4.

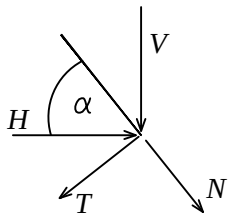
Redukcijom svih sila $\overrightarrow{\rho}\,dF$ koje se prenose preko elemenata površine jednog poprečnog preseka površine dF na težište preseka, dobijaju se sila $\overrightarrow{R}$ i moment $\overrightarrow{M}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R} &= \int_F \overrightarrow{\rho}\,dF \\ \overrightarrow{M} &= \int_F \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\rho}\,dF \end{aligned} \tag{1..4}$$

Sila $\overrightarrow{R}$ leži u ravni štapa, a vektor momenta $\overrightarrow{M}$ je upravan na ravan štapa. Silu $\overrightarrow{R}$ razlažemo na komponentu normalnu na poprečni presek, nazivamo je normalna sila i obeležavamo sa N, dok se komponenta u ravni preseka, u pravcu ose y, obeležava sa T i naziva transverzalna sila. Sile N, T i M nazivamo sile u presecima štapa. Osa x je osa štapa, dok se osa y poklapa sa jednom od glavnih osa inercije poprečnog preseka. Po usvojenoj konvenciji znakova, normalna sila se smatra pozitivnom ukoliko izaziva zatezanje preseka. Transverzalna sila je pozitivna ako teži da obrne element štapa u smeru kazaljke na satu, dok se moment savijanja smatra pozitivnim kada izaziva zatezanje donjeg vlakna. Sile u preseku se mogu odrediti iz normalnog i smičućeg napona:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF \\ T &= \int_F \tau dF \\ M &= \int_F \sigma y dF \end{aligned} \tag{1..5}$$

Pored sila N i T, u proračunu se koriste i horizontalna i vertikalna komponenta redukcione rezultante, koje se označavaju sa H i V. Ove sile deluju u pravcima osa globalnog koordinatnog sistema X i Y. Veza između ova dva sistema sila može se uspostaviti projektovanjem komponentnih sila jednog sistema na pravce sila drugog sistema (slika 5).

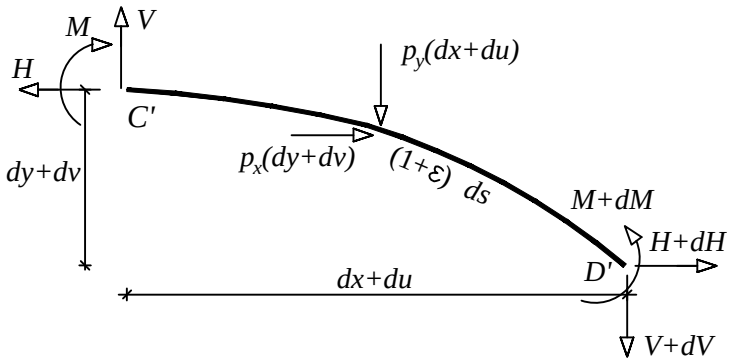


$$
\begin{aligned}
N &= H\cos\alpha + V\sin\alpha \\
T &= -H\sin\alpha + V\cos\alpha \\
H &= N\cos\alpha - T\sin\alpha \\
V &= N\sin\alpha + T\cos\alpha
\end{aligned}
\tag{1..6}
$$

Slika 5.

1.1.3. Uslovi ravnoteže elementa štapa

U Statici konstrukcija se pretpostavlja da su pomeranja tačaka pri deformaciji postupna, odnosno da ne dolazi do pojave ubrzanja, a samim tim ni do pojave inercijalnih sila. Pretpostavlja se da se opterećenje povećava postupno, od nule do konačne vrednosti. Veze između spoljašnjih i unutrašnjih sila štapa dobijamo iz uslova ravnoteže elementa štapa u kojima figurišu sve sile koje deluju na taj element. U svakom trenutku spoljašnje i unutrašnje sile se nalaze u ravnoteži, ali konačna ravnoteža se uspostavlja pošto je deformacija štapa završena. Prema tome, uslove ravnoteže treba posmatrati na deformisanom štapu (slika 6):



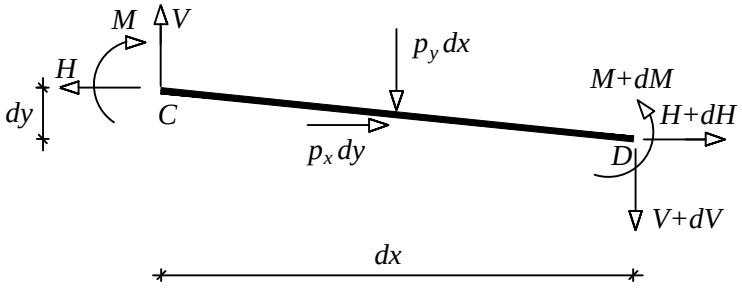
Slika 6.

Posmatramo element štapa $C'D'$ dužine $(1+\varepsilon)ds$ opterećen spoljašnjim silama $p_y(dx+du)$ i $p_x(dy+dv)$ i unutrašnjim silama na krajevima C' i D' (slika 6) koji je pod uticajem zadatih spoljašnjih sila zauzeo ravnotežni položaj. U preseku C' deluju sile H, V i M. Na diferencijalno malom rastojanju $(1+\varepsilon)ds$ dolazi do priraštaja unutrašnjih sila za veličine dH, dV tj. dM tako da u preseku D' deluju sile: $H+dH$, $V+dV$ i $M+dM$. Veze između unutrašnjih i spoljašnjih sila dobićemo ispisivanjem tri uslova ravnoteže elementa štapa: suma horizontalnih sila da je jednaka nuli, suma vertikalnih sila da je jednaka nuli i suma momenata svih sila u odnosu na tačku C' da je jednaka nuli pod pretpostavkom da zanemarujemo momente od sila spoljašnjeg opterećenja:

$$
\begin{aligned}
&dH + p_x\,(dy+dv) = 0 \\
&dV + p_y\,(dx+du) = 0 \\
&dM + H\,(dy+dv) - V\,(dx+du) = 0
\end{aligned}
\tag{1..7}
$$

U jednačinama pored nepoznatih unutrašnjih sila figurišu i nepoznata pomeranja. One su nelinearne jer se u njima pojavljuju proizvodi nepoznatih veličina.

Kako su pomeranja tačaka u odnosu na dimenzije štapa male veličine to često pomeranja napadnih tačaka spoljašnjih i unutrašnjih sila mogu da se zanemare. Tako pretpostavljamo da spoljašnje sile međusobno sa unutrašnjim stoje u ravnoteži na nedeformisanom štapu. Ovu pretpostavku nazivamo *pretpostavka o malim pomeranjima.* U tom slučaju uslovi ravnoteže postaju linearne jednačine u kojim figurišu samo nepoznate sile u preseku. Posmatramo nedeformisan štap (slika 7):

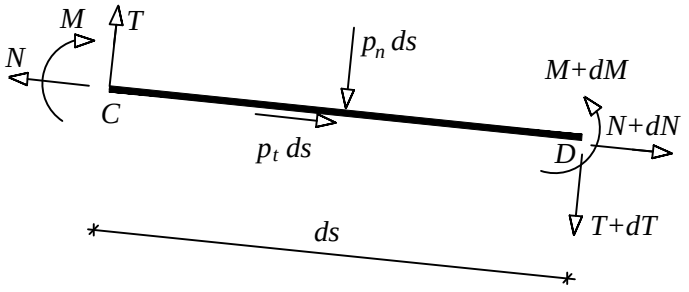


Slika 7.

Da bi ispisali uslove ravnoteže štapa na nedeformisanom štapu, posmatrajmo element štapa CD opterećen spoljašnjim silama $p_x dx$ i $p_y dx$ i unutrašnjim silama na krajevima C i D. U preseku C deluju sile H, V i M. Na diferencijalno malom rastojanju ds dolazi do priraštaja unutrašnjih sila za veličine dH, dV tj. dM tako da u preseku D deluju sile: $H + dH$, $V + dV$ i $M + dM$. Veze između unutrašnjih i spoljašnjih sila dobićemo ispisivanjem tri uslova ravnoteže elementa štapa: suma sila u horizontalnom pravcu (x ose) jednaka je nuli, suma sila u vertikalnom pravcu (y ose) jednaka je nuli i suma momenata svih sila u odnosu na tačku C jednaka je nuli. Ako u uslovima ravnoteže zanemarimo momente sile spoljašnjeg opterećenja u odnosu na tačku C, dobijaju se uslovi ravnoteže sila koje deluju na element štapa u obliku:

$$\begin{aligned} &dH + p_x dy = 0 \\ &dV + p_y dx = 0 \\ &dM + H dy - V dx = 0 \end{aligned} \tag{1..8}$$

Uslovi ravnoteže se mogu ispisivati posmatajući lokalni koordinatni sistem u funkciji normalnih i transverzalnih sila i momenata. U tom slučaju uslovi ravnoteže predstavljaju algebarske zbirove svih sila koje deluju na element štapa u pravcu tangente i u pravcu normale na osu štapa (slika 8).



Slika 8.

$$\begin{aligned} &dN + p_t ds = 0 \\ &dT + p_n ds = 0 \\ &dM - T ds = 0 \end{aligned} \tag{1..9}$$

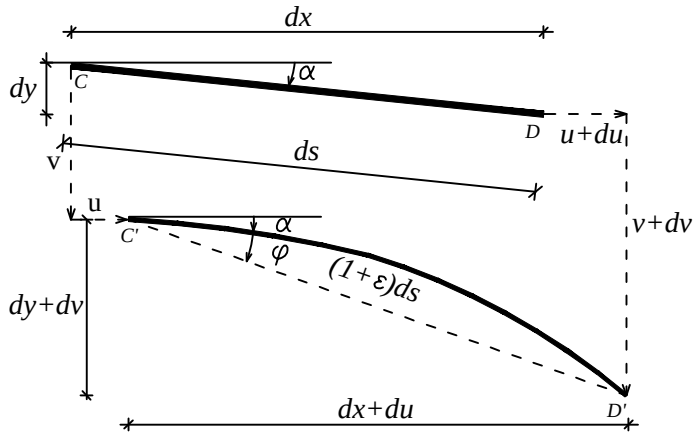
Jednačine (1.8) tj.(1.9) predstavljaju linearne diferencijalne jednačine prvog reda, što je posledica uvođenja pretpostavke o malim pomeranjima. Ova pretpostavka naziva se i *pretpostavka o statičkoj linearnosti* jer se zahvaljujući njoj dobijaju linearne veze između statičkih veličina.

1.2. Deformacija štapa

1.2.1. Deformacija ose štapa

Posmatraćemo deformaciju jednog ravnog štapa čije se tačke pomeraju u pravcima koje su paralelne sa ravni štapa (ravna deformacija). Prilikom pomeranja tačaka štapa, pored pomeranja koja potiču od promene položaja ose u ravni štapa, dešavaju se i deformacije ose štapa. Zbog toga uvodimo i veličine koje postoje samo na onim mestima gde se osa štapa deformiše a jednake su nuli na onim mestima gde se ona ne deformiše. Takve veličine nazivamo čisto deformacijske veličine.

Da bismo definisali deformacijske veličine i uspostavili vezu između njih i pomeranja tačaka ose štapa, posmatraćemo jedan segment štapa pre i posle deformacije (slika 9).



Slika 9.

Vezu između pomeranja i obrtanja tačaka ose štapa u, v i φ i dilatacije ε dobićemo geometrijskim razmatranjem. Posmatramo element štapa CD diferencijalno male dužine ds. Posle deformacije tačka C prelazi u tačku C' a tačka D u tačku D'. Komponente vektora pomeranja tačke C su u i v, a komponente pomeranja tačke D su $u+du$ i $v+dv$, gde su du i dv priraštaji komponenata pomeranja na dužini ds. Pri deformaciji osa elementa CD dužine ds prelazi u krivu liniju $C'D'$. Dužina tetive $C'D'$ posle deformacije iznosi:

$$ds + \varepsilon ds = (1+\varepsilon)ds. \tag{1..10}$$

Veličinu ε, nazivamo dilatacija ose štapa, i predstavlja promenu dužine ose štapa po jedinici dužine ose štapa, tj. specifičnu promenu dužine ose štapa:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_{ik}}{l_{ik}} \tag{1..11}$$

Ova veličina je čisto deformacijska veličina jer postoji samo na onim mestima gde se osa štapa deformiše.

Element štapa pre deformacije zaklapa ugao α sa X-osom. Posle deformacije tetiva $C'D'$ zaklapa ugao $\alpha+\varphi$ sa X-osom. Veličina φ predstavlja ugao za koji se obrne tangenta odnosno normala na osu štapa. Ona nije čisto deformacijska veličina jer može da postoji i onda kada se osa štapa ne deformiše.

Vezu između komponenata pomeranja u, v obrtanja φ i dilatacije ε dobijamo geometrijskim razmatranjem:

$$\begin{aligned} dx + du &= (1+\varepsilon)\, ds \cdot \cos(\alpha+\varphi) \\ dy + dv &= (1+\varepsilon)\, ds \cdot \sin(\alpha+\varphi) \end{aligned} \tag{1..12}$$

Prethodne jednačine predstavljaju veze pomeranja u i v, obrtanja φ i dilatacije ε u kojima ništa nije pretpostavljeno o njihovim veličinama, pa one važe i onda kada pomeranja, obrtanja i dilatacije imaju konačne vrednosti. Teorija sa ovakvim vezama naziva se teorija konačnih ili teorija velikih deformacija.

Pomeranja, obrtanja i deformacijske veličine štapa često su tako male da je opravdano zanemariti njihove kvadrate i više stepene, kao i kvadrate i više stepene njihovih izvoda. Ova pretpostavka naziva se *pretpostavka o malim deformacijama.*

Kada zanemarimo kvadrate i više stepene ugla φ tada je $\cos\varphi = 1$ a $\sin\varphi = \varphi$ tako da je:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\varphi) &= \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi = \cos\alpha - \varphi\sin\alpha \\ \sin(\alpha+\varphi) &= \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi = \sin\alpha + \varphi\cos\alpha \end{aligned} \tag{1..13}$$

Kada jednačinu (1.13) uvrstimo u (1.12) dobija se:

$$\begin{aligned} dx + du &= (1+\varepsilon)\, ds \cdot (\cos\alpha - \varphi\sin\alpha) \\ dy + dv &= (1+\varepsilon)\, ds \cdot (\sin\alpha + \varphi\cos\alpha) \end{aligned} \tag{1..14}$$

Uz uslov da je $\varepsilon\varphi = 0$ i da je:

$$\begin{aligned} dx &= ds\cos\alpha \\ dy &= ds\sin\alpha \end{aligned} \tag{1..15}$$

dobijaju se sledeće veze između pomeranja i deformacije diferencijalnog elementa štapa

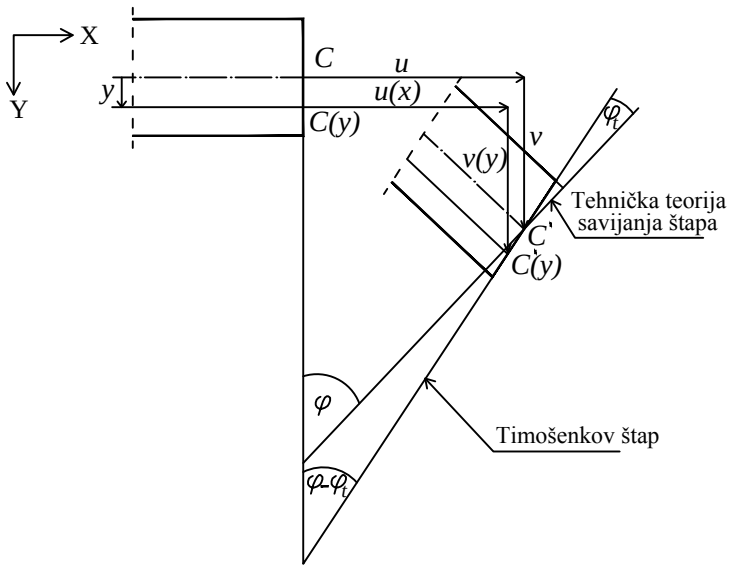
$$\begin{aligned} du &= \varepsilon dx - \varphi dy \\ dv &= \varepsilon dy + \varphi dx \end{aligned} \tag{1..16}$$

Jednačine koje uspostavljaju vezu između komponenata pomeranja i deformacije, date izrazom (1.16), predstavljaju linearne diferencijalne jednačine prvog reda. Zbog toga se pretpostavka o malim deformacijama često naziva i *pretpostavkom o geometrijskoj linearnosti.*

1.2.2. Deformacija štapa kao tela

Ukoliko posmatramo deformaciju štapa kao tela, potrebno je da pored dilatacije ε odredimo još dve čisto deformacijske veličine: klizanje poprečnog preseka φ_t i promenu krivine κ. Klizanje poprečnog preseka φ_t predstavlja promenu prvobitno pravog ugla između poprečnog preseka i ose štapa posle deformacije. U Tehničkoj teoriji štapa, kada govorimo o deformaciji štapa kao tela polazimo od Bernulijeve pretpostavke da se poprečni preseci štapa ne deformišu, da pri deformaciji ostaju ravni i upravni na deformisanu osu štapa.

Ova pretpostavka je tačna samo za prizmatične štapove opterećene na čisto savijanje. Kada je štap savijan silama poprečni preseci se vitopere, tako da tehnička teorija savijanja ne važi. Uticaj smičućih sila na deformaciju je relativno mali i uglavnom se može potpuno zanemariti, a određuje se na osnovu pretpostavke da poprečni preseci pri deformaciji ostaju ravni, ali da nisu upravni na deformisanu osu štapa. Štap za koji važi ova pretpostavka naziva se Timošenkov štap (Timoshenko).



Slika 10.

Posmatrajući deo pravog štapa pre i posle deformacije (slika 10) zaključuje se da je tačka C na osi štapa pre deformacije prešla u tačku C' posle deformacije. Komponente vektora pomeranja tačke C su u i v. S obzirom da govorimo o ravnoj deformaciji, pomeranja tačaka se odvijaju u ravnima koje su paralelne ravni štapa. To znači da će sve tačake koje leže na istom rastojanju y od ose štapa imati ista pomeranja: $u(y)$ i $v(y)$. Osa štapa ostaje u ravni štapa i posle deformacije, a poprečni preseci ostaju ravni, što govori da će rastojanje tačaka C i $C(y)$ u ravni štapa ostati nepromenjeno i jednako y. Ugao obrtanja tangente na osu štapa označava se sa φ. Prema Bernulijevoj hipotezi, poprečni preseci ostaju ravni i upravni na deformisanu osu štapa, pa je u tehničkoj teoriji savijanja ugao obrtanja poprečnog preseka jednak uglu φ (slika 10).

Međutim, kod Timošenkovog modela štapa poprečni preseci više nisu upravni na deformisanu osu štapa. Usled dejstva smičućih sila dolazi do dodatnog obrtanja poprečnog preseka za ugao φ_t, koji je po konvenciji suprotnog smera u odnosu na ugao obrtanja štapa φ i naziva se klizanje poprečnog preseka. Zbog toga je ugao obrtanja poprečnog preseka štapa jednak razlici uglova φ i φ_t, odnosno $\varphi - \varphi_t$.

Pomeranja tačaka na rastojanju y od ose štapa

Pomeranje tačake $C(y)$, koja se nalazi na rastojanju y od ose štapa može se izraziti u funkciji pomeranja tačaka ose štapa, kada je poznato klizanje poprečnog preseka φ_t. Iz slike 10 sledi da je:

$$\begin{aligned} u(y) &= u - y\sin(\varphi - \varphi_t) \\ v(y) &= v - y[1 - \cos(\varphi - \varphi_t)] \end{aligned} \tag{1..17}$$

Na osnovu pretpostavke o malim deformacijama možemo zapisati:

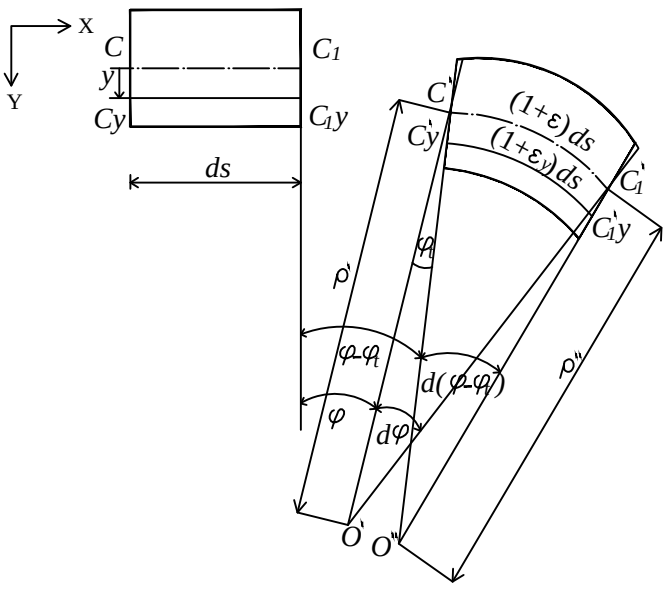
$$\begin{aligned} &\sin(\varphi - \varphi_t) \cong (\varphi - \varphi_t) \\ &1 - \cos(\varphi - \varphi_t) \cong 0 \end{aligned} \tag{1..18}$$

pa jednačina (1.17) postaje

$$\begin{aligned} u(y) &= u - y(\varphi - \varphi_t) \\ v(y) &= v \end{aligned} \tag{1..19}$$

Na osnovu jednačine (1.19) zaključujemo da su komponente pomeranja $u(y)$ tačaka na ekvidistantnom rastojanju y od ose štapa linearna funkcija rastojanja y, što odgovara pretpostavci da preseci posle deformacije ostaju ravni. Komponente pomeranja $v(y)$ jednake su komponentama pomeranja v tačaka ose štapa.

Dilatacija elementa na rastojanju y od ose štapa



Slika 11.

Dilatacija ose štapa je prethodno definisana. Međutim, da bi se odredila dilatacija elementa štapa koji se nalazi na rastojanju y od ose štapa, potrebno je razmotriti zapreminski element pravog štapa dužine ds pre deformacije (slika 11). Pre deformacije osa štapa se nalazi između tačaka CC_1 da bi nakon deformacije ona prešla u krivu liniju $C'C'_1$.

Prilikom deformacije poprečni presek u tački C' obrće se za ugao φ. Na diferencijalno malom rastojanju ds, ugao obrtanja poprečnog preseka se menja za iznos $d\varphi$, tako da ugao obrtanja preseka u tački C'_1 iznosi $\varphi + d\varphi$. Usled toga, poprečni preseci više nisu paralelni a njihovi pravci zaklapaju ugao $d\varphi$ i seku se u tački O'.

Pod dejstvom smičućih sila dolazi do dodatnog obrtanja poprečnog preseka u tački C' za ugao klizanja poprečnog preseka $-\varphi_t$, pa je ukupni ugao obrtanja poprečnog preseka u toj tački nakon deformacije jednak $\varphi - \varphi_t$. U tački C'_1 ugao klizanja se, u odnosu na tačku C', menja za iznos $d\varphi_t$, tako da ugao obrtanja poprečnog preseka u tački C'_1 iznosi $-(\varphi_t + d\varphi_t)$.

Element štapa menja svoju dužinu za iznos εds, pri čemu je ε dilatacija ose štapa. Nakon deformacije, dužina elementa ose štapa $C'C'_1$ iznosi $ds + \varepsilon ds = (1 + \varepsilon)ds$. Radi određivanja promene dužine ekvidistantnog elementa na rastojanju y od ose štapa, razmatra se element pre deformacije, čija je dužina ds. Nakon deformacije, ovaj element prelazi u položaj $C'yC'1y$ i dobija dužinu $[1 + \varepsilon(y)]ds$, gde $\varepsilon(y)$ označava dilataciju ekvidistantnog elementa na rastojanju y od ose štapa. Dilatacija ekvidistantnog elementa $\varepsilon(y)$ može se odrediti na osnovu sličnosti trouglova, pri čemu se dobija izraz za dilataciju ekvidistantnog elementa u sledećem obliku:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon - y\frac{d(\varphi - \varphi_t)}{ds} \tag{1..20}$$

Obrtanje φ_t koje nazivamo klizanje štapa je, kao i dilatacija, čisto deformacijska veličina,

odnosno javlja se na mestima na kojima se štap deformiše a jednake su nuli na mestima na kojima se štap ne deformiše.

Ako pored dosad uvedenih defomacijskih veličina uvedemo i veličinu koju nazivamo promena krivine κ možemo zapisati sledeću vezu:

$$\kappa = -\frac{d\,(\varphi - \varphi_T)}{ds} \tag{1..21}$$

Ona je jednaka negativnoj vrednosti promene ugla obrtanja između dva bliska poprečna preseka po jedinici dužine štapa.
Ako vrednost promene krivine κ uvrstimo u izraz (1.20) izraz za dilataciju ekvidistantnog elementa postaje:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon + \kappa y \tag{1..22}$$

1.3. Veze deformacijskih veličina, sila u presecima i temperaturnih promena

Pri analizi naponskog i deformacijskog stanja štapa izloženog dejstvu spoljašnjih sila i temperaturnih promena, pored relacija koje povezuju deformacije i pomeranja, kao i uslova ravnoteže, potrebno je definisati i konstitutivne relacije. Njima se uspostavlja veza između deformacijskih veličina ε, κ i φ_t i unutrašnjih sila u preseku N, T i M. Oblik ovih relacija zavisi od pretpostavljenog fizičkog modela materijala. U okviru idealizovanog Hukovog modela materijala usvaja se linearna zavisnost između napona, dilatacija i temperaturnih promena. Na udaljenosti y od ose štapa dilatacija ε i smicanje γ proporcionalne su odgovarajućim naponima:

$$\begin{aligned} \varepsilon(y) &= \frac{\sigma(y)}{E} + \alpha_t t^o(y) \\ \gamma(y) &= \frac{\tau(y)}{G} \end{aligned} \tag{1..23}$$

gde su:

$\varepsilon(y)$ - dilatacija

$\gamma(y)$ - klizanje

$\sigma(y)$ - normalni napona

$\tau(y)$ - smičući napon

$t(y)$ - temperaturna promena na odstojanju y od ose štapa

E - modul elastičnosti

G - modul klizanja

α_t - koeficijent linearne temperaturne dilatacije materijala

Pretpostavimo da se $t(y)$ menja linearno po visini štapa, od vrednosti t_u na donjem vlaknu do vrednosti t_o na gornjem vlaknu. Ako sa t^o obeležimo temperaturnu promenu u osi štapa, a sa Δt temperaturnu razliku, koja je jednaka razlici temperaturnih promena donjeg i gornjeg vlakna: $\Delta t = t_u - t_o$, tada je temperaturna promena $t^o(y)$ na odstojanju y od ose štapa:

$$t^o(y) = t^o + y\frac{\Delta t}{h} \tag{1..24}$$

Iz jednačina (1.23), (1.24) i (1.22) dobijamo izraz za normalni napon:

$$\sigma(y) = E\left(\varepsilon - \alpha_t t^o\right) + E \cdot y \left(\kappa - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right) \tag{1..25}$$

Izraze za moment savijanja i normalnu silu dobićemo kada u izraze (1.5):

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma(y) dF \\ M &= \int_F y\sigma(y) dF \end{aligned} \tag{1..26}$$

uvrstimo dobijeni izraz za napon savijanja (1.25). Prilikom izračunavanja vrednosti integrala treba voditi računa da je

$$\begin{aligned} &\int_F dF = F \\ &\int_F y dF = 0 \\ &\int_F y^2 dF = I \end{aligned} \tag{1..27}$$

gde je F površina poprečnog preseka a I moment inercije. Nakon integracije dobijaju se veze između presečnih sila i deformacijskih veličina:

$$\begin{aligned} N &= EF(\varepsilon - \alpha_t t^o) \\ M &= EI\left(\kappa - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right) \end{aligned} \tag{1..28}$$

Iz prethodnih jednačina mogu se izraziti dilatacija ose štapa ε i promena krivine poprečnog preseka κ u funkciji presečnih sila i temperaturne promene, odnosno temperaturne razlike:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t^o \\ \kappa &= \frac{M}{EI} EI + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \end{aligned} \tag{1..29}$$

Veza između klizanja φ_t i transverzalne sile T dobija se iz jednačine veze između smičućeg napona i deformacije, u kojoj je smičući napon $\tau(y)$ zamenjen izrazom za napon koji važi u Tehničkoj teoriji savijanja grede:

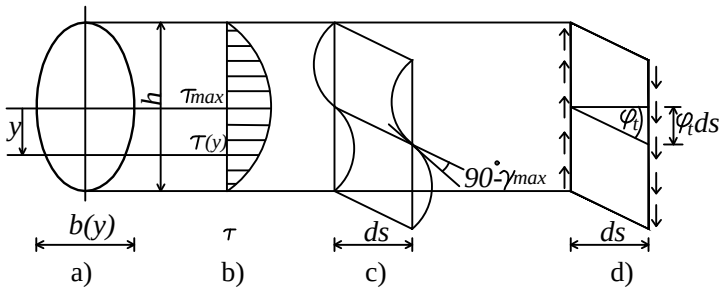
$$\tau(y) = \frac{T \cdot S(y)}{I \cdot b(y)} \tag{1..30}$$

gde je T transverzalna sila, $S(y)$ je statički moment dela preseka, I je moment inercije poprečnog preseka, a $b(y)$ je širina poprečnog preseka. Kada u izraz (1.23) uvrstimo jednačinu (1.30) dobija se da je smicanje na rastojanju y od ose štapa jednako:

$$\gamma(y) = \frac{T \cdot S(y)}{G \cdot I \cdot b(y)} \tag{1..31}$$

gde je G modul klizanja.

Na osnovu jednačine (1.31) možemo zaključiti da se klizanja $\gamma(y)$ menjaju zajedno za naponima smicanja po visini poprečnog preseka, krećući od nule u krajnjim vlaknima do maksimalne vrednosti u težištu preseka. Zbog ovakve raspodele klizanja poprečni preseci se vitopere kao što



Slika 12.

je prikazano na slici 12c.

Ako stvarnu raspodelu smicanja zamenimo takvom raspodelom $\gamma'(y)$ pri kojoj je prizvod $\gamma'(y)ds(y) = const$, tada je element štapa izložen deformaciji prikazanoj na slici 12d. Poprečni preseci pri toj deformaciji ostaju ravni ali relativno smaknuti na kraju elementa dužine ds za veličinu $\gamma'(y)ds(y) = \varphi_t ds$. Veličina φ_t je promena ugla između poprečnog preseka i ose štapa. Ugao φ_t određujemo iz uslova da je rad napona smicanja $\tau(y)$ na posmatranom elementu štapa dužine ds pri pretpostavljenoj raspodeli smicanja $\gamma'(y)$ jednak radu tih napona pri stvarnoj raspodeli smicanja $\gamma(y)$. Rad napona smicanja pri stvarnoj raspodeli deformacije smicanja na elementu štapa dužine ds je jednak:

$$dA = \int_F \tau(y)\gamma(y)dsdF \tag{1..32}$$

Konačno dolazimo do izraza za ugao klizanja poprečnog preseka:

$$\varphi_t = k\frac{T}{GF} \tag{1..33}$$

Jednačine (1.29) i (1.33) predstavljaju veze između deformacijskih veličina ε, κ i φ_t, sila u preseku N, T i M i temperaturne promene t^o i temperaturne razlike Δt. Te veze su linearne zahvaljujući Hukovom zakonu, pa zbog toga pretpostavku o linearnoj vezi između napona i deformacije nazivamo i *pretpostavkom o fizičkoj linearnosti.*

1.4. Rekapitulacija jednačina štapa

Zahvaljujući uvedenim pretpostavkama o malim pomeranjima (pretpostavka o statičkoj linearnosti), malim deformacijama (pretpostavka o geometrijskoj linearnosti) i Hukovom zakonu sve tri grupe jednačina kojima se uspostavljaju veze između sila, pomeranja i deformacije štapa su linearne. Teorija u kojoj važe uvedene pretpostavke naziva se *linearna teorija štapa* ili *teorija prvog reda.*

- jednačine ravnoteže elementa štapa:

$$\begin{aligned} &dN + p_t ds = 0 \\ &dT + p_n ds = 0 \\ &dM - Tds = 0 \end{aligned} \tag{1..34}$$

- jednačine veze pomeranja i deformacije štapa:

$$\begin{aligned} &du = \varepsilon dx - \varphi dy \\ &dv = \varepsilon dy + \varphi dx \\ &\kappa = -\frac{d(\varphi - \varphi_t)}{ds} \end{aligned} \tag{1..35}$$

- jednačine veze deformacijskih veličina, sila u presecima i temperaturnih promena:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t^o \\ \kappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \\ \varphi_t &= k\frac{T}{GF}\end{aligned} \tag{1..36}$$

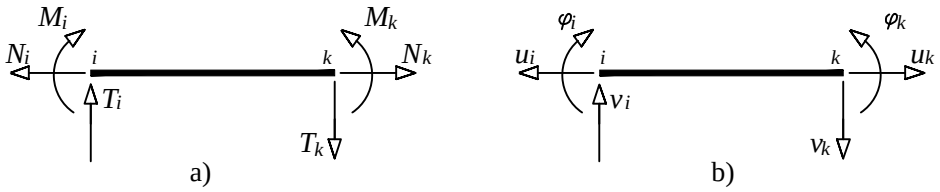
U jednačinama (1.34), (1.35) i (1.36) linearne teorije štapa figuriše ukupno devet nepoznatih veličina štapa:

- statičke veličine: M, N i T
- pomeranja i obrtanja: u, v, i φ
- deformacijske veličine: ε, κ, i φ_t

Prve dve grupe jednačina (1.34) i (1.35) predstavljaju šest linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda, dok su jednačine (1.36) linearne algebarske jednačine. Iz jednačina (1.36) se deformacijske veličine ε, κ i φ_t mogu izraziti u funkciji statičkih veličina N, T, i M i zameniti u jednačinama (1.35). Tako se problem određivanja statičkih velčina i pomeranja, odnosno obrtanja tačaka svodi na sistem od šest diferencijalnih jednačina u kojima figuriše šest nepoznatih veličina: M, N, T, u, v, i φ.

Da bi se nepoznate mogle jednoznačno odrediti potrebno je da pored geometrijskh karakteristika štapa, fizičkih konstanti materijala i spoljašnjeg opterećenja poznajemo još i šest integracionih konstanti. One se određuju iz graničnih uslova, odnosno uslova na krajevima štapa. Granični uslovi mogu biti zadati po silama ili po pomeranjima (slika13).

Na slici 13a prikazane su sile na krajevima štapa ik. Od prikazanih šest sila, tri sile se uvek mogu odrediti iz uslova ravnoteže štapa, što znači da maksimalno tri granična uslova štapa mogu biti zadata po silama. To mogu biti ili sile na jednom kraju štapa, ili sile na drugom kraju štapa, ili bilo koje tri kombinacije sila u presecima.



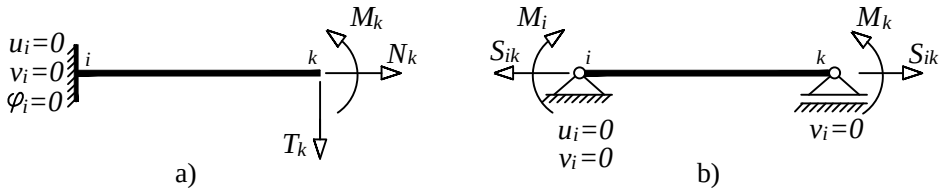
Slika 13. : *Granični uslovi štapa*

Na slici 13b prikazane su komponente pomeranja i obrtanja krajeva štapa. Najviše može biti zadato šest komponenata pomeranja, dok je minimalno potrebno znati tri pomeranja koja definišu pomeranje štapa kao krutog tela. To su obično pomeranja i obrtanja krajeva štapa.

Prema tome, možemo zaključiti da je maksimalan broj koji može da bude zadat po silama, odnosno minimalan broj uslova koji mora da bude zadat po pomeranjima je tri.

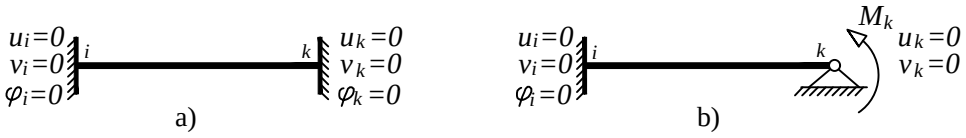
Ako su tri granična uslova zadata po silama, a tri po pomeranjima, tada u linearnoj teoriji sile u presecima mogu da se izračanaju iz uslova ravnoteže (1.34). Kada su poznate sile u presecima tada se uz korištenje jednačina (1.36) mogu odrediti deformacijske veličine ε, κ i φ_t,

a iz jednačina (1.35) i graničnih uslova po pomeranjima mogu se odrediti pomeranja tačaka i obrtanja poprečnih preseka štapa. Za takav problem štapa kažemo da je statički određen. Na slici 14 su prikazana dva statički određena sistema kod kojih su na različite načine zadati granični uslovi, tri po pomeranjima i tri po silama.



Slika 14. : *Statički određen problem štapa*

Kada je broj graničnih uslova zadatih po silama manji od tri tada sile u presecima ne mogu da se izračunaju samo iz uslova ravnoteže. Tada, da bismo odredili sile u presecima štapa moramo uzeti u obzir i pomeranja odnosno obrtanja štapa. Za takav problem štapa kažemo da je statički neodređen. Na slici 15 su prikazana dva statički neodređena sistema, u prvom slučaju svih šest graničnih uslova je zadato po pomeranjima, dok je u drugom slučaju pet graničnih uslova zadato po pomeranjima a jedan po silama.



Slika 15. : *Statički neodređen problem štapa*

2. Analiza linijskih nosača

Nosači predstavljaju sisteme međusobno povezanih štapova koji su sposobni da prime i prenesu opterećenje na tlo preko svojih oslonaca. Oni mogu biti prostorni ili ravni u zavisnosti od položaja koji zauzimaju u prostoru. U ovom udžbeniku ćemo se baviti samo analizom nosača kod kojih su ose svih štapova prave linije, koje zajedno sa jednom od glavnih osa inercije poprečnih preseka leže u istoj ravni koja predstavlja ravan nosača.

Ravni linijski nosači u zavisnosti od načina na koji su štapovi povezani mogu biti puni ili rešetkasti nosači. Rešetkasti nosači se sastoje od prostih štapova koji su međusobno povezani zglobnim vezama. To su štapovi koji su sposobni da prime i prenesu opterećenja samo u pravcu svoje ose. Puni nosači su oni kod kojih postoji bar jedna kruta veza.

2.1. Statički i deformacijski nepoznate veličine nosača

Da bi stanje napona u nosaču bilo definisano potrebno je da za nosač odredimo reakcije spoljašnjih veza (reakcije oslonaca i momente uklještenja) i presečne sile koje nastaju delovanjem nekog proizvoljnog spoljašnjeg opterećenja.

Kao što smo rekli, reakcije spoljašnjih veza predstavljaju reakcije oslonaca i momenti uklještenja. Broj nepoznatih reakcija oslonaca ćemo obeležiti sa z_o, a broj nepoznatih momenata uklještenja sa z_u.

Unutrašnje sile biće poznate kada su poznate sile u presecima svih štapova tog nosača. Da bi one bile određene potrebno je da pored opterećenja budu poznate i tri statički nezavisne veličine: aksijalna sila štapa S_{ik}, i momenti na krajevima štapa M_i i M_k. S obzirom da svaki štap ima jednu aksijalnu silu, znači da je ukupan broj nepoznatih aksijalnih sila S_{ik} jednak broju štapova u nosaču koji obeležavamo sa z_s. Broj nepoznatih momenata na krajevima štapova, u svakom čvoru gde postoji kruta veza štapa, jednak je broju štapova kruto vezanih u čvoru, odnosno za jedan je veći od broja krutih uglova u čvoru. Ako sa m označimo broj grupa kruto vezanih štapova, onda je ukupan broj nepoznatih momenata M_i i M_k na krajevima štapova nosača za m veći od broja krutih uglova u nosaču z_k. Odnosno, zaključujemo da je ukupan broj nepoznatih momenata u nosaču $z_k + m$.

Na osnovu prethodno navedenog možemo zaključiti da je ukupan broj nepoznatih spoljašnjih i untrašnjih sila u nosaču jednak: broju nepoznatih rekacija oslonaca z_o, momenata uklještenja z_u, aksijalnih sila z_s i momenata na krajevima štapova $z_k + m$, odnosno:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m \tag{2..1}$$

Za potpuno određivanje stanja nosača nije dovoljno poznavati samo unutrašnje i spoljašnje sile, već je potrebno odrediti i njegove deformacijske veličine. Zbog toga je, pored statičkih veličina, neophodno uvesti i odgovarajući broj deformacijskih veličina. Kao što je ranije naglašeno, pri tome je potrebno zadati najmanje tri granična uslova po pomeranjima. Ove veličine nazivaju se deformacijski nezavisne veličine štapa.

Kao deformacijski nezavisne veličine mogu se izabrati tri od četiri komponente pomeranja koje se javljaju na krajevima nosača. Time je broj nepoznatih veličina manji od ukupnog broja komponenti pomeranja krajnjih tačaka štapova. Međutim, unapred nije moguće jednoznačno utvrditi koje komponente pomeranja treba izabrati kao deformacijski nezavisne veličine. Zbog toga se sve četiri komponente pomeranja krajeva štapa uvode kao deformacijski nepoznate veličine.

Ako je K ukupan broj čvorova nosača, a u svakom čvoru postoje dve nepoznate komponente pomeranja, ukupan broj nepoznatih komponenti pomeranja čvorova nosača iznosi $2K$.

Zaključujemo da je ukupan broj statičkih i deformacijskih nepoznatih veličina u nosaču jednak:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m + 2K \tag{2..2}$$

2.2. Osnovne jednačine ravnih nosača

Jednačine iz kojih se mogu odrediti osnovne statičke i deformacijski nepoznate veličine sastoje se od dve grupe jednačina a to su:

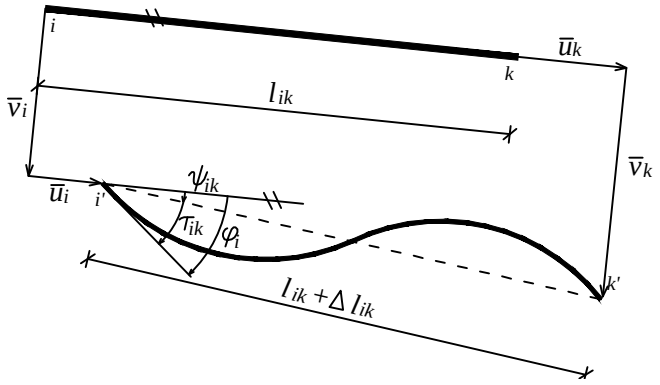
- uslovi kompatibilnosti pomeranja čvorova nosača
- uslovi ravnoteže nosača

2.2.1. Uslovi kompatibilnosti pomeranja čvorova nosača

Uslovi kompatibilnosti pomeranja čvorova nosača predstavljaju veze pomeranja čvorova sa jedne strane i deformacijskih veličina štapova, pomeranja oslonaca i obrtanja uklještenja sa druge strane. Oni se sastoje od četiri grupe jednačina.

Uslovi kompatibilnosti pomeranja krajeva štapova

Prva grupa jednačina predstavlja vezu između pomeranja čvorova na krajevima štapa i promene dužine tetive tog istog štapa (slika 16)



Slika 16.

Promena dužine ose štapa data je izrazom:

$$\Delta l_{ik} = \overline{u}_k - \overline{u}_i \tag{2..3}$$

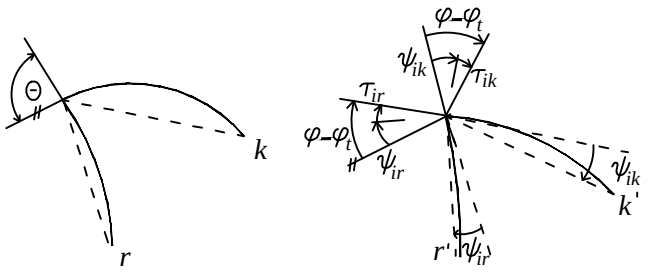
gde su sa $\overline{u}_k$ i $\overline{u}_i$ obeležena pomeranja krajeva štapa u pravcu ose lokalnog koordinatnog sistema. Ukoliko želimo napisati vezu za globalni koordinatni sistem dobijamo da je promena dužine ose štapa jednaka:

$$\Delta l_{ik} = (u_k - u_i)\cos\alpha + (v_k - v_i)\sin\alpha \tag{2..4}$$

Ukupan broj jednačina (2.3) odnosno (2.4) jednak je broju štapova nosača z_s.

Uslovi kompatibilnosti obrtanja čvorova

Druga grupa jednačina sledi iz uslova krute veze (slika 17)



Slika 17.

$$\tau_{ik} + \psi_{ik} = \tau_{ir} + \psi_{ir} \tag{2..5}$$

Posmatramo dva štapa, kruto vezana, pošto krut ugao sprečava relativna obrtanja poprečnih preseka znači da su obrtanja poprečnih preseka štapova kruto vezanih u čvoru ista i jednaka su $\varphi - \varphi_t$. Iz čega sledi da je:

$$\varphi - \varphi_t = \tau_{ik} + \psi_{ik} = \tau_{ir} + \psi_{ir} \tag{2..6}$$

odnosno:

$$\tau_{ik} - \tau_{ir} = \psi_{ik} - \psi_{ir} \tag{2..7}$$

Ukupan broj jednačina (2.6) odnosno (2.7) jednak je broju krutih uglova u nosaču.

Uslovi kompatibilnosti pomeranja oslonaca

Posmatramo pomeranje čvora i koji je oslonjen na elastičan oslonac čiji pravac zaklapa ugao β sa X osom koordinatnog sistema. Ako sa c_{oi} obeležimo pomeranje oslonca u pravcu oslanjanja sa slike 18 sledi:

$$c_{oi} = u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i \tag{2..8}$$

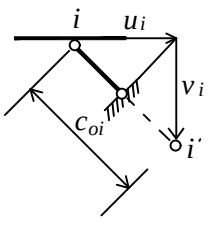
Ukuapn broj jednačina (2.9) jednak je broju oslonaca z_o.

Uslovi kompatibilnosti obrtanja uklještenja

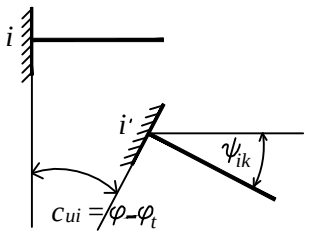
Poslednju jednačinu dobijamo iz uslova da je obrtanje poprečnog preseka u uklještenju jednako zadatom obrtanju uklještenja

$$c_{ui} = \psi_{ik} + \tau_{ik} = \varphi - \varphi_t \tag{2..9}$$

Ukuapn broj jednačina (1.45) jednak je broju oslonaca z_u.



Slika 18.



Slika 19.

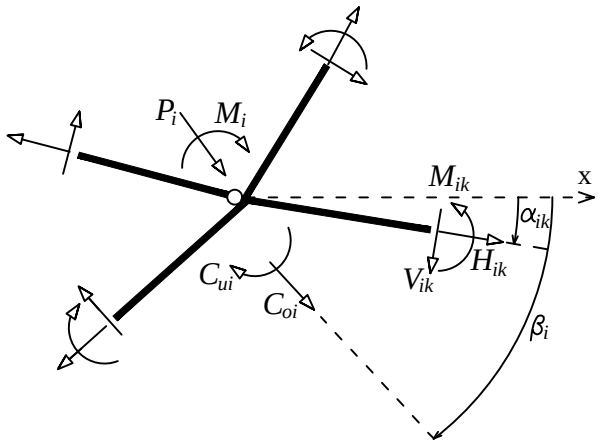
Možemo zaključiti da je ukupan broj uslova kompatibilnosti pomeranja čvorova nosača jednak ukupnom broju elemenata nosača:

$$z_o + z_u + z_s + z_k \tag{2..10}$$

2.2.2. Uslovi ravnoteže nosača

Da bi određeni sistem štapova mogao da bude nosač potrebno je da budu ispunjeni uslovi ravnoteže nosača u celini i uslovi ravnoteže sila u čvorovima tog nosača.

Da bismo ispisali uslove ravnoteže nosača zamislićemo da smo kružnim presecima isekli sve čvorove nosača i na taj način nosač rastavili na z_s nezavisnih štapova i K nezavisnih čvorova. Posmatramo čvor (slika 20) u kome su neki štapovi kruto a neki zglobno vezani. Pored sila u štapovima, na čvor deluju i aktivna spoljašnja sila P_i i koncentrisani moment M_i. U čvoru koji je oslonjen i uklješten deluju još i reakcije oslonca C_{oi} i moment uklještenja C_{ui}. U svakom čvoru možemo zapisati tri uslova ravnoteže: prvi da je suma svih sila u pravcu ose X jednaka nuli, drugi da je suma svih sila u pravcu ose Y jednaka nuli i treći, da je suma momenata u čvoru jednaka nuli. Ako ispišemo redom navedene uslove ravnoteže sila u posmatranom čvoru dobija se:



Slika 20.

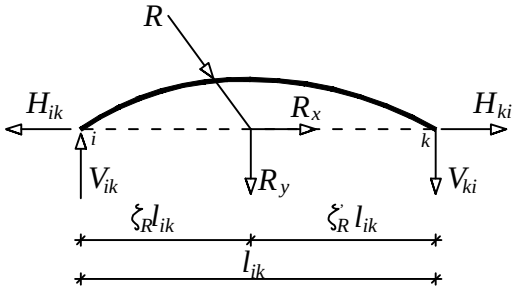
$$\begin{aligned}
&\sum H_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum V_{ik}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + P_{ix} = 0\\
&\sum H_{ik}\sin\alpha_{ik} - \sum V_{ik}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + P_{iy} = 0\\
&\sum \kappa M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0
\end{aligned} \tag{2..11}$$

Ako bismo vertikalne sile prikazali preko statički nezavisnih veličina M_{ik},M_{ki} i S_{ik} (slika 21): dobijamo:

$$\begin{aligned}
V_{ik} &= R_y\xi\text{‘}_R + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\\
V_{ki} &= -R_y\xi_R + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}
\end{aligned} \tag{2..12}$$

odnosno:

$$H_{ik} - H_{ki} = R_x \tag{2..13}$$



Slika 21.

Po definiciji znamo da je:

$$H_{ik} + H_{ki} = 2S_{ik} \tag{2..14}$$

znači da je:

$$\begin{aligned} H_{ik} &= S_{ik} + \frac{R_x}{2} \\ H_{ki} &= S_{ik} - \frac{R_x}{2} \end{aligned} \tag{2..15}$$

Ako prethodno izvedene izraze uvrstimo u uslove ravnoteže čvorova (2.11) dobija se:

$$\begin{aligned} &\sum S_{ik} \cos\alpha_{ik} - \sum \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} \sin\alpha_{ik} + C_{oi} \cos\beta_i + H_i = 0 \\ &\sum S_{ik} \sin\alpha_{ik} + \sum \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} \cos\alpha_{ik} + C_{oi} \sin\beta_i + V_i = 0 \\ &\sum \kappa M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0 \end{aligned} \tag{2..16}$$

gde je:

$$\begin{aligned} H_i &= P_{ix} + \frac{1}{2} \sum R_x \cos\alpha_{ik} - \sum R_y \xi'_R \sin\alpha_{ik} \\ V_i &= P_{iy} + \frac{1}{2} \sum R_x \sin\alpha_{ik} + \sum R_y \xi'_R \cos\alpha_{ik} \end{aligned} \tag{2..17}$$

Jednačine (2.16) predstavljaju uslove ravnoteže čvorova nosača. Za svaki čvor mogu se zapisati dva uslova ravnoteže sila u čvoru, što znači da je ukupan broj uslova ravnoteže sila u čvorovima nosača $2K$. Ukupan broj uslova ravnoteže momenata u čvorovima je m, odnosno jednak je broju čvorova u kojima postoji bar jedan krut ugao. Znači, ukupan broj jednačina uslova ravnoteže čvorova nosača koje možemo zapisati je $2K + m$. U njima je nepoznato:

- z_o reakcija oslonaca C_{oi}
- z_u momenata uklještenja C_{ui}
- z_s sila S_{ik}
- $z_k + m$ momenata M_{ik} i M_{ki}

2.3. Klasifikacija nosača

Nosači mogu biti samo oni sistemi koji zadovoljavaju određene uslove. Ti uslovi se mogu iskazati u kinematičkom ili statičkom obliku. U zavisnosti od ovih uslova možemo izvršiti statičku i kinematičku klasifikaciju nosača.

2.3.1. Kinematička klasifikacija nosača

Sistem štapova može biti nosač samo ako je kinematički stabilan, odnosno takav da njegovi čvorovi ne mogu da se pomeraju a da se pri tome ne deformiše ni jedan štap, ne pomeri ni jedan oslonac ili ne obrne ni jedno uklještenje. Sistemi štapova čiji čvorovi mogu da se pomeraju bez deformacije štapova, pomeranja oslonaca i obrtanja uklještenja su kinematički labilni sistemi odnosno mehanizmi. Oni ne mogu biti nosači. Analitički kriterijum o tome da li je neki sistem kinematički stabilan ili labilan izvodimo iz uslova kompatibilnosti pomeranja čvorova iz poglavlja 2.2.1. Kada je broj jednačina jednak broju komponenti pomeranja čvorova odnosno kada je:

$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2K \tag{2..18}$$

i kada su jednačine međusobno nezavisne odnosno determinanta tih jednačina je različita od nule, $D \neq 0$, za sistem kažemo da je KINEMATIČKI STABILAN.

Kada je broj nepoznatih veći od broja jednačina:

$$z_o + z_u + z_s + z_k > 2K \tag{2..19}$$

za sistem kažemo da je KINEMATIČKI VIŠESTRUKO STABILAN.

Kada je broj nepoznatih manji od broja jednačina:

$$z_o + z_u + z_s + z_k < 2K \tag{2..20}$$

za sistem kažemo da je KINEMATIČKI LABILAN.

2.3.2. Statička klasifikacija nosača

U statičkom smislu nosači su sistemi koji su sposobni da prime opterećenje i prenesu ga na oslonce. Analitički kriterijum da li neki sistem štapova može biti nosač određuje se poređenjem broja statički nepoznatih veličina sa brojem uslova ravnoteže koje je moguće ispisati. Nepoznate veličine su:

- z_o reakcija oslonaca C_{oi}
- z_u momenata uklještenja C_{ui}
- Z_s sila S_{ik}
- $z_k + m$ momenata M_{ik} i M_{ki}

Ukupan broj jednačina koje je moguće ispisati:

- $2K$ uslova ravnoteže sila u čvorovima nosača
- m suma momenata u čvorovima u kojima postoji bar jedan krut ugao.

Kada je broj nepoznatih jednak broju jednačina:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2K + m \tag{2..21}$$

odnosno

$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2K \tag{2..22}$$

i kada su jednačine međusobno nezavisne odnosno determinanta tih jednačina je različita od nule $D \neq 0$ za sistem kažemo da je STATIČKI ODREDJEN.
Kod statički određenih nosača reakcije oslonaca, momenti uklještenja i sile u presecima zavise samo od opterećenja nosača i jednake su nuli kada je nosač neopterećen.
Kada je broj nepoznatih manji od broja jednačina:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m < 2K + m \tag{2..23}$$

odnosno

$$Z_o + Z_u + Z_s + Z_k < 2K \tag{2..24}$$

za sistem kažemo da je STATIČKI PREODREDJEN.
Kada je broj nepoznatih veći od broja jednačina:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2K + m \tag{2..25}$$

odnosno

$$z_o + z_u + z_s + z_k > 2K \tag{2..26}$$

za sistem kažemo da je STATIČKI NEODREDJEN.

3. Statički neodređeni nosači

Statički neodređeni nosači su nosači kod kojih reakcije oslonaca, momenti uklještenja i sile u presecima ne mogu da se odrede samo iz uslova ravnoteže. U prethodnom poglavlju je izveden kriterijum za statičku klasifikaciju nosača. Zaključeno je da kada je broj nepoznatih veći od broja jednačina uslova ravnoteže nosača:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2K + m \tag{3..1}$$

odnosno

$$z_o + z_u + z_s + z_k > 2K \tag{3..2}$$

za sistem kažemo da je STATIČKI NEODREDJEN.

Razlika:

$$(z_o + z_u + z_s + z_k + m) - (2K + m) \tag{3..3}$$

predstavlja broj nepoznatih unutrašnjih ili spoljašnjih sila i momenata koji mogu da se izaberu proizvoljno a da uslovi ravnoteže budu zadovoljeni. Te veličine nazivamo statički neodređene veličine i obeležavamo ih sa X_1, X_2, $\ldots X_n$. Ako tim veličinama zadamo neke vrednosti, iz uslova ravnoteže nalazimo reakcije oslonaca, momente uklještenja i sile u presecima koje sa njima stoje u ravnoteži. Svaki takav sistem predstavlja jedno ravnotežno stanje posmatranog statički neodređenog nosača.

3.1. Metoda sila

Metoda sila predstavlja metodu za određivanje presečnih sila i reakcija oslonaca kod statički neodređenih nosača. U ovoj metodi za nepoznate veličine biramo sile, odnosno reakcije spoljašnjih ili unutrašnjih veza. Uklanjajući veze čije smo reakcije odabrali da budu statički neodeređene veličine formiramo statički određen sistem. Vrednost statički nepoznatih veličina dobijamo iz uslova kompatibilnosti pomeranja, a kada su one poznate ispisivanjem uslova ravnoteže određujemo i ostale nepoznate veličine.

U poglavlju 2.2.2 smo izveli uslove ravnoteže čvorova nosačakojih ukupno ima $2K + m$:

$$\begin{aligned}
&\sum S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0\\
&\sum S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0\\
&\sum \kappa M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0
\end{aligned} \tag{3..4}$$

U njima figurišu statički nezavisne veličine S_{ik}, M_{ik} i M_{ki}, reakcije oslonaca C_{oi}, momenti uklještenja C_{ui} i slobodni članovi H_i i V_i:

$$\begin{aligned}
H_i &= P_{ix} + \frac{1}{2}\sum R_x\cos\alpha_{ik} - \sum R_y\xi`_R\sin\alpha_{ik}\\
V_i &= P_{iy} + \frac{1}{2}\sum R_x\sin\alpha_{ik} + \sum R_y\xi`_R\cos\alpha_{ik}
\end{aligned} \tag{3..5}$$

Pošto je kod statički neodređenih nosača broj nepoznatih veći od broja jednačina potrebno je da odaberemo statički neodređene veličine kako bi sistem postao određen. Za statički neodređene veličine mogu da budu izabrane neke od nepoznatih reakcija oslonaca i momenata uklještenja

C_{oj} odnosno C_{uj}, sile S_{ik}, momenti na krajevima štapova M_{ik} i M_{ki} ili neke linarne homogene funkcije tih veličina:

$$\begin{aligned} &F_1(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_1 \\ &F_2(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_2 \\ &\dots \\ &F_n(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_n \end{aligned} \tag{3..6}$$

Ukupan broj ovih jednačina (3.6) je n kolika je i statička neodređenost nosača i one zajedno sa $2K + m$ jednačina uslova ravnoteže čvorova nosača (3.4) čine potpun sistem od $2K + m + n$ jednačina iz kojih mogu da se odrede sve statički nepoznate veličine.

Slobodni članovi u uslovima ravnoteže su veličine H_i, V_i i M_i koje zavise samo od spoljašnjeg opterećenja nosača p, a slobodni članovi u prethodnim jednačinama su statički neodređene veličine X_1, X_2, ... X_n, pa rešenja sistema jednačina mogu da se prikažu kao linearne funkcije opterećenja p i veličina X_1, X_2, ... X_n.

Ako sa:

$$\begin{aligned} &C_{j,0}, S_{ik,0}, M_{ik,0}, \\ &C_{j,1}, S_{ik,1}, M_{ik,1}, \\ &\dots \\ &C_{j,n}, S_{ik,n}, M_{ik,n}, \end{aligned} \tag{3..7}$$

označimo reakcije oslonaca, momente uklještenja i statički nezavisne veličine pojedinih štapova koje dobijamo rešenjem sistema jednačina stavljajući sukcesivno da je:

$$\begin{array}{lllll} p \neq 0, & X_1 = 0, & X_2 = 0, & \dots & X_n = 0 \\ p = 0, & X_1 = 1, & X_2 = 0, & \dots & X_n = 0 \\ p = 0, & X_1 = 0, & X_2 = 1, & \dots & X_n = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p = 0, & X_1 = 0, & X_2 = 0, & \dots & X_n = 1 \end{array}$$

opšta rešenja ovih jednačina mogu se prikazati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} C_j &= C_{j,0} + X_1 C_{j,1} + X_2 C_{j,2} + \ldots + X_n C_{j,n} \\ S_{ik} &= S_{ik,0} + X_1 S_{ik,1} + X_2 S_{ik,2} + \ldots + X_n S_{ik,n} \\ M_{ik} &= M_{ik,0} + X_1 M_{ik,1} + X_2 M_{ik,2} + \ldots + X_n M_{ik,n} \end{aligned} \tag{3..8}$$

Veličine $C_{j,0}$, $S_{ik,0}$, $M_{ik,0}$ su reakcije oslonaca, momenti uklještenja i statički nezavisne veličine štapova, ravnotežnog stanja nosača kada je on opterećen opterećenjem p a kada su sve statički neodređene veličine nosača jednake nuli.

Veličine $C_{j,m}$, $S_{ik,m}$, $M_{ik,m}$ (za $m = 1, 2, \dots n$) su reakcije oslonaca, momenti uklještenja i statički nezavisne veličine štapova, međusobno nezavisnih ravnotežnih stanja neopterećenog nosača.

Kada izraze za sile i momente uvrstimo u izraze za presečne sile sledi:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + \ldots + X_n N_n \\ T &= T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + \ldots + X_n T_n \\ M &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_n M_n \end{aligned} \tag{3..9}$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} &N_0, T_0, M_0; \\ &N_1, T_1, M_1; \\ &N_2, T_2, M_2; \\ &\dots \\ &N_n, T_n, M_n; \end{aligned} \tag{3..10}$$

sile u presecima stanja $X_i = 0$, odnosno sile u presecima unutrašnjih ravnotežnih stanja $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ do $X_n = 1$.

Umesto proizvoljnih linearnih funkcija nepoznatih spoljašnjih i unutrašnjih sla C_j, S_{ik}, M_{ik}, za statički neodređene veličine najčesće biramo reakciju jedne veze. To može biti reakcija oslonca C_{oi} ili moment uklještenja C_{ui} ili reakcija unutrašnje veze, na primer normalna sila N_i ili transverzalna sila T_i ili moment savijanja M_i. Ako za statički neodređene veličine izaberemo neke od nepoznatih spoljašnjih i unutrašnjih sila, i na taj način uklonimo veze, jer smo ih zamenili sa statički neodređenim veličinama, dobijamo sistem koji je statički određen. Takav sistem se naziva osnovni sistem datog nosača. U tom slučaju prethodne jednačine imaju jednostavna statička značenja, odnosno:

- $C_{j,0}, S_{ik,0}, M_{ik,0}$ odnosno N_0, T_0, M_0 predstavljaju reakcije i sile u presecima koje izaziva opterećenje p kada je $X_i = 0$
- $C_{j,m}, S_{ik,m}, M_{ik,m}$ odnosno N_m, T_m, M_m predstavljaju reakcije i sile u presecima kada na njega deluje opterećenje $X_m = 1$ za $m = 1, 2, \dots n$.

Bilo koji uticaj Z u statički neodređenom nosaču može se odrediti prrimenom principa superpozicije uticaja i prikazuje se kao zbir uticaja Z_o u osnovnom sistemu od opterećenja i uticaja Z_i u osnovnom sistemu usled stanja $X_i = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots n$

$$Z = Z_0 + Z_1X_1 + Z_2X_2 + \dots + Z_nX_n = Z_o + \sum_{i=1}^{n} Z_iX_i \tag{3..11}$$

3.2. Osnovni sistem

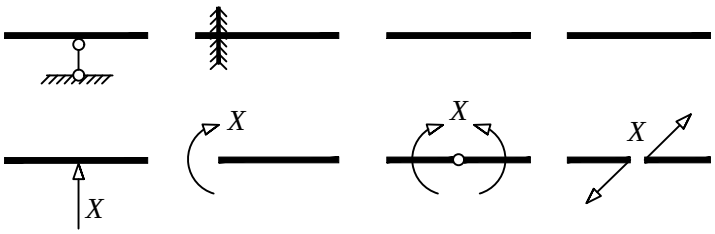
Sistem koji dobijamo kada iz datog statički neodređenog nosača uklonimo veze čije smo reakcije izabrali za statički neodređene veličine nazivamo osnovni sistem tog nosača. One se mogu usvojiti proizvoljno ali je potrebno voditi računa da se za statički nepoznatu veličinu ne može izabrati reakcija veze koja se može odrediti iz uslova ravnoteže i da sistem koji nastane uklanjanjem veza čije smo reakcije odabrali za statički neodređene veličine mora biti kinematički prosto stabilan.

Za izbor osnovnog sistema uvek postoji više mogućnosti, ali treba težiti da osnovni sistem predstavlja neki od poznatih nosača, prosta greda, luk na tri zgloba, lanac ploča, odnosno nosač za koji će biti najlakše odrediti reakcije sile veza i sile u presecima usled zadatog opterećenja. Uticaji u osnovnom sistemu biće jednaki uticajima u datom statički neodređenom sistemu kada u njemu uklonjene veze zamenimo reakcijama X_1 do X_n.

Na slici 22 možemo videti principe formiranja osnovnog sistema. Za statički nepoznatu veličinu možemo izabrati reakcije spoljašnjih veza, na primer reakciju oslonca C_{ui} ili moment uklještenja C_{ui}. U tom slučaju statički neodređena veličina je jedna sila odnosno jedan moment i ona odgovara reakciji veze koju smo uklonili. Pored toga, za statički nepoznatu veličinu možemo birati i reakciju unutrašnjih veza, na primer moment M_i, transverzalnu silu T_i ili normalnu silu N_i. U

tom slučaju statički neodređena veličina predstavlja par sila ili par momenata.

Kod nosača koji su višestruko statički neodređeni moguće je u jednom preseku ukloniti i više od jedne veze i tada ih zamenjujemo sa odgovarajućim brojem statički nepoznatih veličina.



Slika 22.

3.3. Uslovne jednačine za statički neodređene veličine

Presečne sile statički neodređenih nosača mogu se izračunati prema sledećem izrazu:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + X_1N_1 + X_2N_2 + \ldots + X_nN_n \\ T &= T_0 + X_1T_1 + X_2T_2 + \ldots + X_nT_n \\ M &= M_0 + X_1M_1 + X_2M_2 + \ldots + X_nM_n \end{aligned} \tag{3..12}$$

što znači da su one određene kada su poznate vrednosti statički neodređenih veličina X_1, X_2, $\ldots$ X_n.
Veličine X_1, X_2, $\ldots$ X_n će se odrediti iz uslovnih jednačina koje dobijamo primenom principa virtualnih sila.

Princip virtualnih sila, veza mogućih ravnotežnih stanja i mogućih stanja deformacije

Posmatrajmo statički određen ili statički neodereden nosač i dva stanja tog nosača: jedno moguće ravnotežno stanje kada je on opterećen sa $\tilde{p}_n$, $\tilde{p}_t$ i $\tilde{P}_i$, $\tilde{M}_i$ sa reakcijama $\tilde{C}_{io}$ i $\tilde{C}_{ui}$ i sa silama u presecima $\tilde{N}$, $\tilde{T}$, $\tilde{M}$; i jedno moguće stanje deformacije $\tilde{\tilde{\kappa}}$, $\tilde{\tilde{\varepsilon}}$,$\tilde{\tilde{\varphi}}_t$ sa pomeranjima oslonaca $\tilde{\tilde{c}}_{oi}$ i $\tilde{\tilde{c}}_{ui}$ kojima odgovaraju obrtanja preseka $\tilde{\tilde{\varphi}}$ i pomeranja $\tilde{\tilde{\xi}}$ i $\tilde{\tilde{\eta}}$. Veza mogućih ravnotežnih stanja i mogućih stanja deformacije datog nosača data je izrazom [1]:

$$\sum \tilde{P}\tilde{\tilde{s}} + \sum \tilde{C}\tilde{\tilde{c}} = \int_s \left(\tilde{M}\tilde{\tilde{\kappa}} + \tilde{N}\tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{T}\tilde{\tilde{\varphi}}_t\right) ds \tag{3..13}$$

Kada u ovu jednačinu za moguće stanje deformacije unesemo pomeranja i deformacijske veličine koje se u nosaču stvarno javljaju, a uticaje mogućeg ravnotežnog stanja umesto talasa označimo crticom dobijamo jednačinu koja prikazuje princip virtualnih sila:

$$\sum \bar{P}s + \sum \bar{C}c = \int_s \left(\bar{M}\kappa + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\varphi_t\right) ds \tag{3..14}$$

Pretpostavimo da na nosač deluje jedna virtualna sila $X_i = 1$ kojoj odgovara jedno unutrašnje ravnotežno stanje kao jedno moguće ravnotežno stanje nosača, pri čemu su sve ostale sile X_k jednake nuli. Pošto se radi o unutrašnje ravnotežnom stanju možemo zapisati sledeće:

$$\sum C_{ji}c_j = \int_s \left(M_i\kappa + N_i\varepsilon + T_i\varphi_t\right) ds \tag{3..15}$$

Stvarne deformacijske veličine su sledeće:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} \\ \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t^o \\ \varphi_t &= k\frac{T}{GF}\end{aligned} \tag{3..16}$$

Presečne sile koje figurišu u prethodnim izrazima mogu se zapisati kao:

$$\begin{aligned}N &= N_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k N_k \\ T &= T_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k T_k \\ M &= M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k M_k\end{aligned} \tag{3..17}$$

Kada se izraze za presečne sile i deformacijske veličine uvrste u izraz kojim definišemo princip virtualnih sila dobija se:

$$\begin{aligned}\sum C_{ji}c_j = \int_s M_i \left[\frac{1}{EI}\left(M_o + \sum_{k=1}^{n} X_k M_k\right) + \alpha_t \frac{\Delta t^o}{h}\right] ds + \\ + N_i \left[\frac{1}{EF}\left(N_o + \sum_{k=1}^{n} X_k N_k\right) + \alpha_t t^o\right] ds + \\ + T_i \frac{k}{GF}\left(T_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k T_k\right) ds\end{aligned} \tag{3..18}$$

odnosno daljom transformacijom dobija se:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} X_k \left(\int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_s k\frac{T_i T_k}{GF} ds\right) + \\ \left(\int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds + \int_s k\frac{T_i T_0}{GF} ds\right) + \\ \left(\int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} ds + \int_s N_i \alpha_t t^0 ds\right) - \sum C_{ji}c_j = 0\end{aligned} \tag{3..19}$$

Iz ove jednačine za $i = 1, 2, \ldots, n$ dobijamo sistem od n jednačina sa n nepoznatih X_1 do X_n. Ovaj sistem jednačina predstavlja uslovne jednačine za određivanje statički neodređenih veličina.

Ako uvedemo oznake:

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= \int_s \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_s k\frac{T_i T_k}{GF} ds \\ \delta_{i0} &= \int_s \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds + \int_s k\frac{T_i T_0}{GF} ds \\ \delta_{it} &= \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} ds + \int_s N_i \alpha_t t^0 ds \\ \delta_{ic} &= -\sum C_{ji}c_j\end{aligned} \tag{3..20}$$

i sa oznakom:

$$\delta_{i\otimes} = \delta_{i0} + \delta_{it} + \delta_{ic} \tag{3..21}$$

uslovne jednačine za statički neodređene veličine se mogu kraće zapisati:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \delta_{ik} + \delta_{i\otimes} = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots, n \tag{3..22}$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} &X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \ldots + X_n\delta_{1n} + \delta_{i\otimes} = 0 \\ &X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \ldots + X_n\delta_{2n} + \delta_{i\otimes} = 0 \\ &\ldots \\ &X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \ldots + X_n\delta_{nn} + \delta_{i\otimes} = 0 \end{aligned} \tag{3..23}$$

3.4. Određivanje presečnih sila

Kada se na osnovu uslovnih jednačina odrede statički nepoznate veličine moguće je odrediti reakcije oslonaca i presečne sile primenom principa superpozicije. Bilo koji uticaj Z u statički neodređenom nosaču je moguće odrediti na sledeći način:

$$Z = Z_0 + Z_1X_1 + Z_2X_2 + \ldots + Z_nX_n = Z_o + \sum_{i=1}^{n} Z_iX_i \tag{3..24}$$

gde Z_0 predstavlja uticaj u osnovnom sistemu usled delovanja opterećenja, a Z_i predstavlja uticaje u osnovnom sistemu usled statički neodređene veličine X_i, pri čemu $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Ako to primenimo na reakcije oslonaca, tada vrednost reakcije oslonca C_j u statički neodređenom nosaču možemo odrediti na sledeći način:

$$C_j = C_{j0} + C_{j1}X_1 + C_{j2}X_2 + \ldots + C_{jn}X_n = C_{j0} + \sum_{i=1}^{n} C_{ji}X_i \tag{3..25}$$

Da bi se odredile sile u presecima potrebno je da odredimo vrednosti momenata savijanja. Određujemo ih na karakterističnim mestima, na krajevima štapa i na mestima delovanja koncentrisane sile. Moment savijanja za proizvoljni presek c određujemo na osnovu izraza:

$$M_c = M_{c0} + M_{c1}X_1 + M_{c2}X_2 + \ldots + M_{cn}X_n = M_{c0} + \sum_{i=1}^{n} M_{ci}X_i \tag{3..26}$$

Kada je poznat dijagram momenata savijanja, određujemo transverzalne i normalne sile. Transverzalne sile određujemo iz uslova ravnoteže štapova a normalne sile iz uslova ravnoteže čvorova.

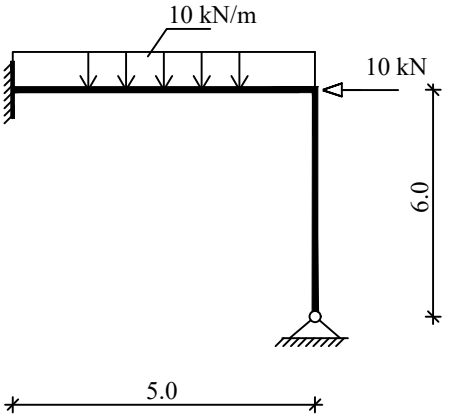
3.5. Koraci za određivanje uticaja kod statički neodređenih nosača

U prethodnim poglavljima su opisani postupci za određivanje presečnih sila kod statički neodređenih nosača. Sumirani, oni izgledaju ovako:

- određivanje statičke neodređenosti n
- usvajanje osnovnog sistema
- proračun uticaja u osnovnom sistemu za stanja $X_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots n$

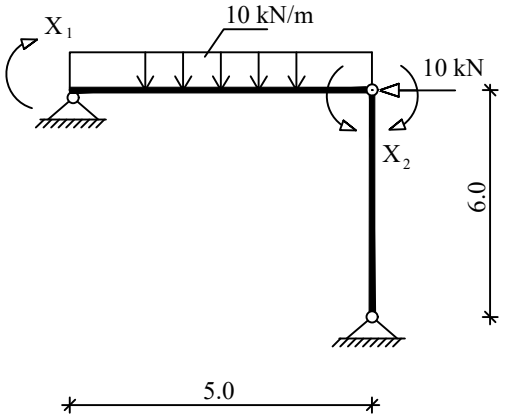
- proračun uticaja u osovnom sistemu za stanja usled opterećenja pri čemu je $X_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots n$
- ispisivanje uslovnih jednačina
- određivanje koeficijenata uz nepoznate kao i slobodnih članoa u uslovnim jednačinama
- određivanje statički nepoznatih veličina rešavanjem uslovnih jednačina
- određivanje presečnih sila

U narednom primeru su pokazani koraci proračuna statički neodređenog nosača:

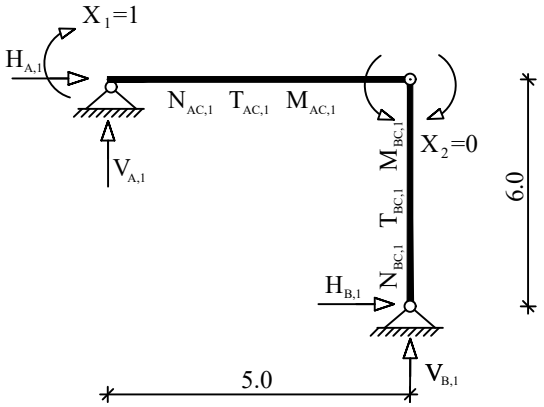


Statička neodređenost:

$$Z_o = 4$$
$$Z_u = 1$$
$$Z_s = 2$$
$$Z_k = 1$$
$$\sum Z = 8$$
$$n = \sum Z - 2K = 8 - 6 = 2$$

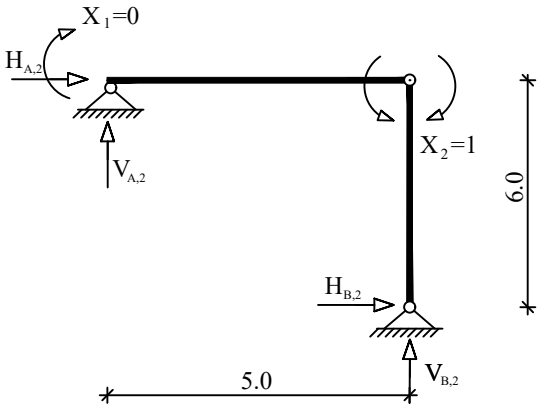


Potrebno je ukloniti dve veze pošto je nosač 2 puta statički neodređen i njihove veze zameniti statički neodređenim veličinama



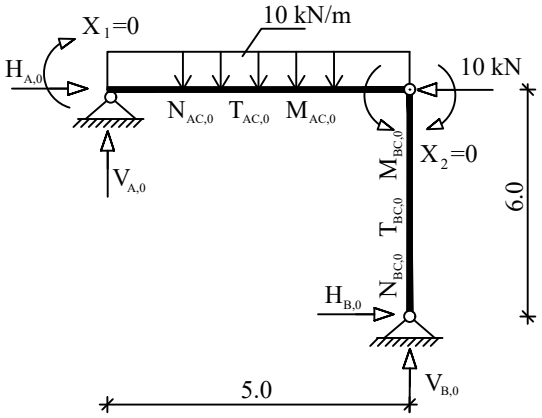
Proračun reakcija oslonaca i presečnih sila za stanje

$$p = 0$$
$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 0$$



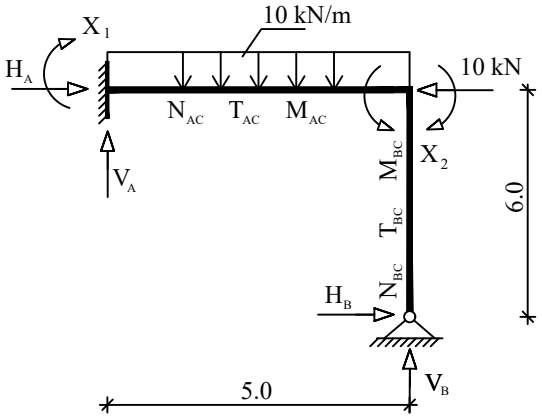
Proračun reakcija oslonaca i presečnih sila za stanje

$$p = 0$$
$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 1$$



Proračun reakcija oslonaca i presečnih sila za stanje

$$p \neq 0$$
$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 0$$

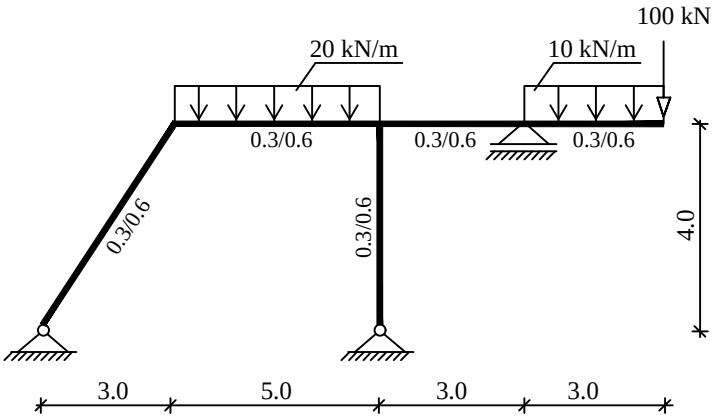


Rešavanje uslovnih jednačina, određivanje statički neodređenih veličina i proračun reakcija oslonaca i presečnih sila na stvarnom statički neodređenom nosaču

$$V_A = V_{A,0} + V_{A,1}X_1 + V_{A,2}X_2$$
$$H_B = H_{B,0} + H_{B,1}X_1 + H_{B,2}X_2$$
$$N_{AC} = N_{AC,0} + N_{AC,1}X_1 + N_{AC,2}X_2$$
$$T_{BC} = T_{BC,0} + T_{BC,1}X_1 + T_{BC,2}X_2$$

3.6. Zadatak 1

Za nosač na skici odrediti i nacrtati MTN dijagrame usled zadatog spoljašnjeg opterećenja. Uticaj normalnih sila zanemariti na deformaciju. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2



Statička neodređenost:

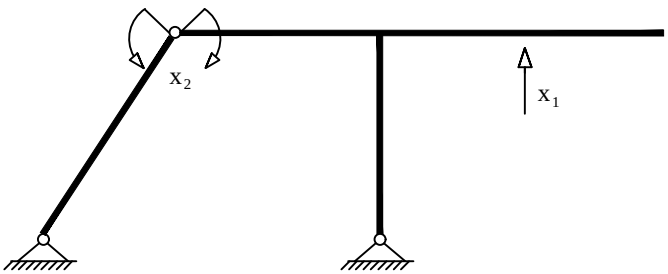
$$n = \sum Z - 2K$$

ukupan broj nepoznatih	ukupan broj jednačina
$Z_o = 5$	
$Z_u = 0$	
$Z_s = 5$	
$\underline{Z_k = 4}$	
$\sum Z = 14$	$2K = 2 \cdot 6 = 12$

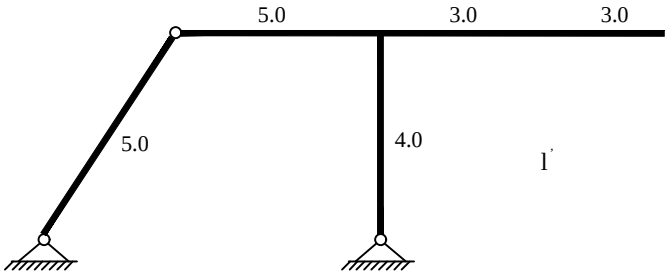
$$n = \sum Z - 2K = 14 - 12 = 2$$

Nosač je 2 puta statički neodređen.

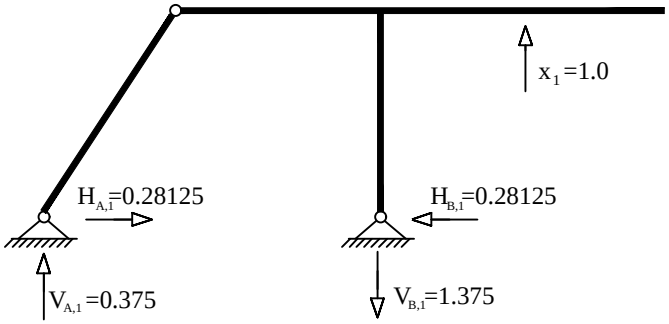
Osnovni sistem



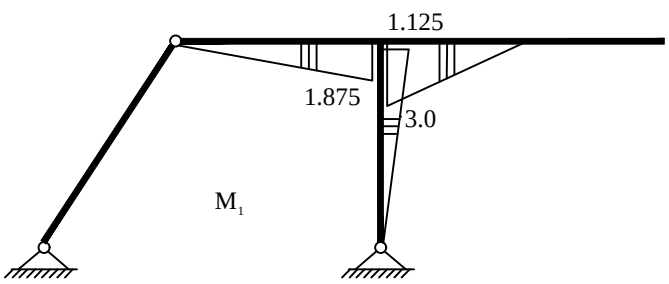
Redukovane dužine
Poprečni preseci svih štapova su istih dimezija, te se ne vrši redukcija dužina, odnosno dužine štapova su jednake zadatim dužinama.



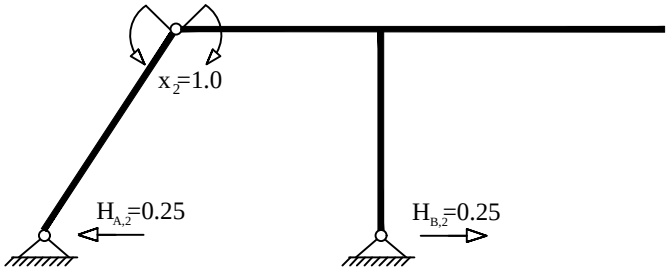
Stanje $x_1 = 1$



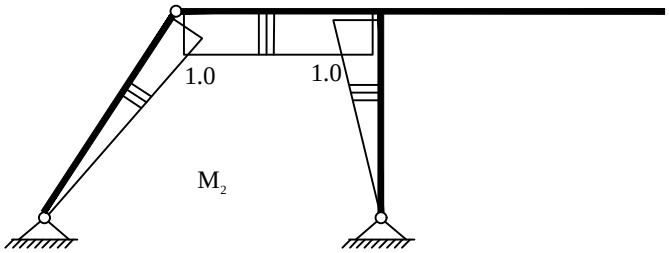
$$\sum M_A = 0: \qquad V_{B,1} \cdot 8 - 1 \cdot 11 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,1} = 1.375$$
$$\sum V = 0: \qquad V_{A,1} - V_{B,1} + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,1} = 0.375$$
$$\sum M_{g1}^{dole} = 0: \qquad V_{A,1} \cdot 3 - H_{A,1} \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{A,1} = 0.28125$$
$$\sum H = 0: \qquad H_{A,1} - H_{B,1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{B,1} = 0.28125$$



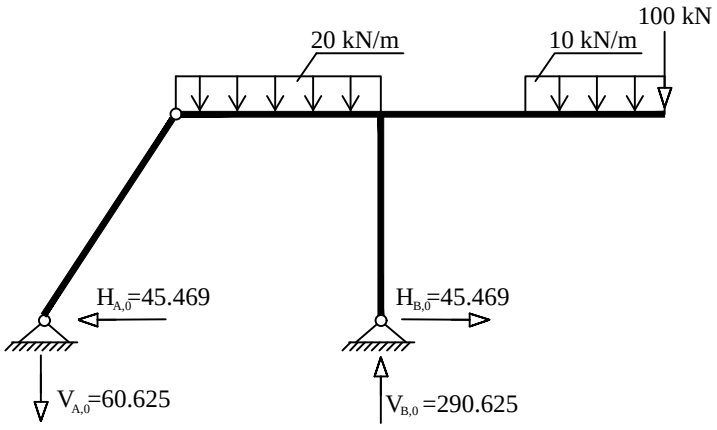
Stanje $x_2 = 1$



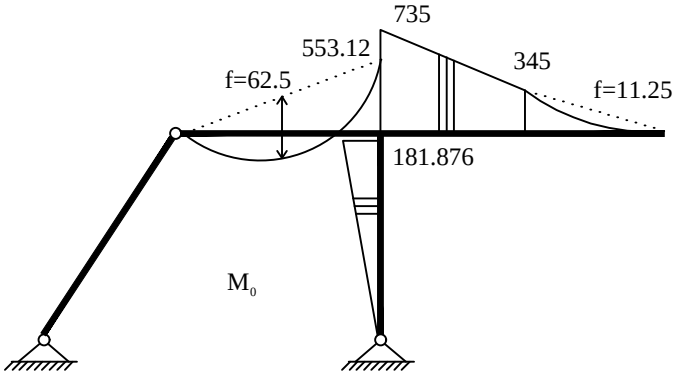
$$\sum M_A = 0: \qquad V_{B,2} \cdot 8 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,2} = 0$$
$$\sum V = 0: \qquad V_{A,2} + V_{B,2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,2} = 0$$
$$\sum M_{g1}^{dole} = 0: \qquad H_{A,2} \cdot 4 + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{A,2} = 0.25$$
$$\sum H = 0: \qquad H_{A,2} - H_{B,2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{B,2} = 0.25$$



Od osnovnog opterećenja



$$\sum M_A = 0: \quad V_{B,0} \cdot 8 - 20 \cdot 5 \cdot 5.5 - 10 \cdot 3 \cdot 12.5 - 100 \cdot 14 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{B,0} = 290.625$$
$$\sum V = 0: \quad -V_{A,0} + V_{B,0} - 20 \cdot 5 - 10 \cdot 3 - 100 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{A,0} = 60.625$$
$$\sum M_{g1}^{dole} = 0: \quad V_{A,0} \cdot 3 - H_{A,0} \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad H_{A,0} = 45.469$$
$$\sum H = 0: \quad H_{A,0} - H_{B,0} = 0 \quad \rightarrow \quad H_{B,0} = 46.469$$



Uslovne jednačine

$$EI_c\delta_{11} \cdot x_1 + EI_c\delta_{12} \cdot x_2 + EI_c\delta_{10} = 0$$
$$EI_c\delta_{21} \cdot x_1 + EI_c\delta_{22} \cdot x_2 + EI_c\delta_{20} = 0$$

Koeficijenti uz nepoznate

$$EI_c\delta_{11} = \int_s M_1^2 \cdot ds' = \frac{1}{3}1.875^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}1.125^2 \cdot 4 + \frac{1}{3}3^2 \cdot 3 = 16.55$$
$$EI_c\delta_{22} = \int_s M_2^2 \cdot ds' = \frac{1}{3}1^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}1^2 \cdot 4 = 8.0$$
$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \int_s M_1 \cdot M_2 \cdot ds' = -\frac{1}{3}1 \cdot 1.125 \cdot 4 + \frac{1}{2}1 \cdot 1.875 \cdot 5 = 3.1875$$

Slobodni članovi

$$EI_c\delta_{10} = \int_s M_1 \cdot M_0 \cdot ds' = -\frac{1}{3}181.876 \cdot 1.125 \cdot 4 - \frac{1}{6}3(2 \cdot 735 + 345) \cdot 3 -$$
$$- \frac{1}{3}1.875 \cdot 553.124 \cdot 5 + \frac{1}{3}62.5 \cdot 1.875 \cdot 5 = -4528.51$$
$$EI_c\delta_{20} = \int_s M_2 \cdot M_0 \cdot ds' = \frac{1}{3}181.876 \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2}1 \cdot 553.124 \cdot 5 + \frac{2}{3}62.5 \cdot 1 \cdot 5 = -931.98$$

Uslovne jednačine

$$16.55 \cdot x_1 + 3.1875 \cdot x_2 - 4528.51 = 0$$
$$3.1875 \cdot x_1 + 8.0 \cdot x_2 - 931.98 = 0$$

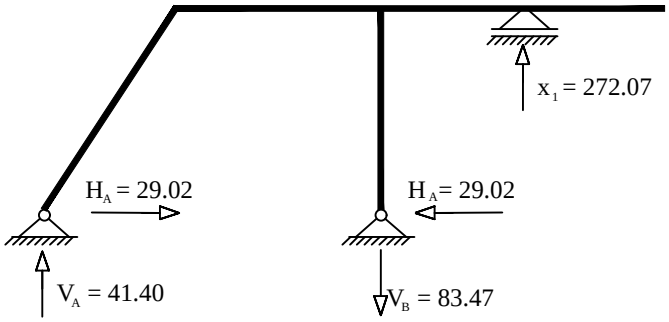
Statički neodređene veličine

$x_1 = 272.07$

$x_2 = 8.10$

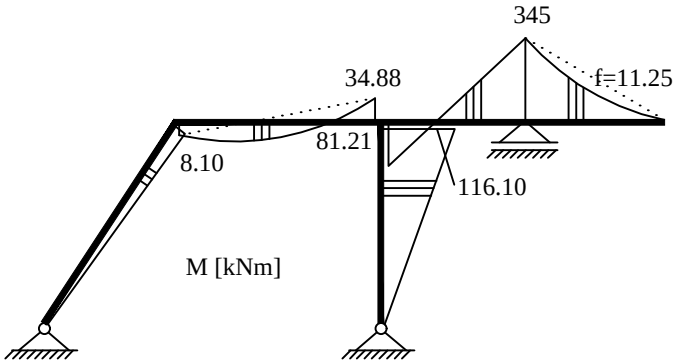
Reakcije oslonaca

$R = R_0 + R_1 \cdot x_1 + R_2 \cdot x_2$

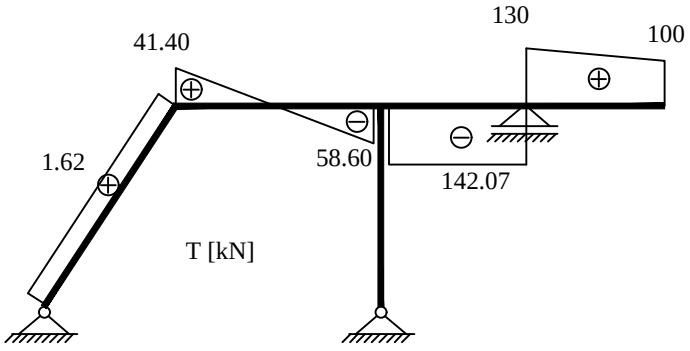


Dijagram momenata savijanja

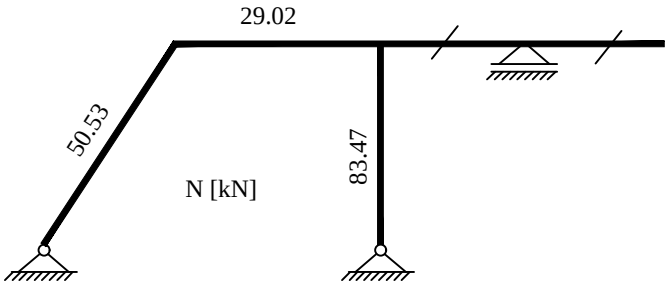
$M = M_0 + M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2$



Dijagram transverzalnih sila

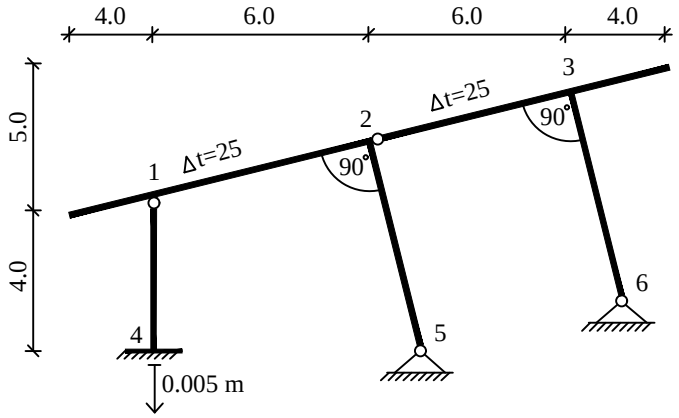


Dijagram normalnih sila



3.7. Zadatak 2

Za nosač na skici odrediti i nacrtati MTN dijagrame usled istovremenog delovanja temperaturne razlike u štapovima između čvorova 1 - 2 - 3 za $\Delta t = 25^o$C i sleganja oslonca u čvoru 4 za 0.005 m. Uticaj normalnih sila zanemariti na deformaciju. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2, $\alpha_t = 10^{-5} 1/^o$C a poprečni presek štapova je 30/60 cm



Statička neodređenost:

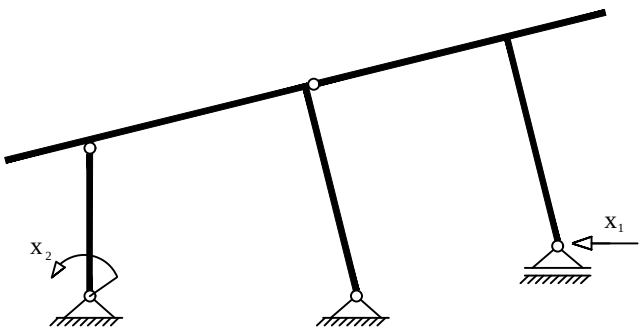
$$n = \sum Z - 2K$$

ukupan broj nepoznatih	ukupan broj jednačina
$Z_o = 6$	
$Z_u = 1$	
$Z_s = 7$	
$\underline{Z_k = 4}$	
$\sum Z = 18$	$2K = 2 \cdot 8 = 16$

$$n = \sum Z - 2K = 18 - 16 = 2$$

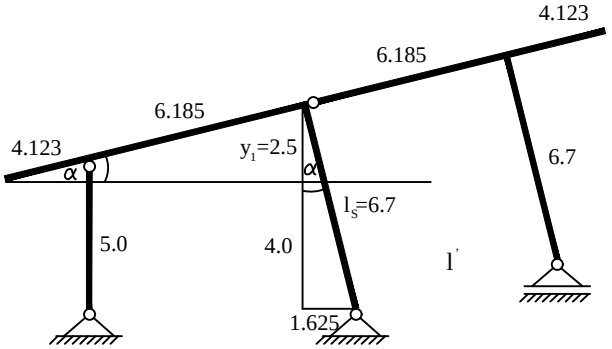
Nosač je 2 puta statički neodređen.

Osnovni sistem

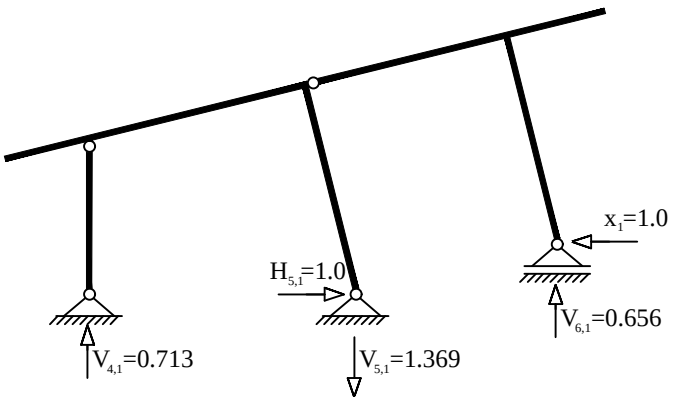


Redukovane dužine
Poprečni preseci svih štapova su istih dimezija, te se ne vrši redukcija dužina, odnosno dužine štapova su jednake zadatim dužinama.

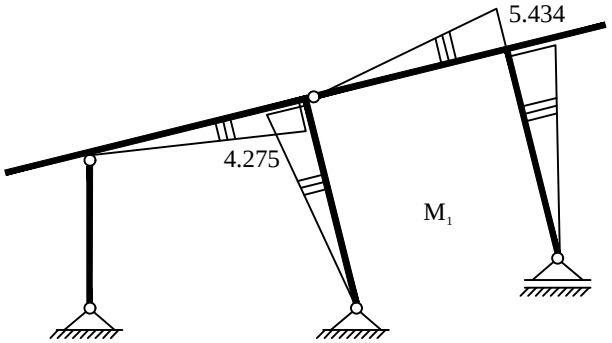
$$\tan\alpha = \frac{5}{20} \rightarrow \alpha = 14.04$$
$$\tan\alpha = \frac{y_1}{10} \rightarrow y_1 = 2.5$$
$$\cos\alpha = \frac{6.5}{l_S} \rightarrow l_S = 6.7$$



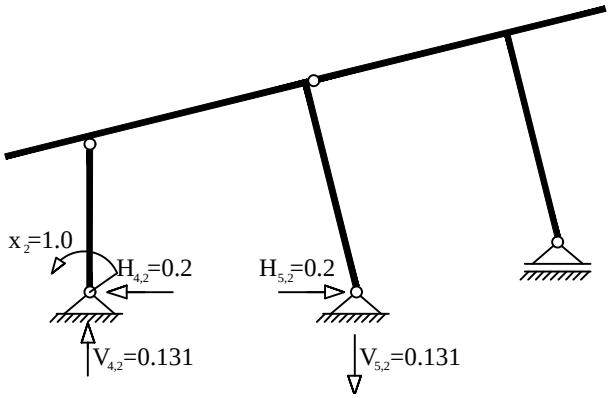
Stanje $x_1 = 1$



$$\sum M_{g2}^{desno} = 0: \quad V_{6,1} \cdot 7.625 - 1 \cdot 5 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{6,1} = 0.656$$
$$\sum M_{g1}^{dole} = 0: \quad H_{4,1} \cdot 5 = 0 \quad \rightarrow \quad H_{4,1} = 0$$
$$\sum H = 0: \quad H_{4,1} - H_{5,1} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_{5,1} = 1$$
$$\sum M_4 = 0: \quad -V_{5,1} \cdot 7.625 + V_{6,1} \cdot 13.625 + 1 \cdot 1.5 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{5,1} = 1.369$$
$$\sum V = 0: \quad V_{4,1} - V_{5,1} + V_{6,1} = 0 \quad \rightarrow \quad V_{4,1} = 0.713$$



Stanje $x_2 = 1$



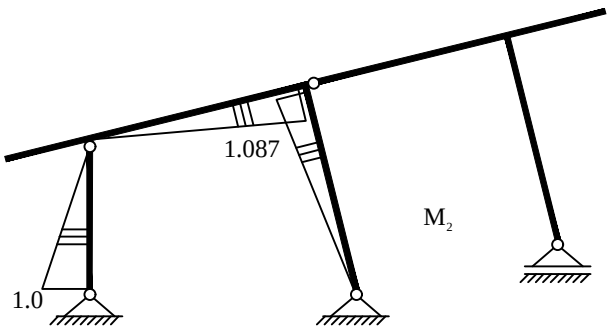
$$\sum M_{g2}^{desno} = 0: \quad V_{6,2} \cdot 7.625 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{6,2} = 0$$

$$\sum M_{g1}^{dole} = 0: \quad H_{4,2} \cdot 5 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_{4,2} = 0.2$$

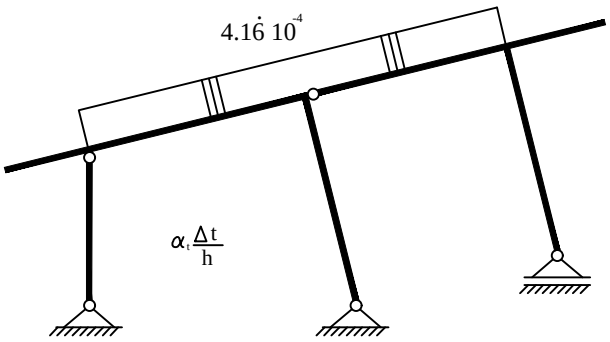
$$\sum H = 0: \quad H_{4,2} - H_{5,2} = 0 \quad \rightarrow \quad H_{5,2} = 0.2$$

$$\sum M_4 = 0: \quad V_{5,2} \cdot 7.625 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{5,2} = 0.131$$

$$\sum V = 0: \quad V_{4,2} - V_{5,2} = 0 \quad \rightarrow \quad V_{4,2} = 0.131$$



Od delovanja temperaturne razlike



Uslovne jednačine

$$EI_c\delta_{11}\cdot x_1 + EI_c\delta_{12}\cdot x_2 + EI_c\delta_{1\otimes} = 0$$
$$EI_c\delta_{21}\cdot x_1 + EI_c\delta_{22}\cdot x_2 + EI_c\delta_{2\otimes} = 0$$

Koeficijenti uz nepoznate

$$EI_c\delta_{11} = \int_s M_1^2\cdot ds' = \frac{1}{3}4.275^2\cdot(6.185+6.7) + \frac{1}{3}5.434^2\cdot(6.185+6.7) = 205.529$$
$$EI_c\delta_{22} = \int_s M_2^2\cdot ds' = \frac{1}{3}1^2\cdot 5 + \frac{1}{3}1.087^2\cdot(6.185+6.7) = 6.742$$
$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \int_s M_1\cdot M_2\cdot ds' =$$
$$= \frac{1}{3}1.087\cdot 4.275\cdot(6.185+6.7) = 19.958$$

Slobodni članovi

$$EI_c\delta_{1\Delta t} = EI_c\int_s M_1\cdot\alpha t\frac{\Delta t}{h}\cdot ds =$$
$$= 3\cdot 10^7\cdot 0.0054\cdot\left(-\frac{1}{2}4.275\cdot 4.16\dot{}\cdot 10^{-4}\cdot 6.185 + \frac{1}{2}5.434\cdot 4.16\dot{}\cdot 10^{-4}\cdot 6.185\right) = 241.95$$
$$EI_c\delta_{2\Delta t} = EI_c\int_s M_2\cdot\alpha t\frac{\Delta t}{h}\cdot ds = 3\cdot 10^7\cdot 0.0054\cdot\left(-\frac{1}{2}1.087\cdot 4.16\dot{}\cdot 10^{-4}\cdot 6.185\right) = -226.90$$
$$EI_c\delta_{1c} = -EI_c\sum C_i\cdot c_i = -3\cdot 10^7\cdot 0.0054\cdot(-0.713)\cdot 0.005 = 577.53$$
$$EI_c\delta_{2c} = -EI_c\sum C_i\cdot c_i = -3\cdot 10^7\cdot 0.0054\cdot(-0.131)\cdot 0.005 = 106.11$$
$$EI_c\delta_{1\otimes} = EI_c\delta_{1\Delta t} + EI_c\delta_{1c} = 241.95 + 577.53 = 819.48$$
$$EI_c\delta_{2\otimes} = EI_c\delta_{2\Delta t} + EI_c\delta_{2c} = -226.90 + 106.11 = -120.79$$

Uslovne jednačine

$$205.529\cdot x_1 + 19.958\cdot x_2 + 819.48 = 0$$
$$19.958\cdot x_1 + 6.742\cdot x_2 - 120.79 = 0$$

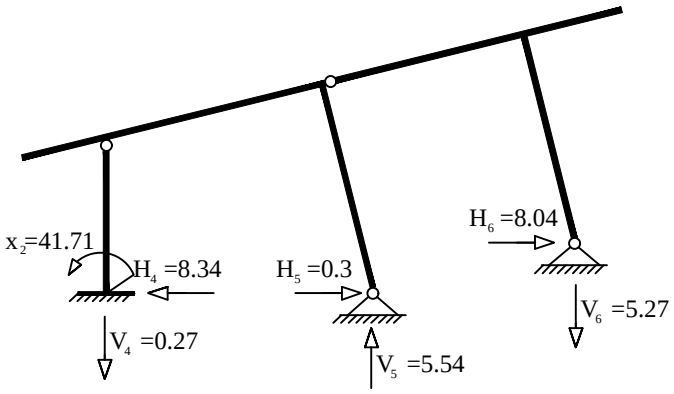
Statički neodređene veličine

$x_1 = -8.04$

$x_2 = 41.71$

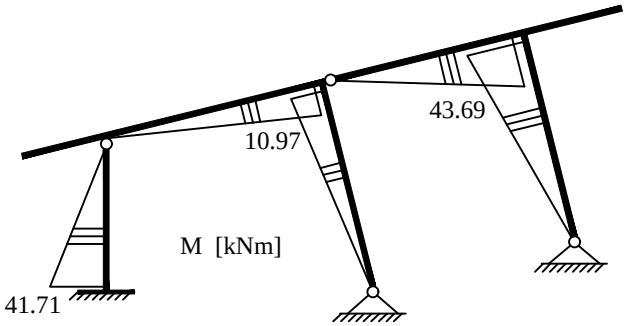
Reakcije oslonaca

$R = R_1 \cdot x_1 + R_2 \cdot x_2$

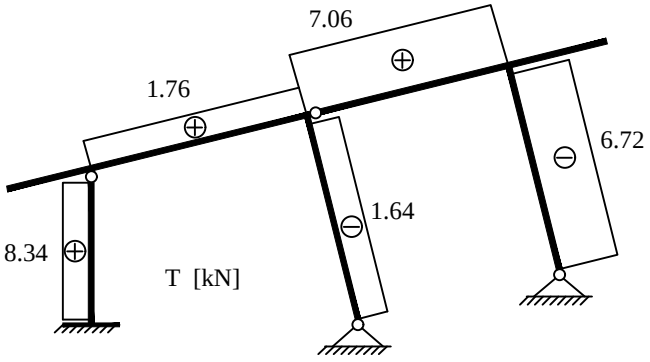


Dijagram momenata savijanja

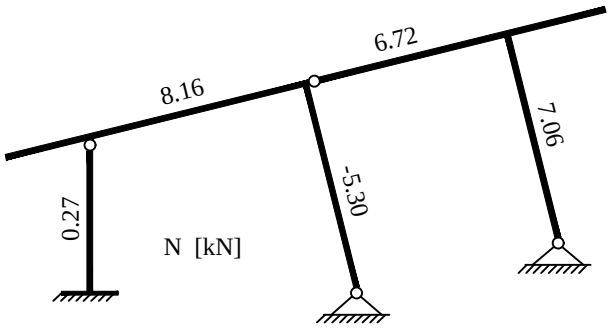
$M = M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2$



Dijagram transverzalnih sila



Dijagram normalnih sila



3.8. Rešetkasti nosači

Rešetkasti nosači su nosači koji se sastoje od prostih štapova, koji su međusobno spojeni zglobnim vezama. S obzirom da kod ovakvih nosača nema krutih veza kao ni uklještenja, statička neodređenost se određuje prema izrazu:

$$n = z_o + z_s - 2K \tag{3..27}$$

Kod ovih nosača za statički nepoznate veličine biramo reakcije oslonaca ili sile u štapovima rešetke. S ozirom da kod ovih nosača postoje samo normalne sile izvedene uslovne jednačine za određivanje statički nepoznatih veličina se redukuju. Za rešetkast nosač, čiji štapovi primaju samo aksijalne sile, princip virtualnih sila napisan za unutrašnje ravnotežno stanje glasi:

$$\sum C_{ji} c_j = \int_s N_i \varepsilon ds = \sum_s N_i \int_s \varepsilon ds \tag{3..28}$$

odnosno

$$\sum C_{ji} c_j = \sum_s S_i \Delta l \tag{3..29}$$

gde je sa S_i obeležena aksijalna sila u proizvoljnom štapu rešetke pri stanju $X_i = 1$, a sa Δl stvarna promena dužine tog štapa:

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{EF} + \alpha_t t^o l \tag{3..30}$$

pri čemu sila u štapu S datog statički neodređenog nosača usled zadatih spoljašnjih uticaja može da se prikaže u obliku:

$$S = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k S_k \tag{3..31}$$

Ako to primenimo na princip virtualnih sila:

$$\sum_j C_{ji} c_j = \sum_s S_i \left[\frac{l}{EF} \left(S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k S_k \right) + \alpha_t t^o l \right] \tag{3..32}$$

odnosno

$$\sum_k X_k \left(\sum_s \frac{S_i S_k}{EF} l \right) + \sum_s \frac{S_i S_0}{EF} l + \sum_s S_i \alpha_t t^o l - \sum C_{ji} c_j \tag{3..33}$$

Ako uvedemo oznake:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \sum_s \frac{S_i S_k}{EF} l \\ \delta_{i0} &= \sum_s \frac{S_i S_0}{EF} l \\ \delta_{it} &= \sum_s S_i \alpha_t t^o l \\ \delta_{ic} &= \sum C_{ji} c_j \end{aligned} \tag{3..34}$$

sistem postaje:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \delta_{ik} + \delta_{i\otimes} = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots, n \tag{3..35}$$

3.9. Određivanje pomeranja

Pomeranja statički neodređenih nosača se određuju na isti način kao i pomeranja kod statički određenih nosača. Generalisano pomeranje kod statički neodređenih nosača se dobija primenom principa virtualnih sila. Taj princip glasi:

$$\sum \bar{P}s + \sum \bar{C}c = \int_s \left(\bar{M}\kappa + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\varphi_t\right) ds \tag{3..36}$$

Da bismo primenom ovog principa odredili komponentu pomeranja u određenom pravcu jedne tačke nosača, za virtualno opterećenje ćemo usvojiti jednu jediničnu koncentrisanu silu u tački čije pomeranje tražimo a u pravcu tog pomeranja odnosno prethodni izraz postaje:

$$s = \int_s \left(\bar{M}\kappa + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\varphi_t\right) ds - \sum \bar{C}_i c_i \tag{3..37}$$

Za jedan elastičan ravan linijski nosač deformacijske veličine su date izrazima:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} \\ \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t^o \\ \varphi_T &= k\frac{T}{GF} \end{aligned} \tag{3..38}$$

Kada u prethodni izraz unesemo izraze za deformacijske veličine dobija se konačan izraz za traženo pomeranje:

$$s = \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_s \frac{N\bar{N}}{E/F} ds + \int_s k\frac{T\bar{T}}{GF} ds + \int_s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} ds + \int_s \bar{N}\alpha_t t^o ds - \sum \bar{C}_i c_i \tag{3..39}$$

Ako uvedemo oznake:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_s \frac{N\bar{N}}{E/F} ds + \int_s k\frac{T\bar{T}}{GF} ds \\ \delta_t &= \int_s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} ds + \int_s \bar{N}\alpha_t t^o ds \\ \delta_c &= -\sum \bar{C}_i c_i \end{aligned} \tag{3..40}$$

ukupno pomeranje možemo zapisati kao:

$$\delta = \delta_0 + \delta_t + \delta_c \tag{3..41}$$

S obzirom da su pomeranja nosača mala pri proračunu ih obično množimo sa pogodno izabranim multiplikatorom. Najčešće je to veličina EI_c gde je I_c uporedni ili referenti moment inercije preseka nosača.

Jednačine tada postaju:

$$\begin{aligned} EI_c\delta_0 &= \int_s M\bar{M}\frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c}\int_s N\bar{N}\frac{F_c}{F} ds + (2+\nu)\frac{I_c}{F_c}\int_s kT\bar{T}\frac{F_c}{F} ds \\ EI_c\delta_t &= EI_c \int_s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t^o}{h} ds + EI_c \int_s \bar{N}\alpha_t t^o ds \\ EI_c\delta_c &= -EI_c \sum \bar{C}_i c_i \end{aligned} \tag{3..42}$$

Pomeranja kod rešetkastih nosača

Kod rešetkastih nosača izraz za pomeranje koji dobijamo iz principa virtualnih sila je sledeći:

$$s = \int_s \bar{N}\varepsilon ds - \sum \bar{C}_i c_i \tag{3..43}$$

Podintegralna funkcija $\bar{N}\varepsilon$ je konstantna duž pojedinih štapova tako da vrednost ovog integrala može da se zapiše u sledećem obliku:

$$\int_s^k \bar{N}\varepsilon = \bar{N}\varepsilon \int_i^k ds = \bar{N}\varepsilon l = \bar{S}\Delta l \tag{3..44}$$

gde je $\bar{S}$ aksijalna sila u posmatranom štapu od virtualnog opterećenja nosača.
Možemo zapisati

$$\delta = \sum_s \bar{S}\Delta l - \sum \bar{C}_i c_i \tag{3..45}$$

Ako u prethodnu jednačinu unesemo izraz:

$$\Delta l = \frac{Sl}{EF} + \alpha_t t^o l \tag{3..46}$$

dobijamo:

$$\delta = \sum_s \frac{S\bar{S}}{EF} l + \sum_s \bar{S}\alpha_t t^o l - \sum \bar{C}_i c_i \tag{3..47}$$

odnosno

$$\delta = \delta_0 + \delta_t + \delta_c \tag{3..48}$$

gde je:

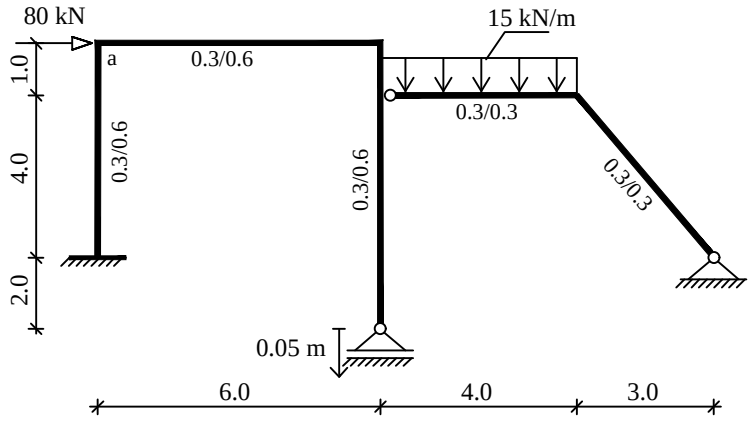
$$\begin{aligned} \delta_0 &= \sum_s \frac{S\bar{S}}{EF} l \\ \delta_t &= \sum_s \bar{S}\alpha_t t^o l \\ \delta_c &= -\sum \bar{C}_i c_i \end{aligned} \tag{3..49}$$

Pomnoženi sa multiplikatorom EF_c konačno se dobija:

$$\begin{aligned} EF_c\delta_0 &= \sum_s S\bar{S}\frac{F_c}{F} l \\ EF_c\delta_t &= EF_c \sum_s \bar{S}\alpha_t t^o l \\ EF_c\delta_c &= -EF_c \sum \bar{C}_i c_i \end{aligned} \tag{3..50}$$

3.10. Zadatak 3

Za nosač na skici odrediti horizontalno pomeranje čvora a usled istovremenog delovanja zadatog spoljašnjeg opterećenja i sleganja oslonca. Uticaj normalnih i transverzalnih sila zanemariti na deformaciju. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2



Statička neodređenost:

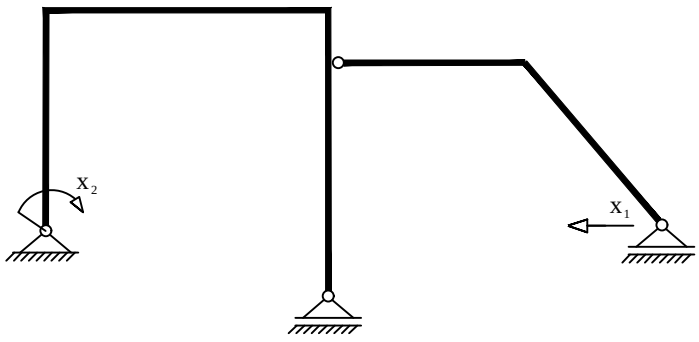
$$n = \sum Z - 2K$$

ukupan broj nepoznatih	ukupan broj jednačina
$Z_o = 5$	
$Z_u = 1$	
$Z_s = 6$	
$Z_k = 4$	
$\sum Z = 16$	$2K = 2 \cdot 7 = 14$

$$n = \sum Z - 2K = 16 - 14 = 2$$

Nosač je 2 puta statički neodređen.

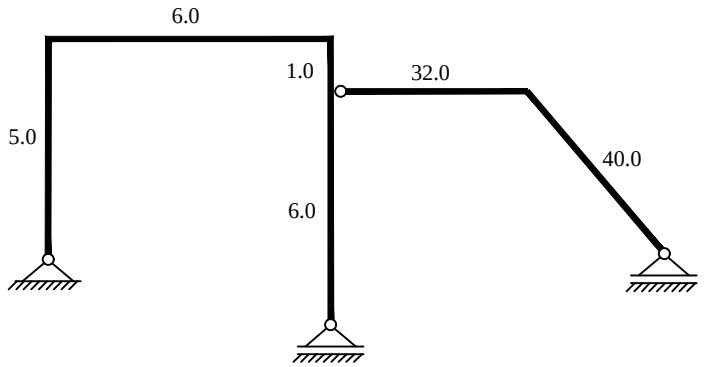
Osnovni sistem



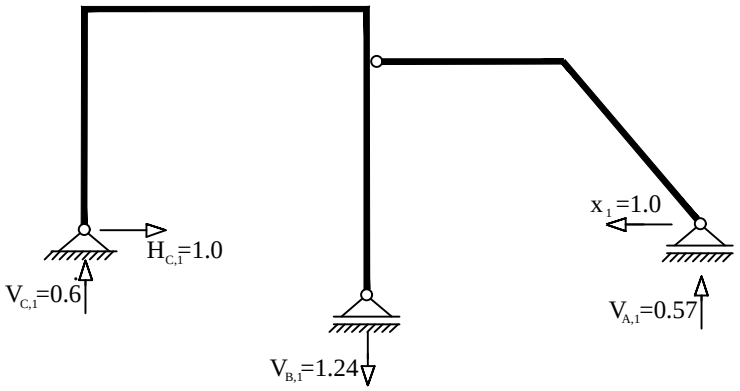
Redukovane dužine:

$$I_{60} = \frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12} = 0.0054\text{m}^4 = I_c$$
$$I_{30} = \frac{0.3 \cdot 0.3^3}{12} = 0.000675\text{m}^4$$

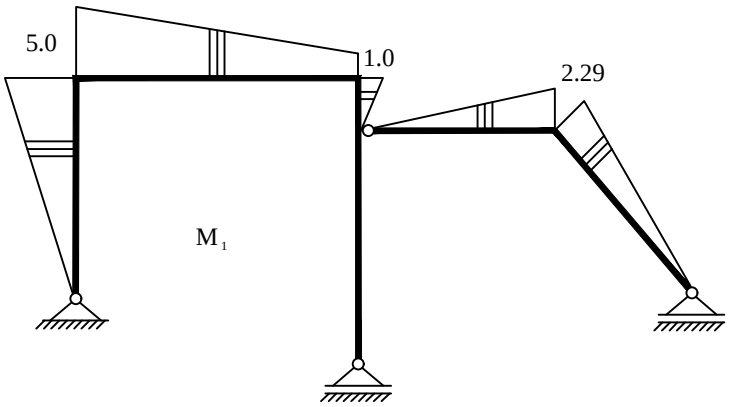
$$l_s\prime = \frac{I_c}{I_{30}} l_s = \frac{0.0054}{0.000675} \cdot 5 = 40.0\text{m}$$
$$l_r\prime = \frac{I_c}{I_{30}} l_r = \frac{0.0054}{0.000675} \cdot 4 = 32.0\text{m}$$



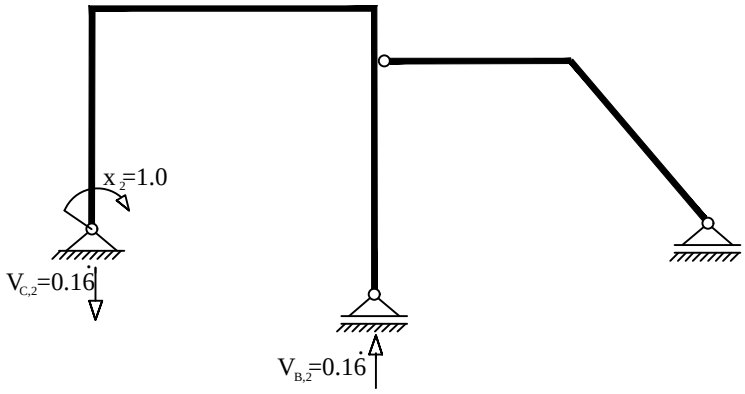
Stanje $x_1 = 1$



$$\sum M_g^{desno} = 0: \qquad V_{A,1} \cdot 7 - 1 \cdot 4.0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,1} = 0.57$$
$$\sum H = 0: \qquad H_{C,1} - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{C,1} = 1.0$$
$$\sum M_g^{levo} = 0: \qquad V_{C,1} \cdot 6 - H_{C,1} \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{C,1} = 0.\dot{6}$$
$$\sum V = 0: \qquad V_{A,1} - V_{B,1} + V_{C,1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,1} = 1.24$$



Stanje $x_2 = 1$

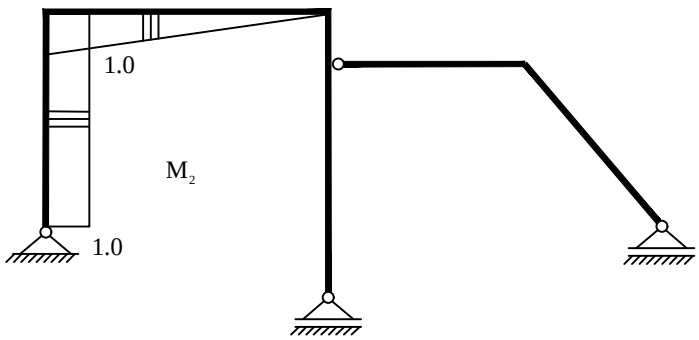


$$\sum M_g^{desno} = 0: \quad V_{A,2} \cdot 7 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{A,2} = 0.0$$

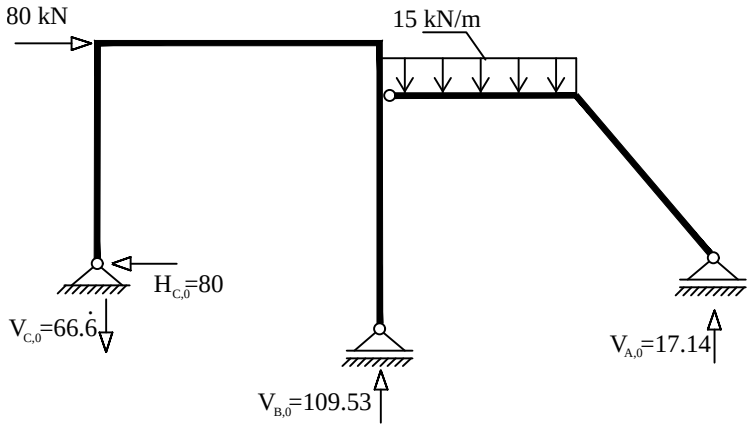
$$\sum H = 0: \quad H_{C,2} = 0 \quad \rightarrow \quad H_{C,2} = 0.0$$

$$\sum M_B = 0: \quad V_{C,2} \cdot 6 - 1.0 = 0 \quad \rightarrow \quad V_{C,2} = 0.16$$

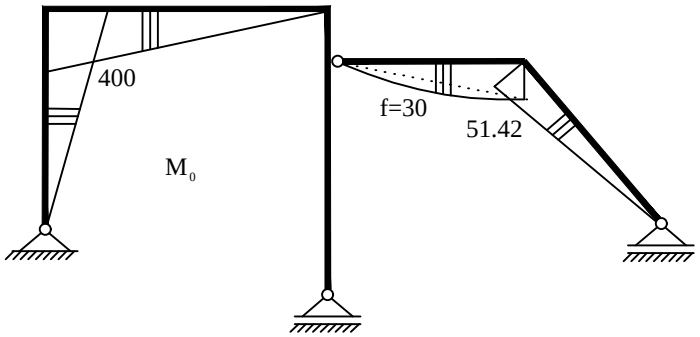
$$\sum V = 0: \quad V_{B,2} - V_{C,2} = 0 \quad \rightarrow \quad V_{B,2} = 0.16$$



Od osnovnog opterećenja



$$\sum M_g^{desno} = 0: \qquad V_{A,0} \cdot 7 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,0} = 17.14$$
$$\sum H = 0: \qquad H_{C,0} - 80 = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{C,0} = 80.0$$
$$\sum M_g^{levo} = 0: \qquad V_{C,0} \cdot 6 - 80 \cdot 1 - 80 \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{C,0} = 66.\dot{6}$$
$$\sum V = 0: \qquad V_{A,0} + V_{B,0} - V_{C,0} = 15 \cdot 4 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,2} = 109.53$$



Uslovne jednačine

$$EI_c\delta_{11} \cdot x_1 + EI_c\delta_{12} \cdot x_2 + EI_c\delta_{1\otimes} = 0$$
$$EI_c\delta_{21} \cdot x_1 + EI_c\delta_{22} \cdot x_2 + EI_c\delta_{2\otimes} = 0$$

Koeficijenti uz nepoznate

$$EI_c\delta_{11} = \int_s M_1^2 \cdot ds' = \frac{1}{3}2.29^2 \cdot (40 + 32) + \frac{1}{3}1^2 \cdot 1 + \frac{1}{3}5^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}(1^2 + 1 \cdot 5 + 5^2) \cdot 6 = 229.86$$
$$EI_c\delta_{22} = \int_s M_2^2 \cdot ds' = \frac{1}{3}1^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 5 = 7.0$$
$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \int_s M_1 \cdot M_2 \cdot ds' = -\frac{1}{6}1(2 \cdot 5 + 1) \cdot 6 - \frac{1}{2}5 \cdot 1 \cdot 5 = -23.5$$

Slobodni članovi

$$EI_c\delta_{10} = \int_s M_1 \cdot M_0 \cdot ds' = -\frac{1}{3}2.29 \cdot 51.42 \cdot (40 + 32) - \frac{1}{3}30 \cdot 2.29 \cdot 32 -$$
$$- \frac{1}{6}400(2 \cdot 5 + 1) \cdot 6 - \frac{1}{3}5 \cdot 400 \cdot 5 = -11292.18$$
$$EI_c\delta_{20} = \int_s M_2 \cdot M_0 \cdot ds' = \frac{1}{3}400 \cdot 1 \cdot 6 + \frac{1}{2}400 \cdot 1 \cdot 5 = 1800$$
$$EI_c\delta_{1c} = -EI_c \sum \overline{C}_i \cdot c_i = -3 \cdot 10^7 \cdot 0.0054 \cdot 1.24 \cdot 0.05 = -10044.0$$
$$EI_c\delta_{2c} = -EI_c \sum \overline{C}_i \cdot c_i = -3 \cdot 10^7 \cdot 0.0054 \cdot (-0.1\dot{6}) \cdot 0.05 = 1350.0$$
$$EI_c\delta_{1\otimes} = EI_c\delta_{10} + EI_c\delta_{1c} = -11292.18 - 10044.0 = -21336.18$$
$$EI_c\delta_{2\otimes} = EI_c\delta_{20} + EI_c\delta_{2c} = 1800 + 1350 = 3150.0$$

Uslovne jednačine

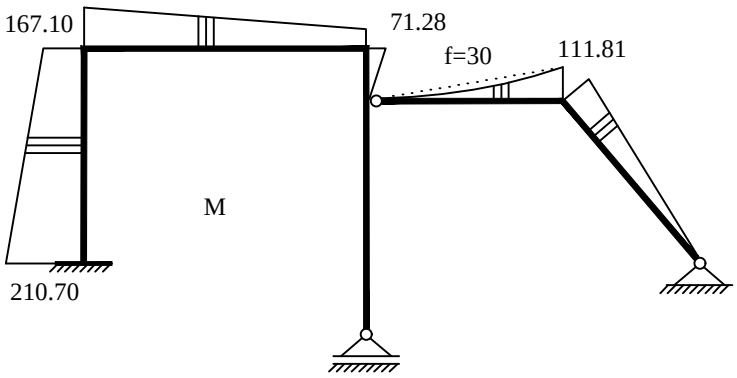
$$229.86 \cdot x_1 - 23.5 \cdot x_2 - 21336.18 = 0$$
$$-23.5 \cdot x_1 + 7.0 \cdot x_2 + 3150.0 = 0$$

Statički neodređene veličine

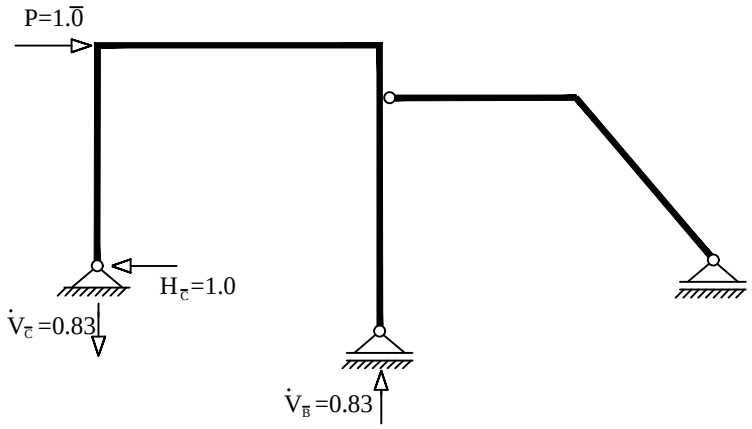
$$x_1 = 71.28$$
$$x_2 = -210.70$$

Dijagram momenata savijanja

$$M = M_0 + M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2$$

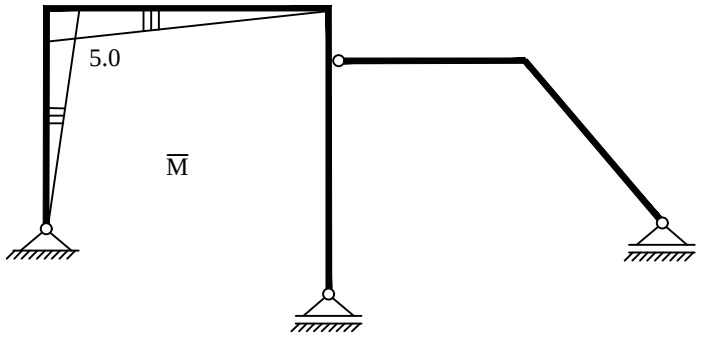


Pošto se traži horizontalno pomeranje čvora a, zadajemo jediničnu silu na mestu i u pravcu traženog pomeranja



$$\sum M_g^{levo} = 0: \qquad V_{\overline{A}} \cdot 7 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{\overline{A}} = 0$$
$$\sum H = 0: \qquad H_{\overline{C}} - 1.0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{\overline{C}} = 1.0$$
$$\sum M_g^{desno} = 0: \qquad V_{\overline{C}} \cdot 6 - 1.0 \cdot 1 - 1.0 \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{\overline{C}} = 0.8\dot{3}$$
$$\sum V = 0: \qquad V_{\overline{B}} - V_{\overline{C}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{\overline{B}} = 0.8\dot{3}$$

Dijagram momenata usled generalisane sile



Pomeranje čvora a

$$EI_c\delta_h = \int_s M \cdot \overline{M} ds\prime - EI_c \sum \overline{C}_i \cdot c_i = -\frac{1}{6}5(2 \cdot 167.10 + 71.28) \cdot 6 - \frac{1}{6}5(2 \cdot 167.10 + 210.70) \cdot 5 -$$
$$- 3.0 \cdot 10^7 0.0054(-0.8\dot{3}) \cdot 0.05 = 2425.18$$

$$\delta_h = \frac{2425.18}{EI_c} = \frac{2425.18}{162000} = 15.14 \quad \text{mm}$$

4. Uticajne linije i uticajne funkcije

Neka koncentisana sila intenziteta 1, tzv. jedinična sila, deluje u tački u. Uticaj Z koji ta sila izaziva na mestu s obeležavamo sa $Z(s,u)$, gde prvi indeks u zagradi određuje mesto uticaja a drugi mesto u kome jedinična sila deluje.

Kada se sila ne pomera $Z(s,u)$ je funkcija samo mesta na kome uticaj tražimo, a grafički prikaz te funkcije je dijagram uticaja u nosaču koji je opterećen jediničnom silom na mestu u.
Ako se jedinična sila pomera na nosaču a mesto na kome tražimo uticaj ostaje isto, $Z(s,u)$ je funkcija samo od u koju nazivamo uticajna funkcija za uticaj Z na mestu s. Grafički prikaz ove funkcije je uticajna linija za uticaj Z na mestu s.

4.1. Uticajne linije za pomeranja

Da bismo primenom principa virutalnih sila odredili generalisano pomeranje δ, za virtualno opterećenje nosača usvajamo odgovarajuću generalisanu silu. Ako su $\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{T}$ sile u presecima a $\bar{C}_j$ reakcije oslonaca i reakcije uklještenja jednog mogućeg ravnotežnog stanja nosača usled generalisane sile $\bar{P}=1$ tada je na osnovu principa virutalnih sila generalisano pomeranje opisano jednačinom:

$$\delta = \int_s \left(\bar{M}\kappa + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\varphi_t\right) ds - \sum \bar{C}_j c_j$$

Kada se jedinična sila kreće po nosaču čiji se materijal ponaša po Hukovom zakonu, deformacijske veličine κ, ε, φ_t su funkcije položaja pokretne sile i date izrazima:

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$
$$\varepsilon = \frac{N}{EF}$$
$$\varphi_T = k\frac{T}{GF}$$

Generalisano pomeranje na mestu s usled opterećenja nosača u tački u jediničnom pokretnom silom $P=1$ koje označavamo sa δ_{so} je sledeće:

$$\delta_{so} = \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_s \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \int_s k\frac{T\bar{T}}{GF} ds + \sum \bar{C}_j c_j$$

i predstavlja uticajnu funkciju za generalisano pomeranje δ.

Ako na pomeranje δ_{so} tj. generalisano pomeranje na mestu s usled opterećenja nosača jediničnom pokretnom silom primenimo teoremu o uzajamnosti pomeranja, zaključujemo da je ono jednako sa pomeranjem δ_{os} koje predstavlja pomeranje na mestu i u pravcu jedinične pokretne sile usled generalisane sile $\bar{P}=1$ koje deluje na mestu s.

Odnosno možemo zaključiti: Uticajna linija za pomeranje δ_{so} jednaka je dijagramu pomeranja δ_{os} opterećenog poteza štapova nosača u pravcu jedinične pokretne sile usled opterećenja nosača na mestu s jediničnom generalisanom silom.

Dijagram pomeranja δ_{os} određujemo na osnovu statičko-kinematičke analogije nosača kao dijagram fiktivnih momenta M^f jednog fiktivnog nosača sa pravom osom koja je upravna na pravac jedinične pokretne sile usled fiktivnog opterećenja, u kome granični i prelazni uslovi po fiktivnim silama odgovaraju graničnim i prelaznim uslovima po pomeranjima opterećenog poteza štapova datog nosača.

Fiktivne raspodeljene sile:

$$p^f = \frac{M}{EI\cos\alpha}$$

Fiktivni raspodeljeni momenti

$$m^f = \frac{N}{EF}\tan\alpha$$

4.2. Uticajne linije za statički neodređene veličine

Uslovna jednačina za određivanje statički neodređenih veličina

$$\sum_{k=1}^{n} X_k\delta_{ik} + \delta_{i0} = 0, \qquad i = 1, 2\ldots, n$$

Opšti oblik rešenja za statički neodređene veličine može se zapisati u funkciji slobodnih članova i elemenata $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ inverzne matrice uslovnih jednačina za statički neodređene veličine u obliku:

$$X_k = -\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}\delta_{i0} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Kada se na nosaču nalazi samo sila $P = 1$ slobodni članovi δ_{i0} predstavljaju generalisana pomeranja na mestima delovanja statički neodređenih veličina X_i u osnovnom sistemu datog statički neodređenog nosača usled sile $P = 1$.
Ako se sila $P = 1$ pomera po nosaču, δ_{i0} predstavlja uticajnu liniju koja je jednaka dijagramu pomeranja δ_{0i} opterećenog poteza štapova u osnovnom sistemu pri stanju statički neodređene $X_i = 1$.

Uticajne linije za statički neodređene veličine X_k dobijamo iz opšteg rešenja nakon što su određeni svi dijagrami pomeranja δ_{0i} odnosno sve uticajne linije za generalisana pomeranja δ_{i0} u obliku:

$$X_k = -\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}\delta_{0i}$$

4.3. Uticajne linije za reakcije i sile u presecima kod statički neodređnih nosača

Kada su poznate uticajne linije za statički neodređene veličine X_k uticajne linije za ostale statičke uticaje Z, za reakcije oslonaca, reakcije uklještenja i sile u presecima statički neodređenih nosača određujemo na osnovu principa superpozicije

$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k X_k$$

gde je

- Z_0 uticajna linija za uticaj Z u osnovnom sistemu
- Z_k vrednost uticaja Z u osnovnom sistemu pri stanju $X_k = 1$
- X_k uticajna linija za statički neodređenu veličinu X_k

4.4. Uticajne linije za pomeranja kod statički neodređnih nosača

Uticajne linije za pomeranja δ u statički neodređenim nosačima određujemo na osnovu principa superpozicije

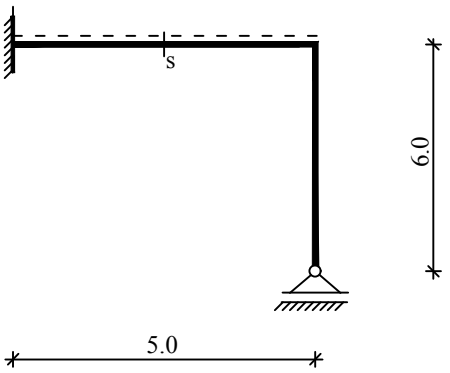
$$\delta = \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \delta_k X_k$$

gde je

- δ_0 uticajna linija za pomeranje δ u osnovnom sistemu
- δ_k vrednost pomeranja δ u osnovnom sistemu pri stanju $X_k = 1$
- X_k uticajna linija za statički neodređenu veličinu X_k

U prethodnom izrazu pored uticajne linije za pomeranje δ_0 u osnovnom sistemu treba posebno sračunavati pomeranja δ_k što nije slučaj sa statičkim uticajima Z_k. Stoga je ovaj postupak nepogodan za određivanje uticajnih linija za pomeranja u statički neodređenim nosačima.
Uticajne linije δ u statički neodređenim nosačima određujemo na osnovu principa virutalnih sila kada u izraze za fiktivno opterećenje unesemo stvarne vrednosti rekacija i sila u presecima u statički neodređenim nosačima usled delovanja jedinične generalisane sile.

Primer
Za nosač na skici nacrtati uticajnu liniju za moment savijanja u preseku s ako se jedinična pokretna sila kreće po označenom potezu štapova. Uticaj normalnih i transverzalnih sila se zanemaruje na deformaciju. $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2



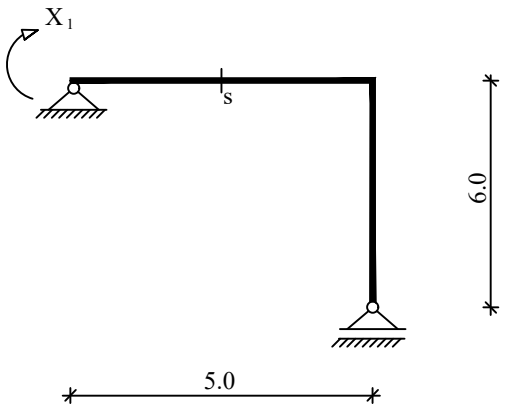
Statička neodređenost:

$$Z_o = 3$$
$$Z_u = 1$$
$$Z_s = 2$$
$$Z_k = 1$$
$$\sum Z = 8$$
$$n = \sum Z - 2K = 7 - 6 = 1$$

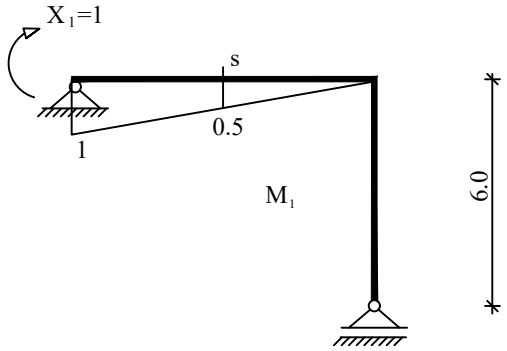
Da bismo nacrtali uticajnu liniju koristimo izraz:

$$M_s = M_{s0} + M_{s1}X_1$$

Potrebno je ukloniti jednu vezu pošto je nosač 1 puta statički neodređen. Odnosno potrebno je formirati osnovni sistem.



Proračun uticaja za stanje $X_1 = 1$



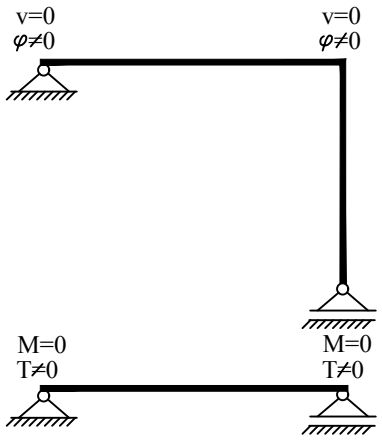
Vrednost momenta savijanja za stanje $X_1 = 1$ u preseku s je $M_{s1} = 0.5$
Da bismo odredili uticajnu liniju za statički neodređenu veličinu pišemo uslovnu jednačinu:

$$EI\delta_{11}X_1 + EI\delta_{10} = 0$$

Koeficijent uz nepoznatu:

$$EI\delta_{11} = \int_s M_1^2 ds = \frac{1}{3}1^2 \cdot 5 = 1.\dot{6}$$

Slobodan član ustvari predstavlja dijagram pomeranja poteza štapova po kom se kreće jedinična pokretna sila usled statički neodređene $X_1 = 1$
Formiranje fiktivnog nosača

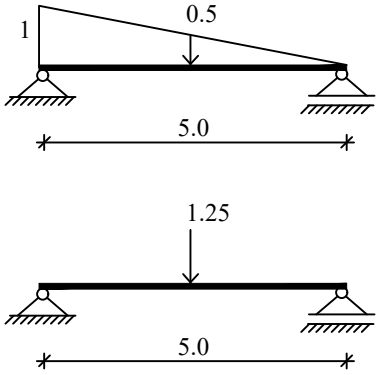


Opterećenje fiktivnog nosača

$$p^f = \frac{M}{EI}\frac{1}{\cos\alpha}$$

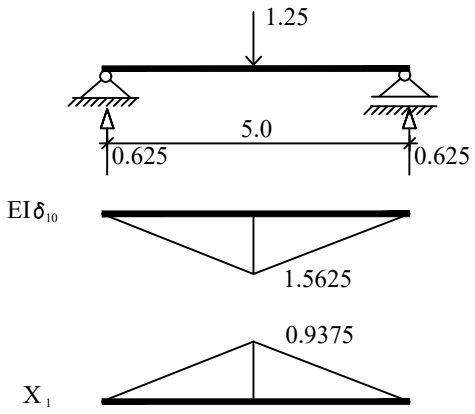
Elastična težina

$$W_1 = \frac{2.5}{6}\left(1 + 4 \cdot 0.5 + 0\right) = 1.25$$

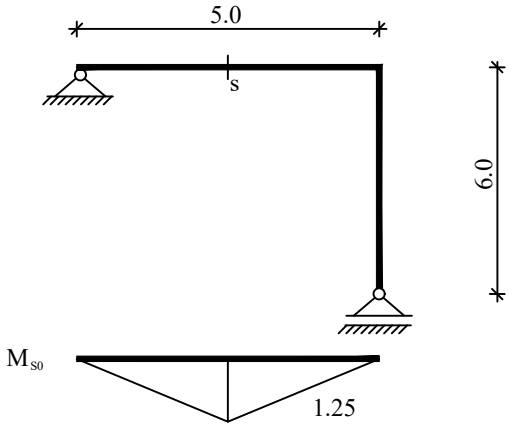


Dijagram momenata fiktivnog nosača usvari predstavlja dijagram pomeranja stvarnog nosača. Uticajnu liniju za statički neodređenu veličinu dobijamo iz uslovne jednačine odnosno

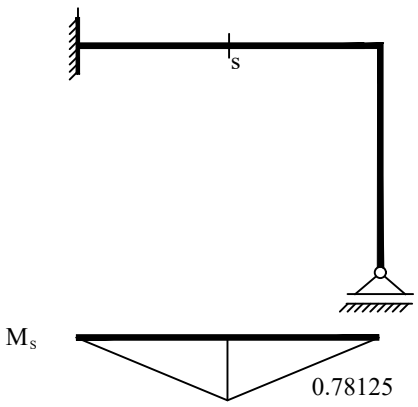
$$EI\delta_{11}X_1 + EI\delta_{10} = 0$$
$$X_1 = -\frac{EI\delta_{10}}{EI\delta_{11}} = -\frac{EI\delta_{10}}{1.\dot{6}}$$



Uticajna linija za moment savijanja u preseku s na osnovnom sistemu odnosno M_{S0}



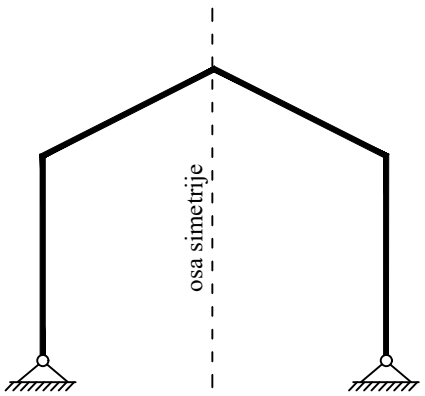
Uticajna linija za moment savijanja u preseku s na stvarnom nosaču $M_S = M_{s0} + M_{s1}X_1$


s
M_s
0.78125

5. Simetrični nosači

Nosač je simetričan ako su mu elementi simetrično raspoređeni u odnosu na jednu ili više osa simetrije i ako su mu karakteristike h, F i I simetrično položenih preseka međusobno jednake (slika 23). Simetrija nosača se može iskoristiti kako bi se proračun tih nosača uprostio. Pored toga što je nosač simetričan potrebno je voditi računa i o opterećenju koje deluje na njega. Bilo koje opterećenje na simetričnom nosaču može se prikazati kao zbir dva uticaja. Jedan uticaj nastaje usled opterećenja koje je simetrično u odnosu na osu simetrije a drugi nastaje za slučaj antimetričnog opterećenja. To je opterećenje koje je u odnosu na osu simetrije postavljeno kao slika u ogledalu ali sa suprotnim znakom. Proračun možemo uprostiti na način što posmatramo samo jednu stranu nosača, ali da bismo to uradili potrebno je da znamo veze između sila u simetrično postavljenim presecima kao i granične uslove koje treba postaviti u osi simetrije pri simetričnom i antimetričnom opterećenju.

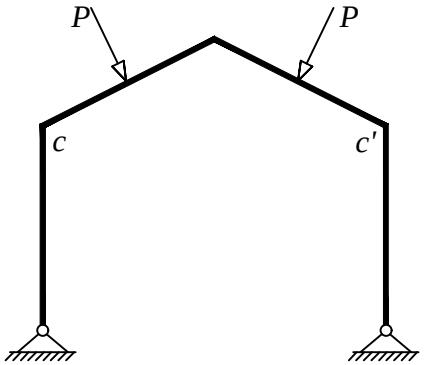
.



Slika 23. : *Simetričan nosač*

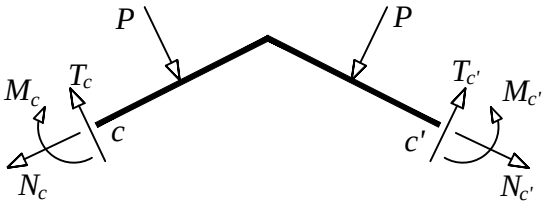
5.1. Simetrično opterećenje

Ako simetričan nosač opteretimo simetričnim opterećenjem, tj. ako je opterećenje nosača sa jedne strane ose simetrije slika u ogledalu opterećenja nosača sa druge strane te ose, tada su i uticaji u nosaču sa jedne strane ose simetrije slika u ogledalu uticaja sa druge strane te ose.



Slika 24. : *Simetrično opterećenje*

Iz ovako opterećenog nosača isečemo deo između dva simetrično položena preseka c i c':



Slika 25.

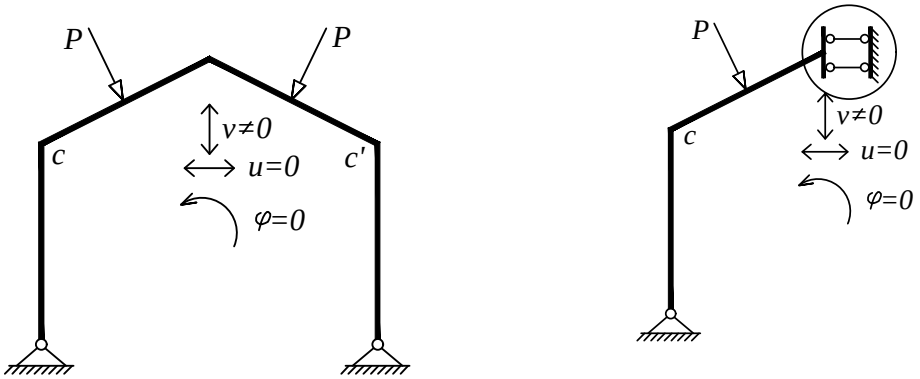
Sile u preseku c' su slika u ogledalu sila u preseku c. Normalna sila N_c' i moment M_c' jednaki su normalnoj sili N_c i momentu M_c i po veličini i po znaku, dok je transverzalna sila T_c' po veličini jednaka transverzalnoj sili T_c a suprotnoga znaka. Zbog toga za normalne sile i momente savijanja simetričnih nosača kažemo da su simetrični uticaji, a za transverzalnu silu kažemo da je antimetričan uticaj. To bi značilo da ako znamo sile u presecima na jednoj polovini nosača, presečne sile na drugoj strani nosača crtamo tako da su dijagrami normalnih sila i momenata isti i po znaku i po vrednostima, dok je dijagram transverzalnih sila isti po vrednostima ali suprotan po znaku. Prema tome, takav nosač može da se preseče duž ose simetrije i da se pri proračunu posmatra samo jedna polovina nosača. Pri tome posmatrani deo u osi simetrije treba osloniti tako da na tom mestu uslovi i po silama i po pomeranjima budu isti kao u datom nosaču. U osi simetrije ovakvog nosača horizontalna sila je različita od nule, vertikalna sila je jednaka nuli, dok je moment savijanja različit od nule:

$$H \neq 0 \qquad V = 0 \qquad M \neq 0 \tag{5..1}$$

Ako bismo posmatrali pomeranja u osi simetrije, možemo zaključiti da usled opterećenja koje je simetrično neće doći do horizontalnih pomeranja, dok će vertikalno pomeranje i obrtanje biti različito od nule:

$$u = 0 \qquad v \neq 0 \qquad \varphi = 0 \tag{5..2}$$

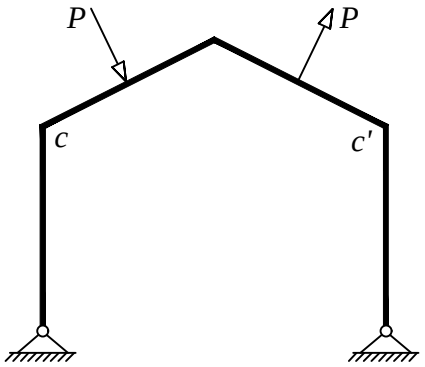
Ovi uslovi biće zadovoljeni ako posmatrani deo u osi simetrije uklještimo i oslonimo upravno na pravac ose simetrije. Ova veza može da primi moment i silu upravnu na osu simetrije, a ne može da primi silu u pravcu ose simetrije. Ona sprečava obrtanja preseka u osi simetrije i pomeranje upravno na tu osu, a dozvoljava pomeranje u pravcu ose simetrije (slika 26)



Slika 26. : *Uslovi oslanjanja u osi simterije*

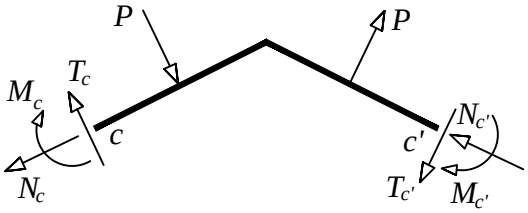
5.2. Antimetrično opterećenje

Ako simetričan nosač opteretimo antimetričnim opterećenjem, tj. ako je opterećenje sa jedne strane ose simetrije slika u ogledalu opterećenja sa druge strane te ose sa promenjenim smerom, tada su i uticaji u nosaču sa jedne strane ose simetrije slika u ogledalu uticaja sa druge strane te ose sa promenjenim smerom.



Slika 27. : *Antimetrično opterećenje*

Iz ovako opterećenog nosača isečemo deo između dva simetrično položena preseka c i c':



Slika 28.

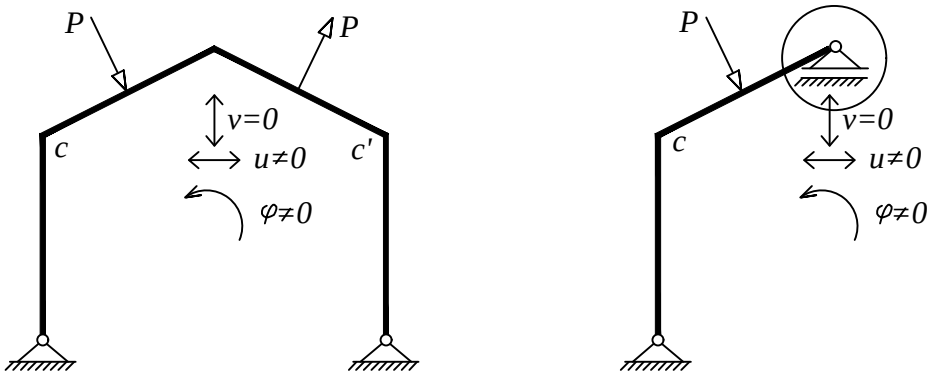
Sile u preseku c' su tada antimetrična slika u ogledalu sila u preseku c. Transverzalna sila T_c' jednaka je u ovom slučaju transverzalnoj sili T_c i po veličini i po znaku, dok su normalna sila N_c' moment savijanja M_c' jednaki normalnoj sili N_c i momentu M_c samo po veličini, a suprotnoga su znaka. Poprečni preseci u osi simetrije simetričnog nosača pri antimetričnom opterećenju obrću se i pomeraju samo upravno na osu simetrije, a ne pomeraju se u pravcu ose simetrije.

$$u \neq 0 \qquad v = 0 \qquad \varphi \neq 0 \tag{5..3}$$

Na osnovu ovoga što je rečeno o uticaju antimetričnog opterećenja sledi da simetričan nosač i pri antimetričnom opterećenju može da se preseče duž ose simetrije i posmatra samo jedna njegova polovina. Pri tome posmatrani deo nosača u osi simetrije treba osloniti tako da na tom mestu bude:

$$H = 0 \qquad V \neq 0 \qquad M = 0 \tag{5..4}$$

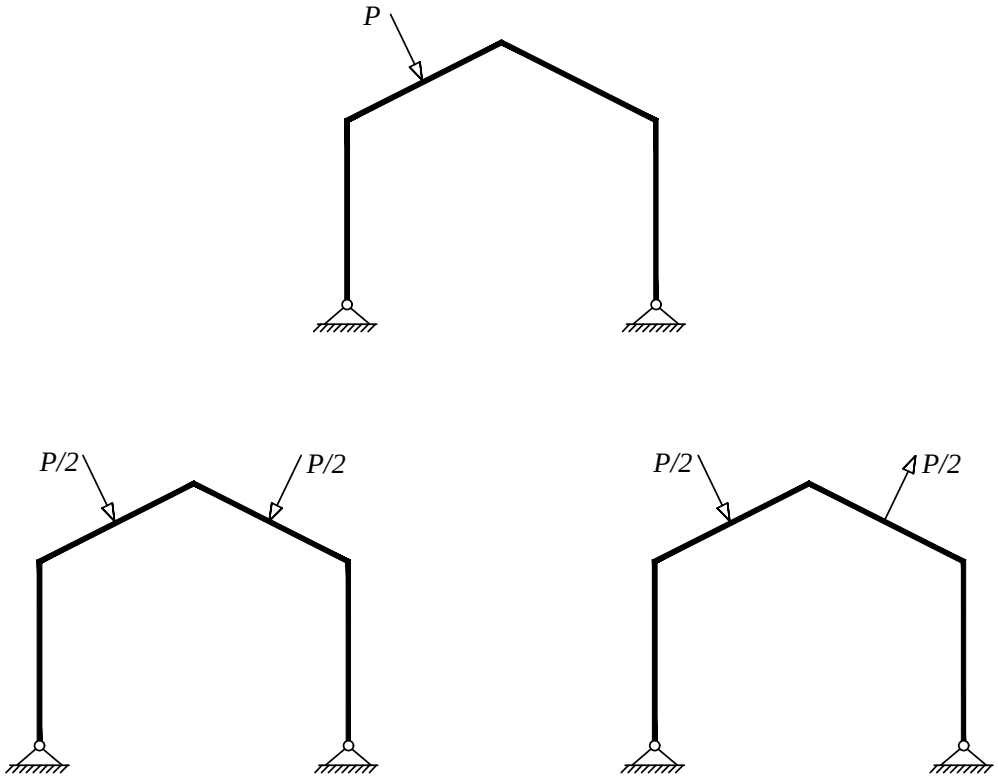
Ovi uslovi biće zadovoljeni ako posmatrani deo u osi simetrije oslonimo na jedan oslonac u pravcu ose simetrije. Ovaj oslonac može da primi silu u pravcu ose simetrije, a ne može da primi silu upravnu na osu simetrije i moment savijanja. Ona sprečava pomeranja u pravcu ose simetrije, a dozvoljava pomeranja upravno na taj pravac i obrtanje preseka.



Slika 29. : *Uslovi oslanjanja u osi simetrije*

5.3. Kombinacija simetričnog i antimetričnog opterećenja

Simetrično i antimetrično opterećenje su dva osnovna oblika opterećenja simetričnog nosača, jer proizvoljno opterećenje takvog nosača uvek može da se prikaže kao zbir jednog simetričnog i jednog antimetričnog opterećenja. Na osnovu Principa superpozicije uticaj proizvoljnog opterećenja jednak je zbiru uticaja simetričnog i antimetričnog dela tog opterećenja.



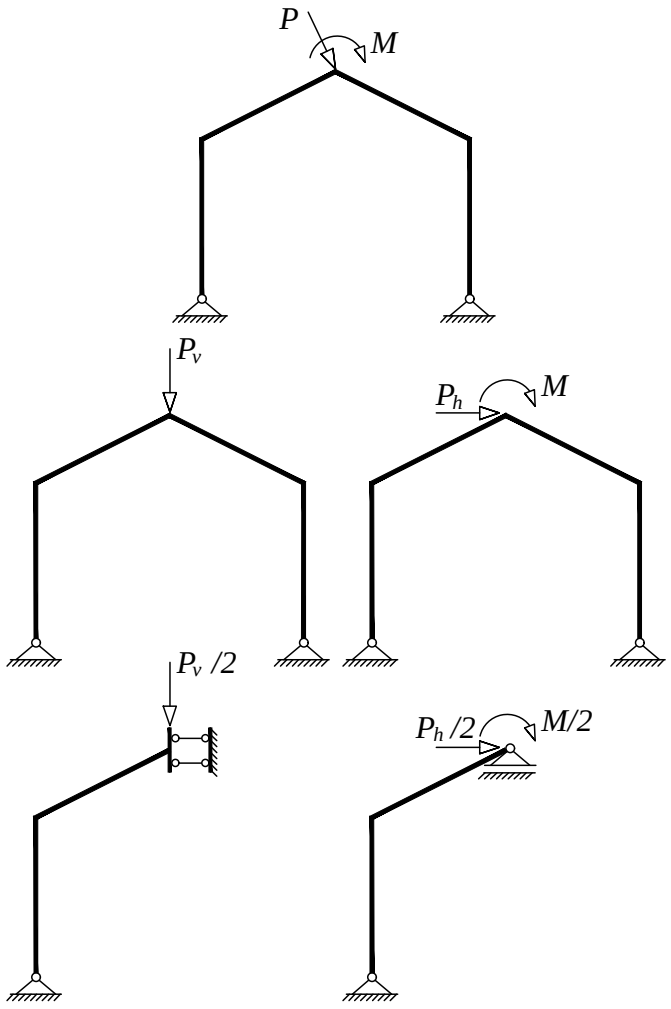
Slika 30.

5.4. Opterećenje u osi simetrije

Proizvoljno opterećenje nosača u osi simetrije, koje se sastoji od sile P, može da se razloži na simetrično i antimetrično opterećenje kao i u prethodnom slučaju. Ta opterećenja prikazana su na slici 31. Simetrično položene sile na koje dejstvuju u istoj tački, u osi simetrije, mogu da se zamene rezultantom P_v koja je jednaka komponenti sile P u pravcu ose simetrije, a antimetrično položene sile mogu da se zamene rezultantom P_h, koja je jednaka komponenti sile P u pravcu upravnom na osu simetrije. Prema tome opterećenje simetričnog nosača koncentrisanom silom u osi simetrije u pravcu te ose je čisto simetrično opterećenje, a opterećenje koncentrisanom silom u osi simetrije upravno na pravac te ose je čisto antimetrično opterećenje.

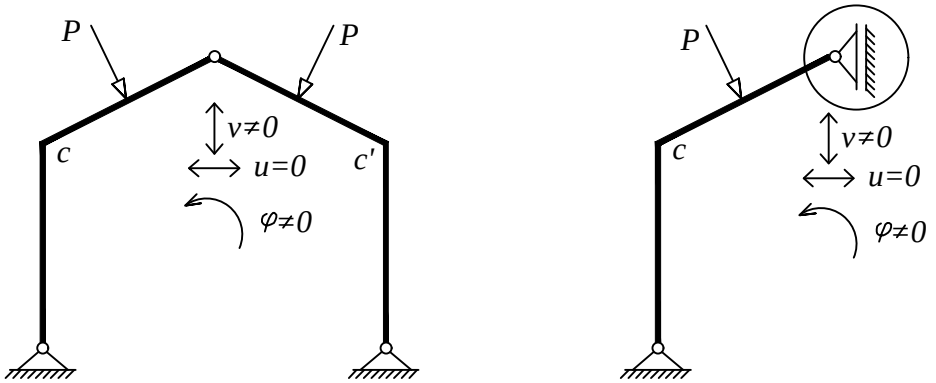
Opterećenje koncentrisanim momentom u osi simetrije, može da se zameni statički ekvivalentnim opterećenjem, spregom sila. S obzirom da je to antimetrično opterećenje, to je i njemu ekvivalentno opterećenje koncentrisanim momentom u osi simetrije čisto antimetrično opterećenje.

Prema tome: za nosač opterećen u osi simetrije silom P i momentom M, simetrični deo opterećenja je sila P_v, a antimetrični deo je sila P_h i moment M. U proračunu, kada posmatramo polovinu nosača, nosač koji odgovara simetričnoj deformaciji treba opteretiti u osi simetrije $P_v/2$, a nosač koji odgovara antimetričnoj deformaciji treba opteretiti silom $P_h/2$ i momentom $M/2$.



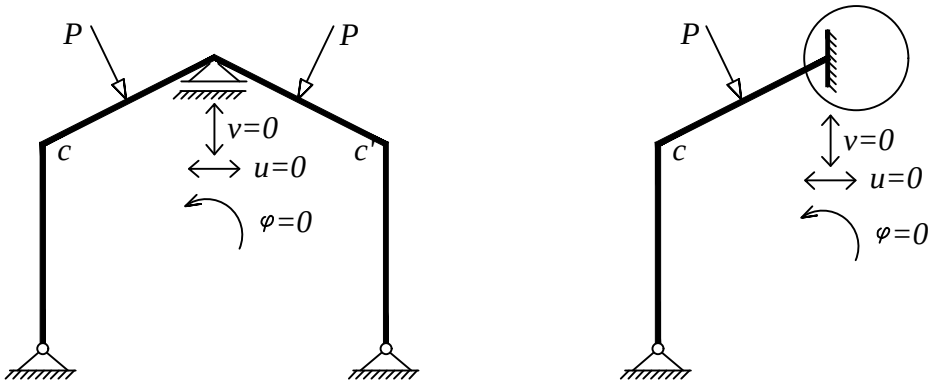
Slika 31.

5.5. Uslovi oslanjanja u osi simetrije - simetrično opterećenje (zglob u osi simetrije)



Slika 32.

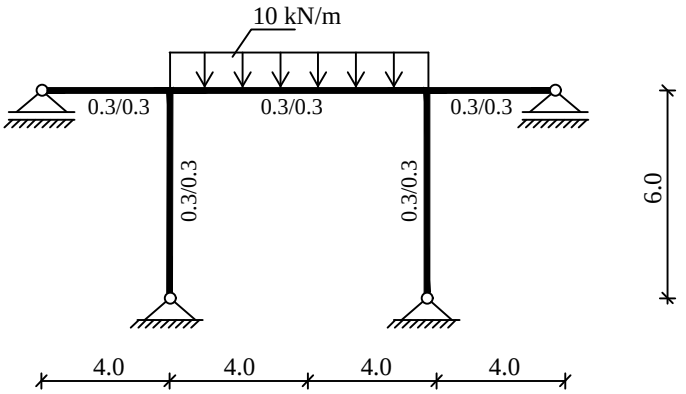
5.6. Uslovi oslanjanja u osi simetrije - simetrično opterećenje (oslonac u osi simetrije)



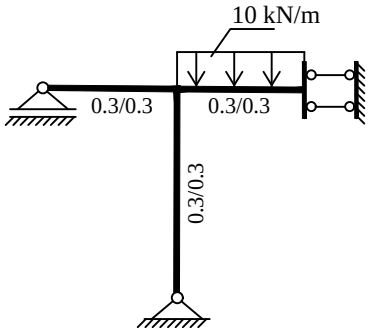
Slika 33.

5.7. Zadatak

Za nosač na skici odrediti i nacrtati MTN dijagrame usled delovanja spoljašnjeg opterećenja. Uticaj normalnih sila zanemariti na deformaciju. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2.



Nosač je simetričan pa možemo posmatrati samo jednu polovinu nosača i na kraju dobijene uticaje preslikati na drugu polovinu. U zavisnosti od opterećenja određujemo i uslove oslanjanja u osi simetrije. Ako pogledamo, videćemo da je i opterećenje simetrično. Ako bismo posmatrali koja su pomeranja moguća u osi simetrije vidimo da će se čvor pomerati u vertikalnom pravcu, pošto je veza kruta u osi simetrije obrtanje je jednako nuli. Pored ortanja, sprečeno je i horizontalno pomeranje. Znači da nam je u osi simetrije potreban oslonac koji će sprečiti obrtanje i horizontalno pomeranje.



Statička neodređenost:

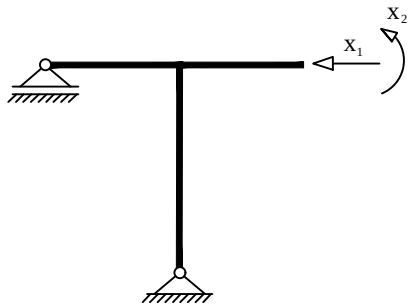
$$n = \sum Z - 2K$$

ukupan broj nepoznatih	ukupan broj jednačina
$Z_o = 4$	
$Z_u = 1$	
$Z_s = 3$	
$Z_k = 2$	
$\sum Z = 10$	$2K = 2 \cdot 4 = 8$

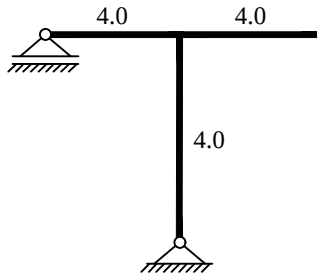
$$n = \sum Z - 2K = 10 - 8 = 2$$

Nosač je 2 puta statički neodređen.

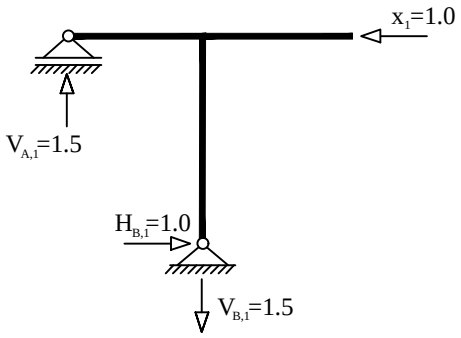
Osnovni sistem



Redukovane dužine
Poprečni preseci svih štapova su istih dimezija, te se ne vrši redukcija dužina, odnosno dužine štapova su jednake zadatim dužinama.



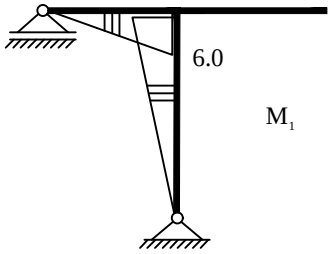
Stanje $x_1 = 1$



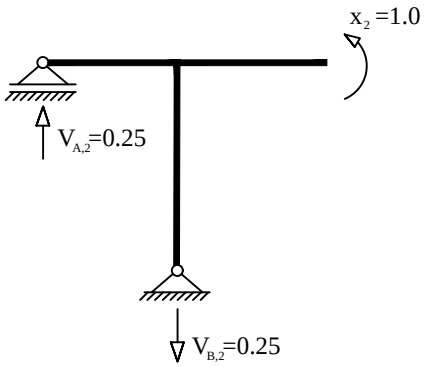
$$\sum H = 0: \qquad H_{B,1} - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{B,1} = 1.0$$

$$\sum M_A = 0: \qquad V_{B,1} \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,1} = 1.5$$

$$\sum V = 0: \qquad V_{A,1} - V_{B,1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,1} = 1.5$$



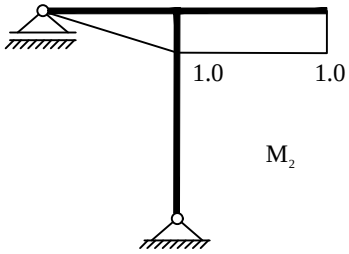
Stanje $x_2 = 1$



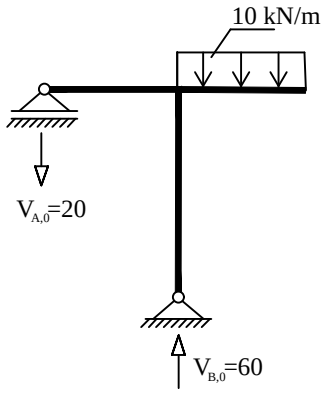
$$\sum H = 0: \qquad H_{B,2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{B,2} = 0$$

$$\sum M_A = 0: \qquad V_{B,2} \cdot 4 - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,2} = 0.25$$

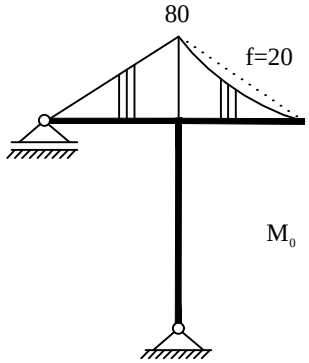
$$\sum V = 0: \qquad V_{A,2} - V_{B,2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,2} = 0.25$$



Od spoljašnjeg opterećenja



$$\sum H = 0: \qquad H_{B,0} = 0 \qquad \rightarrow \qquad H_{B,0} = 0$$
$$\sum M_A = 0: \qquad V_{B,0} \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{B,0} = 60$$
$$\sum V = 0: \qquad V_{A,0} - V_{B,0} + 10 \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{A,0} = 20$$



Uslovne jednačine

$$EI_c\delta_{11} \cdot x_1 + EI_c\delta_{12} \cdot x_2 + EI_c\delta_{10} = 0$$
$$EI_c\delta_{21} \cdot x_1 + EI_c\delta_{22} \cdot x_2 + EI_c\delta_{20} = 0$$

Koeficijenti uz nepoznate

$$EI_c\delta_{11} = \int_s M_1^2 \cdot ds' = \frac{1}{3}6^2 \cdot 4 + \frac{1}{3}6^2 \cdot 6 = 120$$
$$EI_c\delta_{22} = \int_s M_2^2 \cdot ds' = \frac{1}{3}1^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 4 = 5.\dot{3}$$
$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \int_s M_1 \cdot M_2 \cdot ds' = \frac{1}{3}1 \cdot 6 \cdot 4 = 8.0$$

Slobodni članovi

$$EI_c\delta_{10} = \int_s M_1 \cdot M_0 \cdot ds' = -\frac{1}{3}80 \cdot 6 \cdot 4 = -640$$
$$EI_c\delta_{20} = \int_s M_2 \cdot M_0 \cdot ds' = -\frac{1}{3}1 \cdot 80 \cdot 4 - \frac{1}{2}1 \cdot 80 \cdot 4 + \frac{2}{3}1 \cdot 20 \cdot 4 = -213.\dot{3}$$

Uslovne jednačine

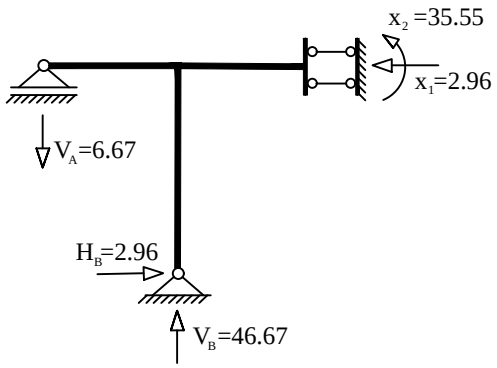
$$120 \cdot x_1 + 8.0 \cdot x_2 - 640 = 0$$
$$8.0 \cdot x_1 + 5.\dot{3} \cdot x_2 - 213.\dot{3} = 0$$

Statički neodređene veličine

$$x_1 = 2.99$$
$$x_2 = 35.65$$

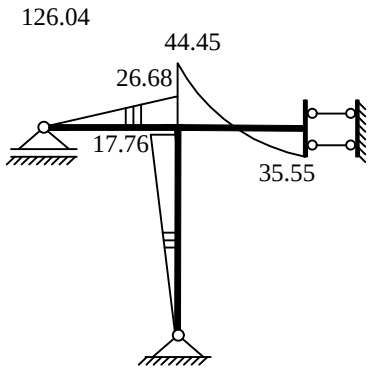
Reakcije oslonaca

$$R = R_1 \cdot x_1 + R_2 \cdot x_2$$

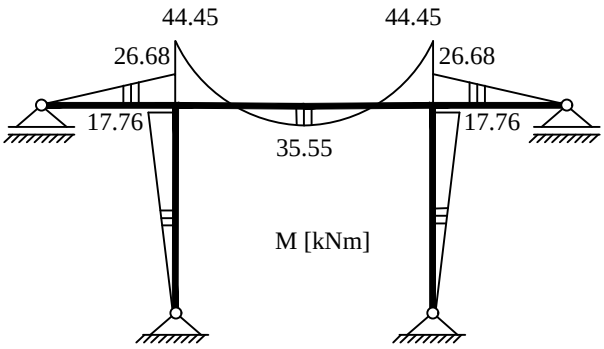


Dijagram momenata savijanja

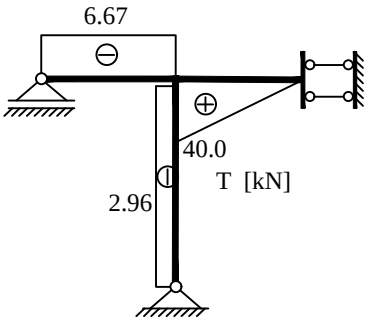
$$M = M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2$$



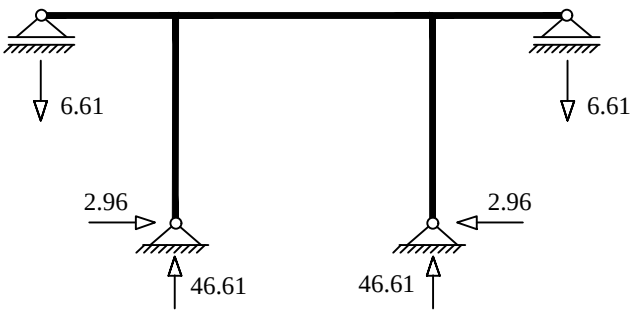
Za moment savijanja smo rekli da je to simetričan uticaj što znači da su vrednosti sa jedne strane jednake vrednostima sa druge strane ose simetrije, istog znaka.

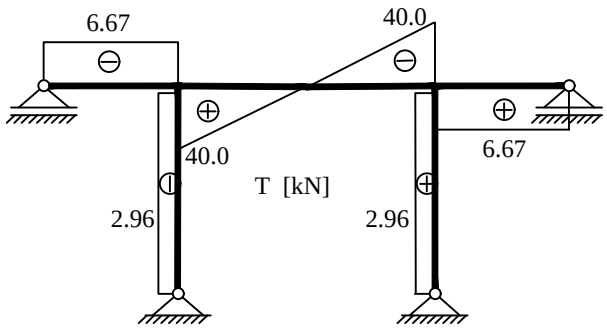


Dijagram transverzalnih sila

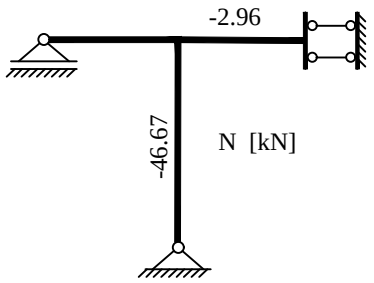


Ako bismo pogledali reakcije na celom nosaču, videli bismo da su one slika u ogledalu, ali da za transverzalne sile to znači da će one sa jedne i druge strane ose simetrije biti istog intenziteta ali suprotnog smera (zbog konvencije o pozitivnim vrednostima)

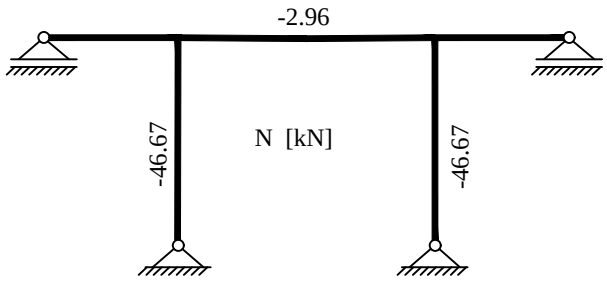




Dijagram normalnih sila



Dijagram normalnih sila je slika u ogledalu u odnosu na osu simetrije. Sile su iste i po intenzitetu i po znaku.



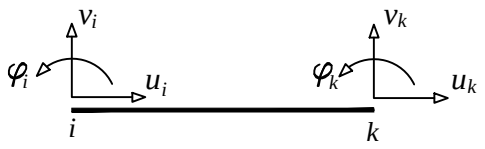
6. Matrična analiza

Matrična analiza konstrukcija je postupak analize linijskih nosača zasnovan na primeni matrica, gde je štap osnovni element nosača. Za razliku od klasične statike konstrukcija gde posmatramo nosač u celini, u matričnoj analizi konstrukcija nosač se posmatra kao skup međusobno povezanih štapova u čvorovima nosača. Za nepoznate veličine biraju se parametri (pomeranja ili sile) u čvorovima nosača, zatim se na osnovu linearne teorije štapa uspostavljaju veze između vektora sila i vektora pomeranja krajeva štapa u matričnom obliku. Formiraju se jednačine za određivanje nepoznatih, određuju nepoznate veličine i sile u presecima nosača.

Za nepoznate parametre u čvorovima nosača mogu se izabrati:

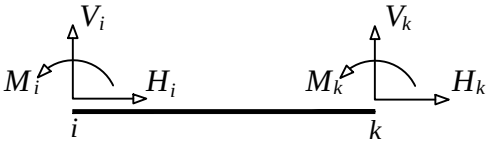
- generalisana pomeranja u i v i obrtanje φ čvorova nosača
- sile u čvorovima nosača u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema H, V, M

Ako se za nepoznate parametre izaberu generalisana pomeranja u čvorovima onda se postupak naziva metoda deformacije (direct stiffness method).



Slika 34.

Ako se za nepoznate parametre usvoje sile u čvorovima nosača, onda se taj postupak analize zove metoda sila.



Slika 35.

U matričnoj analizi linijskih nosača dominantna je metoda deformacije, dok se metoda sila praktično ne koristi.

U matričnoj analizi postoje dva nivoa analize:

- Analiza štapa
- Analiza strukture štapova

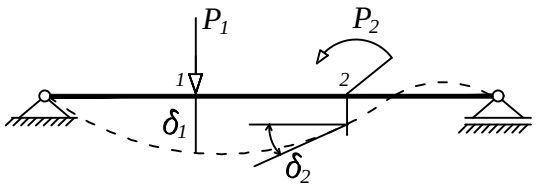
Kada govorimo o analizi štapa, znači da posmatramo štap kao izdvojeni element iz sistema i za njega je potrebno uspostaviti veze između sila i pomeranja u čvorovima na krajevima štapa. Kada su uspostavljene veze za svaki štap pojedinačno koji čini sistem, prelazi se na analizu strukture štapova. Tada posmatramo nosač u celini kao sistem međusobno povezanih štapova za koji je potrebno formirati jednačine za određivanje nepoznatih pomeranja (uslovne jednačine) nosača. Kada su određena nepoznata pomeranja tada je na osnovu jednačina iz analize štapa moguće odrediti sile na krajevima svakog pojedinačnog štapa. Sa tim je problem u matričnoj analizi rešen.

6.1. Matrica krutosti i matrica fleksibilnosti

Da bismo razumeli postupak proračuna u matričnoj analizi potrebno je da za početak definišemo osnovne pojmove:

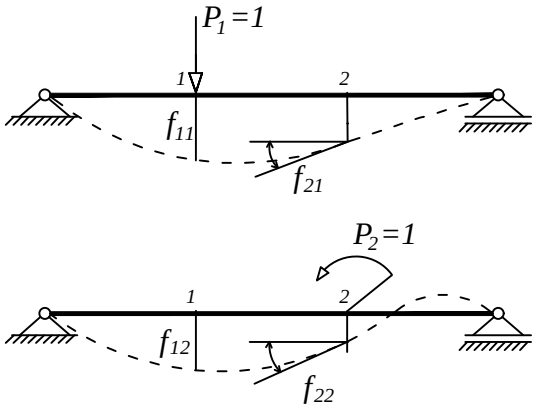
- matrica fleksibilnosti
- matrica krutosti

Posmatra se nosač opterećen koncentrisanom silom P_1 u tački 1 i koncentrisanim momentom P_2 u tački 2. Pomeranja δ_1 i δ_2 u tačkama dejstva ovih sila predstavljaju ukupno vertikalno pomeranje i obrtanje preseka 1 i 2 (slika 36)

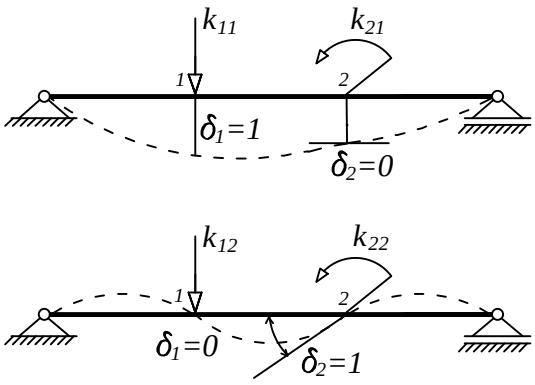


Slika 36.

Da bi bilo jednostavnije razumeti posmatraćemo odvojeno dve proste grede opterećene, u prvom slučaju sa jediničnom silom u čvoru 1 odnosno sa jediničnim momentom u čvoru 2 (slika 37). U drugom slučaju posmatramo dve proste grede opterećene sa jediničnim pomeranjem u čvoru 1 i jediničnim obrtanjem u čvoru 2 (slika 38).



Slika 37.



Slika 38.

Tada se veza između pomeranja δ_i, $i = 1, 2$ i sila P_i, $i = 1, 2$ može prikazati u sledećem vidu

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{6..1}$$

Koeficijenti f_{ij}, $i, j = 1, 2$ nazivaju se koeficijenti fleksibilnosti nosača, koji odgovaraju silama P_1 i P_2 .

Geometrijsko značenje koeficijenata fleksibilnosti je prikazano na skici. Koeficijenti f_{11} i f_{21} predstavljaju vertikalno pomeranje u tački 1 i obrtanje u tački 2 usled dejsta sile $P_1 = 1$ dok

koeficijenti f_{12} i f_{22} predstavljaju vertikalno pomeranje u tački 1 i obrtanje u tački 2 usled dejstva momenta.

Umesto veza između pomeranja i sila na sličan način se mogu prikazati veze između sila i pomeranja:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \tag{6..2}$$

Koeficijenti k_{ij}, $i, j = 1, 2$ se nazivaju koeficijenti krutosti nosača, koji odgovaraju pomeranjima δ_1 i δ_2 . Fizičko značenje koeficijenata krutosti je prikazano na skici.

Koeficijenti k_{11} i k_{21} predstavljaju silu u tački 1 i moment u tački 2 usled pomeranja $\delta_1 = 1$ dok koeficijenti k_{12} i k_{22} predstavljaju silu u tački 1 i moment u tački 2 usled usled obrtanja.

Veza između pomeranja i sila odnosno sila i pomeranja date prethodnim izrazima prikazane su za jednostavan primer proste grede ali mogu da se uopšte za proizvoljan nosač na koji deluje proizvoljno zadati sistem sila.

Za opšti slučaj može se zapisati sledeća relacija:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1j} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{i1} & \dots & f_{ij} & \dots & f_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nj} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \tag{6..3}$$

Odnosno:

$$\mathbf{q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \tag{6..4}$$

gde je $\mathbf{F}$ matrica fleksibilnosti.

Na sličan način se mogu prikazati i obrnute zavisnosti, između sila i pomeranja:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & fk_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{6..5}$$

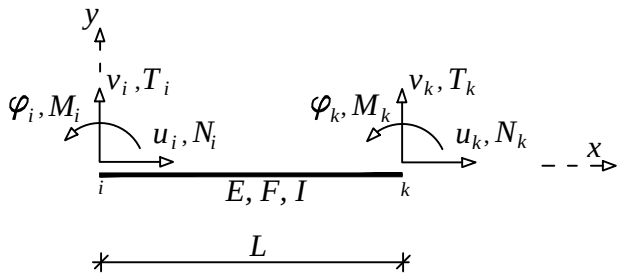
Odnosno

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \tag{6..6}$$

gde je $\mathbf{K}$ matrica krutosti.

6.2. Analiza štapa

Rekli smo da prvi nivo analize jeste analiza štapa i ona treba da uspostavi vezu izmedju pomeranja i sila na krajevima štapa. Posmatraćemo prav prizmatičan štap proizvoljnog poprečnog preseka, dužine L (slika 39). Na krajevima štapa su čvorovi koji su označeni sa i i k. U čvoru i postavljen je koordinatni sistem tako da se osa x poklapa sa osom štapa. Takav koordinatni sistem nazivamo lokalni koordinatni sistem.



Slika 39.

6.2.1. Vektor sila i vektor pomeranja

Osnovne kinematičke veličine štapa su: generalisana pomeranja tj. pomeranja u i v u pravcu x i y ose i obrtanje φ. Za generalisana pomeranja u čvorovima upotrebljavaju se još i nazivi parametri pomeranja i stepeni slobode.

Broj stepeni slobode u čvoru je jednak broju generalisanih pomeranja u čvoru, a broj stepeni slobode štapa je jednak zbiru stepeni slobode u čvorovima.
Parametri pomeranja u čvorovima i i k mogu da se prikažu kao komponente vektora $\mathbf{q}_i$ i $\mathbf{q_k}$ tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_i^T &= [u_i, v_i, \varphi_i] \\ \mathbf{q}_k^T &= [u_k, v_k, \varphi_i]\end{aligned} \tag{6..7}$$

a parametri pomeranja štapa kao komponente vektora $\mathbf{q}$ kojeg nazivamo *vektor pomeranja*:

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_i^T, \mathbf{q}_k^T] = [q_1, q_2, q_3, ..., q_n] \tag{6..8}$$

gde je n ukupan broj stepeni slobode štapa.

Osnovne statičke veličine u čvorovima štapa koje odgovaraju generalisanim pomeranjima su generalisane sile N i T i moment M.

Generalisane sile u čvorovima i i k mogu se prikazati kao komponente vektora $\mathbf{R}_i$ i $\mathbf{R_k}$ tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_i^T &= [N_i, T_i, M_i] \\ \mathbf{R}_k^T &= [N_k, T_k, M_k]\end{aligned} \tag{6..9}$$

a generalisane sile štapa kao komponente vektora R kojeg nazivamo *vektor sila*:

$$\mathbf{R}^T = [\mathbf{R}_i^T, \mathbf{R}_k^T] = [R_1, R_2, R_3, ..., R_n] \tag{6..10}$$

6.2.2. Matrica krutosti štapa

Matrica **K** pomoću koje se uspostavlja neposredna veza između generalisanih sila i generalisanih pomeranja na krajevima štapa naziva se *matrica krutosti štapa.*

Veza između generalisanih sila **R** i generalisanih pomeranja **q** je:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \tag{6..11}$$

odnosno:

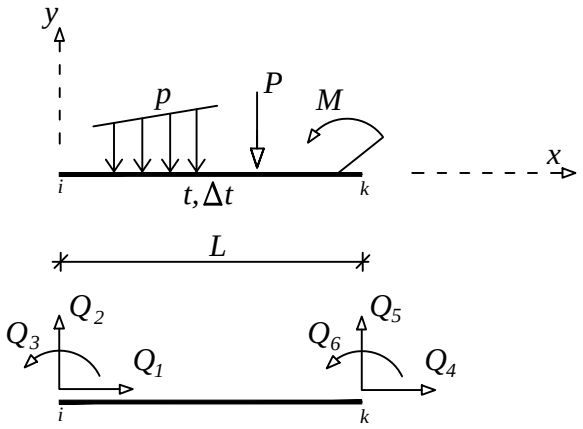
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{6..12}$$

Ona je kvadratna matrica reda n, gde je n broj stepeni slobode štapa. Ona je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu što je posledica Maxwell-ovog stava o uzajamnosti pomeranja.

Element k_{ij} matrice krutosti **k** jednak je generalisanoj sili R_i koja nastaje usled generalisanog pomeranja $q_j = 1$, pri čemu su ostala pomeranja jednaka nuli.

6.2.3. Vektor ekvivalentnog opterećenja

Kao što je već rečeno, u matričnoj analizi sve nepoznate svodimo na nepoznate u čvorovima. Iz tog razloga je neophodno da se spoljašnji uticaji koji deluju duž pojedinih štapova zamene koncentrisanim opterećenjem u čvorovima, odnosno na krajevima štapova. Koncentrisano opterećenje na krajevima štapa kojim se zamenjuju spoljašnji uticaji koji deluju duž ose štapa naziva se ekvivalentno opterećenje. Kao spoljašnji uticaji mogu da deluju podeljena i koncentrisana opterećenja kao i temperaturni uticaji.



Slika 40.

Komponente ekvivalentnog opterećenja su pozitivne ako su orijentisane u smeru odgovarajuće koordinatne ose.

Komponente ekvivalnetnog opterećenja u čvorovima i i k mogu se prikazati kao komponente vektora $\mathbf{Q}_i$ i $\mathbf{Q}_k$ tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_i^T &= -[N_i, T_i, M_i,] \\ \mathbf{Q}_k^T &= -[N_k, T_k, M_k]\end{aligned} \tag{6..13}$$

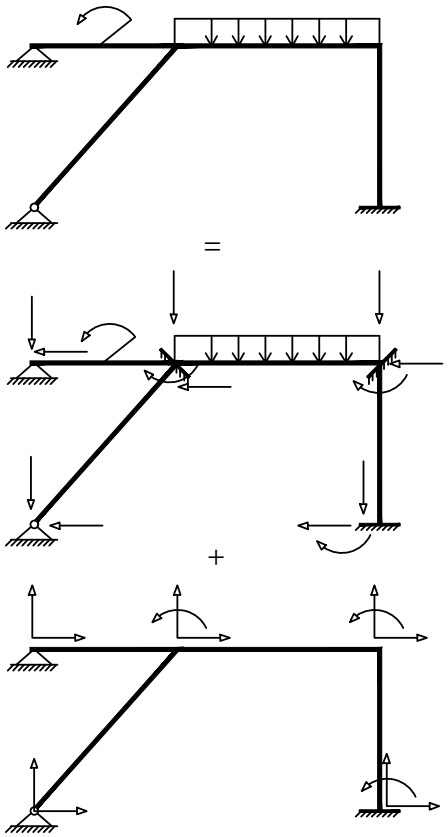
a za štap kao komponente vektora $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}^T = [\mathbf{Q}_i^T, \mathbf{Q}_k^T] = [Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n] \tag{6..14}$$

Ekvivalentno opterećenje jednako je negativnim vrednostima reakcijama oslonaca i uklještenja totalno uklještenog štapa usled zadatog opterećenja.

6.3. Analiza strukture štapova

Kada govorimo o analizi strukture štapova tada posmatramo nosač u celini. Za takav nosač potrebno je odrediti nepoznata pomeranja u čvorovima. Da bismo formirali uslovne jednačine na osnovu kojih možemo odrediti nepoznate veličine potrebno je da pretpostavimo da su uticaji u nosaču usled zadatog opterećenja jednaki zbiru uticaja u nosaču u kome su pomeranja čvorova sprečena i uticaja u nosaču koji je opterećen ekvivalentnim opterećenjem u čvorovima nosača, slika 41.



Slika 41.

Da bismo odredili nepoznata pomeranja posmatramo uslove ravnoteže čvorova nosača opterećenog ekvivalentnim opterećenjem. Za sistem u celosti uslovi ravnoteže predstavljaju uslovne jednačine

u sledećem obliku:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{q}^* = \mathbf{S}^* \tag{6..15}$$

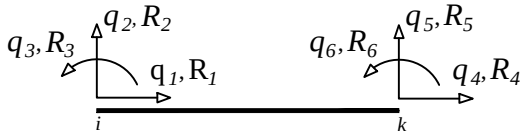
U prethodnoj jednačini $\mathbf{K}^*$ predstavalja matricu krutosti sitema, $\mathbf{q}^*$ vektor pomeranja svih čvorova sistema, i $\mathbf{S}^*$ vektor slobodnih članova koji potiče od spoljašnjih sila koje deluju u čvorovima nosača i od vektora ekvivalentnog opterećenja. Zvezdica označava da se sve veličine odnose na globalni koordinatni sistem. Na osnovu jednačine 6.15 se određuju nepoznata pomeranja u čvorovima nosača i kada su ona poznata na osnovu izraza 6.11 koji predstavlja vezu izmedj u sila i pomeranja mogu se dobiti sile na krajevima štapa.

6.4. Tipovi štapova i matrice krutosti

U zavisnosti od načina na koji su štapovi u čvorovima vezani sa ostalim delovima konstrukcije, kod nosača u ravni mogu se javiti tri tipa štapova:

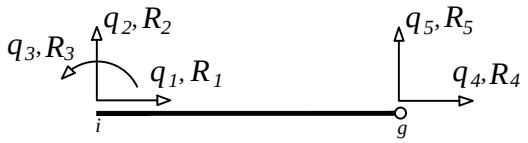
- Štap tipa k
- Štap tipa g
- Prost štap.

Štap tipa k je u čvorovima i i k kruto vezan sa ostalim delovima nosača. On ima 6 stepeni slobode pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu $q_1, q_2, ...q_6$ tj. po 3 stepena slobode pomeranja u svakom čvoru.



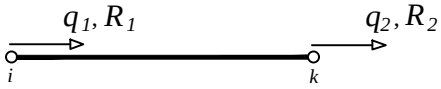
Slika 42. : *Štap tipa k*

Štap tipa g je u čvoru i kruto a u čvoru g zglavkasto vezan sa ostalim delovima nosača. On ima 5 stepeni slobode pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu $q_1, q_2, ...q_5$ tj. 3 stepena slobode pomeranja u čvoru i i 2 stepena slobode pomeranja u čvoru g.



Slika 43. : *Štap tipa g*

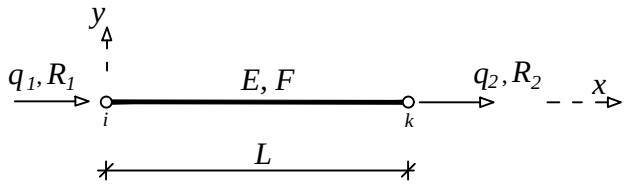
Prost štap je u čvorovima i i k zglavkasto vezan sa ostalim delovima nosača. Štap ima 2 stepena slobode pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu u pravcu ose štapa.



Slika 44. : *Prost štap*

6.4.1. Prost štap

Posmatramo prost štap u stanju aksijalnog naprezanja. Dužina štapa je L, površina poprečnog preseka F i modul elastičnosti E.



Slika 45. : *Prost štap*

U lokalnom koordinatnom sistemu, prost štap ima dva stepena slobode pomeranja. To su pomeranja krajeva štapa i i k u pravcu ose štapa $q_1 = u_i$ i $q_2 = u_k$. Tim pomeranjima odgovaraju aksijalne sile na krajevima štapa $R_1 = N_i$ i $R_2 = N_k$.

Vektor sila $\mathbf{R}$ i vektor pomeranja $\mathbf{q}$ su sledeći:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ \\ N_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ \\ u_k \end{bmatrix} \tag{6..16}$$

Matrica krutosti štapa

Matrica krutosti štapa predstavlja vezu između vektora sila i vektora pomeranja:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \tag{6..17}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{6..18}$$

gde je matrica krutosti prostog štapa:

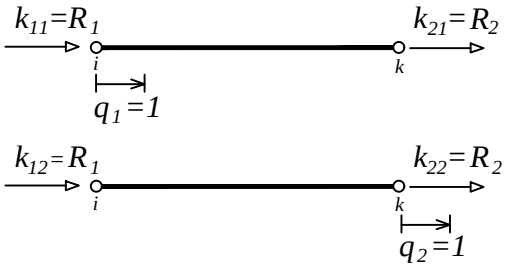
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{6..19}$$

Matricu krutosti ćemo izvesti direktnim postupkom tako što svaki element matrice krutosti određujemo direktno na osnovu njegovog fizičkog značenja. Element matrice krutosti k_{ij} predstavlja silu na mestu i usled pomeranja $q_j = 1$ kada su sva druga pomeranja krajeva štapa jednaka nuli.

Posmatrajmo sliku 46. Ukoliko prostom štapu zadamo pomeranje $q_1 = 1$ pri čemu je pomeranje $q_2 = 0$ sledi da je element k_{11} jednak sili R_1 a element k_{21} jednak sili R_2. U sledećem koraku zadajemo pomeranje $q_2 = 1$ pri čemu je pomeranje $q_1 = 0$. U tom slučaju dobiće se da je

element k_{12} jednaki sili R_1 a element k_{22} jednaki sili R_2 .

To znači da elementi prve kolone matrice krutosti predstavljaju sile na krajevima prostog štapa usled pomeranja $q_1 = 1$ dok elementi druge kolone matrice krutosti predstavljaju sile na krajevima prostog štapa usled $q_2 = 1$.



Slika 46.

Po definiciji elementi matrice krutosti predstavljaju aksijalne sile na krajevima štapa usled jediničnih aksijalnih pomeranja.

Polazeći od osnovnih jednačina teorije elastičnosti za promenu dužine tetive štapa ΔL kažemo da je jednaka razlici komponenata pomeranja krajeva štapa u pravcu ose štapa:

$$\Delta L = q_2 - q_1 \tag{6..20}$$

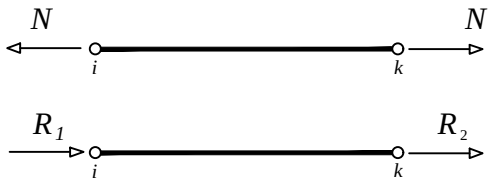
Dilatacija ose štapa jednaka je promeni dužine po jedinici dužine štapa tj.:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \tag{6..21}$$

a normalna sila u štapu je:

$$N = EF\varepsilon = EF\frac{\Delta L}{L} = \frac{EF}{L}(q_2 - q_1) \tag{6..22}$$

Sile na krajevima štapa R_1 i R_2 jednake su normalnim silama na krajevima štapa i i k sa odgovarajućim znakom (slika 47).



Slika 47.

Znak sila utvrđuje se prema konvenciji znaka u matričnoj analizi tj. sile na krajevima štapa R_1 i R_2 su pozitivne u pravcu x ose.

$$\begin{aligned} R_1 &= -N = \frac{EF}{L}(q_1 - q_2) \\ R_2 &= N = \frac{EF}{L}(-q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{6..23}$$

Ako prethodne jednačine ispišemo u matričnom obliku dobija se veza između vektora sila **R** i vektora pomeranja **q** prostog štapa:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{6..24}$$

gde matrica

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6..25}$$

predstavlja matricu krutosti prostog štapa konstantnog poprečnog preseka. Ona je kvadratna matrica drugog reda, simetrična je i singularna tj. njena determinanta je jednaka nuli.

Vektor ekvivalentnog opterećenja

Jednačina $\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}$ važi za neopterećen štap. Ako je štap opterećen onda osnovna jednačina glasi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{Q} \tag{6..26}$$

gde je **Q** vektor ekvivalentnog opterećenja štapa.

Ranije smo definisali vektor ekvivalentnog opterećenja i rekli smo da on predstavlja vektor sila na krajevima štapa sa suprotnim predznakom a koji se javlja usled spoljašnjeg opterećenja nosača.

Prost štap može biti opterećen silama u pravcu ose štapa i uticajem od temperature t^o duž ose štapa, kada se javlja dodatna dilatacija ε_t koja je jednaka:

$$\varepsilon_t = \alpha_t t^o \tag{6..27}$$

gde je α_t koeficijent termičke dilatacije materijala.

U tom slučaju ukupna normalna sila u štapu jednaka je:

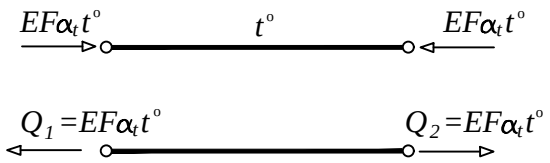
$$N = EF(\varepsilon + \varepsilon_t) = \frac{EF}{L}(q_2 - q_1) + EF\alpha_t t^o \tag{6..28}$$

ili matrično:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{bmatrix} - EF\alpha_t t^o \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6..29}$$

Drugi član predstavlja vektor ekvivalentnog opterećenja usled temperaturne promene u osi štapa $\mathbf{Q}_t$

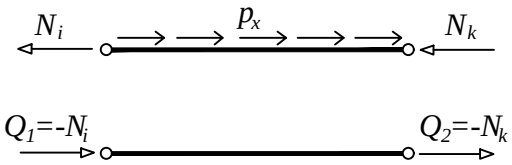
$$\mathbf{Q}_t = EF\alpha_t t^o \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6..30}$$



Slika 48.

Vektor ekvivalentnog opterećenja jednak je vektoru reakcija obostrano oslonjenog prostog štapa usled temperaturne promene u osi štapa sa suprotnim znakom, slika 48.

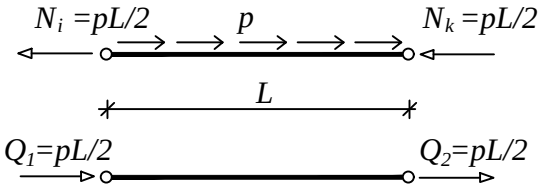
Ako je štap opterećen proizvoljnim opterećenjem u pravcu ose štapa, slika 49, komponente ekvivalentnog opterećenja se dobijaju kao reakcije obostrano oslonjenog štapa sa suprotnim znakom.



Slika 49.

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \\ Q_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_i \\ \\ N_k \end{bmatrix} \tag{6..31}$$

Ako je opterećenje duž ose štapa konstantno, slika 50, tada su reakcije na krajevima štapa jednake polovini rezultante opterećenja, odnosno:

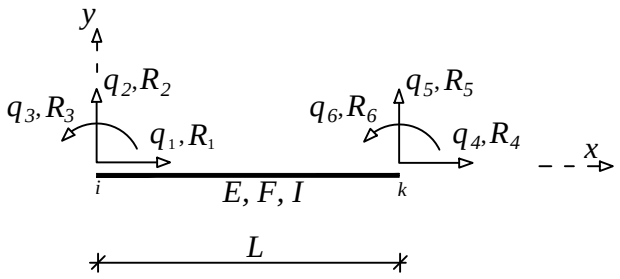


Slika 50.

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \\ \frac{pL}{2} \end{bmatrix} \tag{6..32}$$

6.4.2. Štap tipa k

Štap tipa k je kruto vezan na oba kraja sa ostalim delovima nosača. Može biti izložen aksijalnom naprezanju i savijanju. U linearnoj teoriji štapa ta dva naponska stanja su potpuno nezavisna i mogu se posmatrati odvojeno. Uticaji usled istovremenog delovanja oba stanja mogu se dobiti superpozicijom uticaja usled pojedinih stanja. Posmatramo prav prizmatičan štap tipa k, dužine L, površine poprečnog preseka F, modula elastičnosti E i momenta inercije I (slika 51).



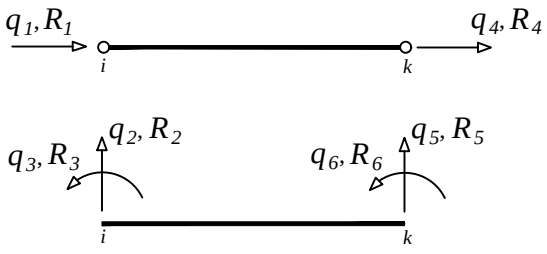
Slika 51.

Štap tipa k ima 6 stepeni slobode pomeranja na krajevima štapa, po 3 u svakom čvoru i to dva pomeranja u i v u pravcu x i y ose i rotaciju φ oko z ose. Tim pomeranjima odgovaraju sile N_i, T_i, M_i u čvoru i odnosno N_k, T_k, M_k u čvoru k.

Vektor sila $\mathbf{R}$ i vektor pomeranja $\mathbf{q}$ u lokalnom koordinatnom sistemu su:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} \tag{6..33}$$

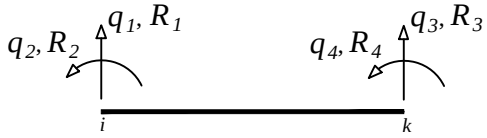
Aksijalno naprezanje i savijanje su dva međusobno nezavisna naponska stanja koja se mogu posmatrati odvojeno (slika 52):



Slika 52.

Matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja štapa usled savijanja

Matrica krutosti štapa tipa k izvešće se posmatrajući aksijalno naprezanje i savijanje štapa nezavisno jedno od drugog. Pošto je matrica krutosti za aksijalno naprezanje izvedena za prost štap potrebno je samo izvesti matricu krutosti štapa tipa k za slučaj savijanja (slika 53).



Slika 53.

Vektor sila i vektor pomeranja su sledeći:

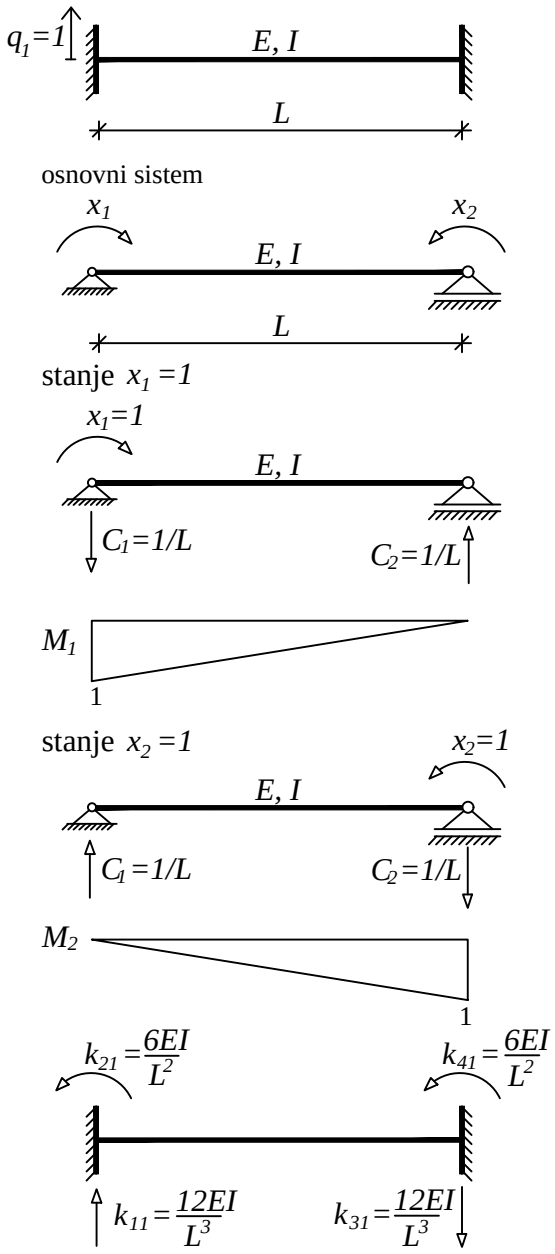
$$\mathbf{R}^S = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \qquad \mathbf{q}^S = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \tag{6..34}$$

Matrica krutosti $\mathbf{k}^S$ izvešće se direkto, polazeći od fizičkog značenja koeficijenta matrice krutosti: koeficijent k_{ij} predstavlja silu R_i obostrano uklještenog štapa, usled pomeranja $q_j = 1$ kada su sva ostala pomeranja krajeva štapa jednaka nuli.

S obzirom da štap tipa k izložen savijanju ima četiri stepena slobode pomeranja, matrica krutosti štapa izloženog savijanju može se prikazati u sledećem obliku:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \tag{6..35}$$

Usled pomeranja $q_j = 1$ javljaju se reakcije na krajevima štapa koje predstavljaju redom elemente j-te kolone matrice krutosti k_{1j}, k_{2j}, k_{3j}, k_{4j}. S tim u vezi, da bismo odredili elemente prve kolone matrice krutosti $\mathbf{k}^S$ zadaćemo jediničnо pomeranje $q_1 = 1$ štapu tipa k, odnosno štapu koje je obostrano uklješten. U statičkom smislu, taj štap je dva puta statički neodređen, a da bismo došli do rešenja primenićemo metodu sila. Na slici 54 je prikazan postupak određivanja reakcija na krajevima štapa usled jedničnog pomeranja oslonca q_1.



Slika 54.

Uslovne jednačine:

$$\delta_{11}x + 1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}x + 1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{20} = 0$$

Koeficijenti uz nepoznate

$$\delta_{11} = \int_i^k \frac{M_1^2}{EI}ds = \frac{L}{3EI}$$
$$\delta_{22} = \int_i^k \frac{M_2^2}{EI}ds = \frac{L}{3EI}$$
$$\delta_{12} = \int_i^k \frac{M_1 M_2}{EI}ds = \frac{L}{6EI}$$

Slobodni članovi uslovnih jednačina

$$\delta_{1c} = -\sum C_1 c_= \frac{1}{L}$$
$$\delta_{2c} = -\sum C_2 c_= -\frac{1}{L}$$

Uslovne jednačine

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = 0$$

Statički nepoznate veličine

$$-x_1 = x_2 = \frac{6EI}{L^2}$$

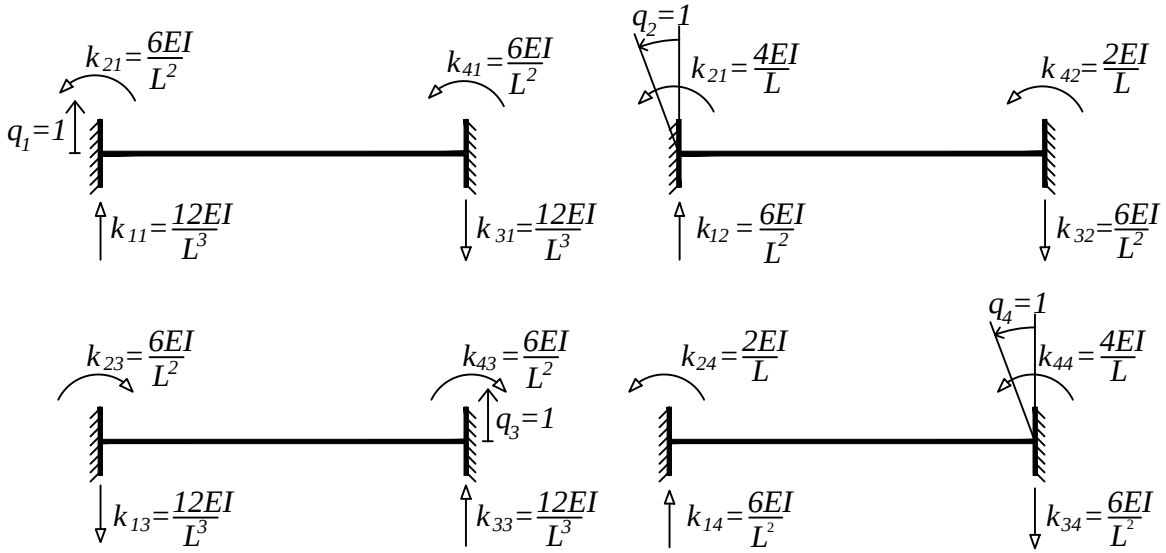
Reakcije oslonaca

$$C_1 = -C_2 = \frac{12EI}{L^3}$$

Reakcije oslonaca koje smo dobili na ovaj način, usled zadavanja jediničnog pomeranja $q_1 = 1$ predstavljaju elemente prve kolone matrice $\mathbf{k}^S$, odnosno matrica krutosri štapa izložen savijanju je sledeća:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ \frac{6EI}{L^2} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ -\frac{12EI}{L^3} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ \frac{6EI}{L^2} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \qquad (6..36)$$

Da bismo dobili elemente druge, treće i četvrte kolone ove matrice potrebno je da zadajemo redom jedinična pomeranja, odnosno jedinična obrtanja oslonaca:



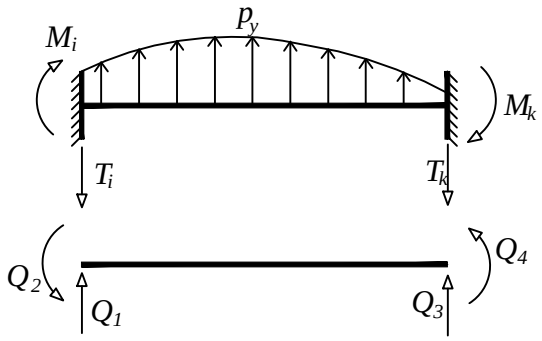
Slika 55.

Konačno dobija se matrica krutosti štapa tipa k izložnog savijanju u sledećem obliku:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{6..37}$$

Matrica krutosti je kvadratna matrica četvrtog reda, simetrična i singularna.

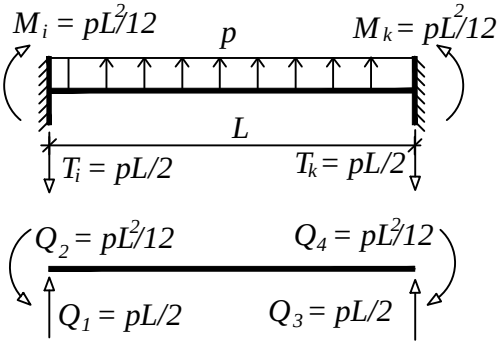
Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja usled savijanja u lokalnom koordinatnom sistemu ima četiri komponente koje su jednake negativnim vrednostima reakcija oslonaca obostrano uklještene grede usled zadatog opterećenja.



$$\mathbf{Q}^S = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \tag{6..38}$$

Slika 56.

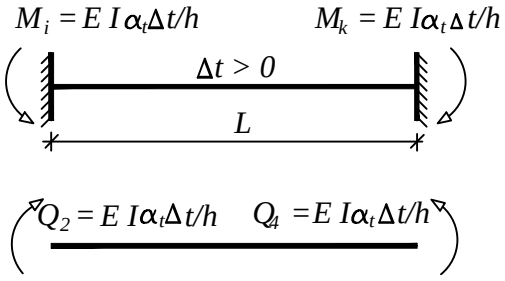
Štap tipa k je dva puta statički neodređen pa se reakcije oslonaca usled zadatog opterećenja određuju primenom metode sila. Vektor ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}_p$ usled jednakopodeljenog opterećenja je sledeći:



$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \\ \frac{pl}{2} \\ -\frac{pl^2}{12} \end{bmatrix} \tag{6..39}$$

Slika 57.

Vektor ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}_t$ usled temperaturne razlike:



$$\mathbf{Q}_t = EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6..40}$$

Slika 58.

Matrica krutosti štapa tipa k i vektor ekvivalentnog opterećenja

Matrica krutosti štapa tipa k dobija se iz matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa $\mathbf{k}^A$ i matrice krutosti štapa izloženog savijanju $\mathbf{k}^S$ stavljanjem članova matrica na odgovarajuće mesto u matrici krutosti štapa tipa k izloženog složenom naprezanju.

$$\mathbf{k}^A = \begin{matrix} \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & -\frac{EF}{L} \\ -\frac{EF}{L} & \frac{EF}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{6..41}$$

$$\mathbf{k}^S = \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{6..42}$$

Da bismo formirali matricu krutosti štapa tipa k potrebno je da numerišemo vrste i kolone matrica krutosti $\mathbf{k}^A$ i $\mathbf{k}^S$. Numerisaćemo ih sa brojevima kojima su numerisana i pomeranja odnosno sile na krajevima štapova. Tako će elementi matrice krutosti $\mathbf{k}^A$ imati oznake 1 i 4 koje odgovaraju oznakama sila i pomeranja aksijalno napregnutog štapa a elementi matrice krutosti $\mathbf{k}^S$ će imati oznake 2, 3, 5 i 6 koje odgovaraju oznakama pomeranja krajeva štapa tipa k izloženog savijanju. Zatim, formiramo nula matricu šestog reda, numerišemo vrste i kolone i na odgovarajuća mesta postavljamo elemente iz matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa $\mathbf{k}^A$ i štapa izloženog savijanju $\mathbf{K}^S$. Na taj način se dobija matrica krutosti štapa tipa k:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array} \tag{6..43}$$

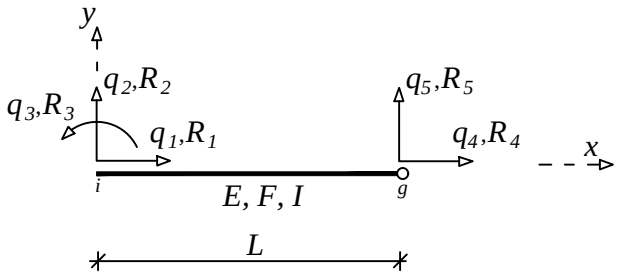
Vektor ekvivalentnog opterećenja dobija se na isti nači kao i matrica krutosti tako što na odgovarajuća mesta stavljamo elemente vektora ekvivalentnog opterećenja aksijalno napregnutog štapa i štapa izloženog savijanju:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} \tag{6..44}$$

6.4.3. Štap tipa g

Štap tipa g je na jednom kraju kruto a na drugom kraju zglavkasto vezan sa ostalim delovima nosača. Matrica krustosti će se izvesti pod pretpostavkom da je prvi čvor i uklješten, a drugi čvor g koji je slobodno oslonjen.

Posmatramo prav prizmatičan štap tipa g, dužine L, površine poprečnog preseka F, momenta inercije I i modula elastičnosti E, čija se osa štapa poklapa sa osom x lokalnog koordinatnog sistema (slika 59).



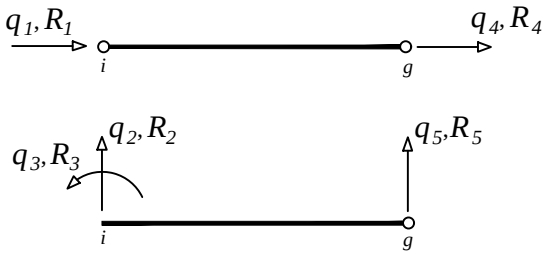
Slika 59.

Štap tipa g ima 5 stepeni slobode pomeranja i to u čvoru i komponente pomeranja u i v u pravcu x i y ose, rotaciju oko z ose i u čvoru g dve komponente pomeranja u i v.

Vektor sila i vektor pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu imaju po pet komponenti:

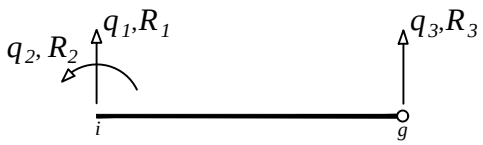
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_g \\ T_g \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_g \\ v_g \end{bmatrix} \tag{6..45}$$

Matrica krutosti štapa tipa g izvodi se na isti način kao i matrica krutosti štapa tipa k, tako što se aksijalno naprezanje i savijanje štapa posmatra nezavisno jedno od drugog, slika 60.



Slika 60.

S obzirom da je matrica krutosti štapa izloženog aksijalnom naprezanju već izvedena u delu izvođenja matrice krutosti za prost štap potrebno je izvesti matricu krutosti štapa tipa g izloženog savijanju, slika 61:



Slika 61.

Vektor sila i vektor pomeranja su:

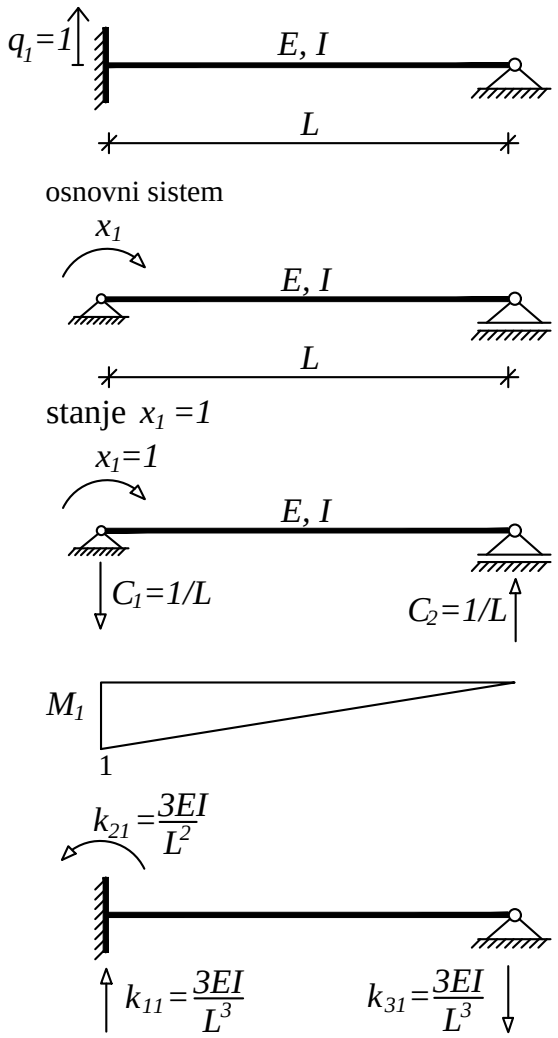
$$\mathbf{R}^S = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}^S = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{6..46}$$

Matrica krutosti $\mathbf{k}^S$ izvešće se direktno, polazeći od fizičkog značenja koeficijenta matrice krutosti: koeficijent k_{ij} predstavlja silu R_i obostrano uklještenog štapa, usled pomeranja $q_j = 1$ kada su sva ostala pomeranja krajeva štapa jednaka nuli.

S obzirom da štap tipa k izložen savijanju ima ťri stepena slobode pomeranja, matrica krutosti štapa izloženog savijanju može se prikazati u sledećem obliku:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \tag{6..47}$$

Usled pomeranja $q_j = 1$ javljaju se reakcije na krajevima štapa koje predstavljaju redom elemente j-te kolone matrice krutosti k_{1j}, k_{2j}, k_{3j}. S tim u vezi, da bismo odredili elemente prve kolone matrice krutosti $\mathbf{k}^S$ zadaćemo jedinično pomeranje $q_1 = 1$ štapu tipa g. U statičkom smislu, taj štap je jednom statički neodređen, a da bismo došli do rešenja primenićemo metodu sila. Na slici 62 je prikazan postupak određivanja reakcija na krajevima štapa usled jedničnog pomeranja oslonca q_1. Usvojen je osnovni sistem proste grede, sračunat je koeficijenti uz nepoznatu kao i slobodan član uslovne jednačine i na osnovu statički nepoznate veličine određene su reakcije na krajevima štapa.



Slika 62.

Uslovna jednačina:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{10} = 0$$

Koeficijenti uz nepoznatu

$$\delta_{11} = \int_i^k \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{L}{3EI}$$

Slobodan član

$$\delta_{1c} = -\sum C_1 c_= \frac{1}{L}$$

Uslovna jednačina

$$\frac{L}{3EI}x_1 + \frac{1}{L} = 0$$

Statički nepoznate veličine

$$x_1 = -\frac{3EI}{L^2}$$

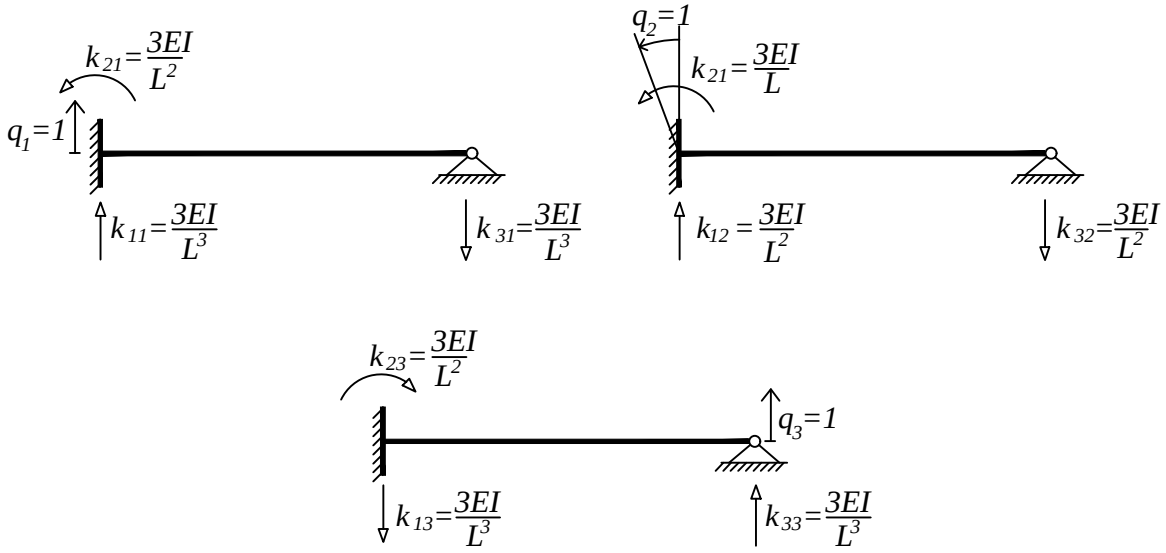
Reakcije oslonaca

$$C_1 = -C_2 = \frac{3EI}{L^3}$$

Reakcije oslonaca koje smo dobili na ovaj način, usled zadavanja jediničnog pomeranja $q_1 = 1$ predstavljaju elemente prve kolone matrice $\mathbf{k}^S$:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & k_{12} & k_{13} \\ \frac{3EI}{L^2} & k_{22} & k_{23} \\ -\frac{3EI}{L^3} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \qquad (6..48)$$

Kada se jednostrano uklještenom štapu, slika 63, zadaju pomeranja otalih oslonaca, $q_j = 1, j = 1, 2, 3$ dobijaju se reakcije na krajevima štapa koje predstavljaju elemente j-te kolone matrice krutosti:



Slika 63.

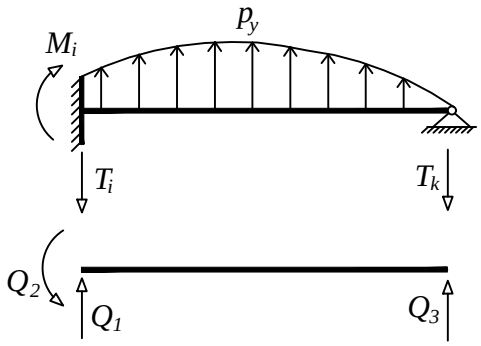
Matrica krutosti štapa tipa g izloženog savijanju je sledeća:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{6..49}$$

Matrica krutosti je kvadratna i simetrična.

Vektor ekvivalentnog opterećenja

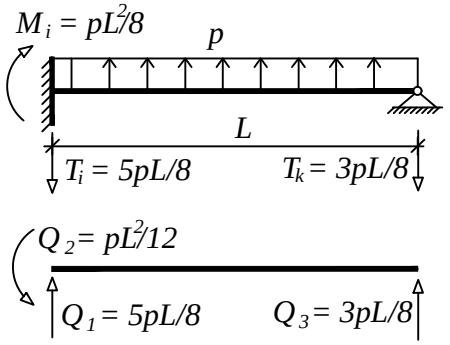
Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja usled savijanja u lokalnom koordinatnom sistemu ima tri komponente koje su jednake negativnim vrednostima reakcija oslonaca jednostrano uklještene grede usled zadatog opterećenja.



$$\mathbf{Q}^S = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{6..50}$$

Slika 64.

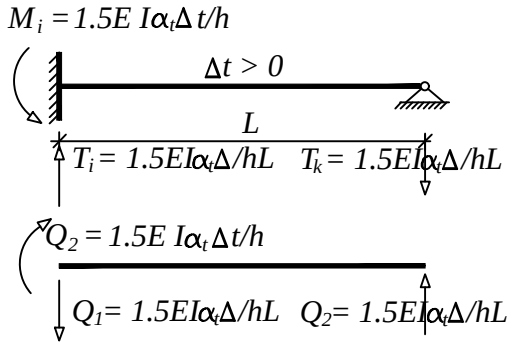
Štap tipa g je jednom statički neodređen pa se reakcije oslonaca usled zadatog opterećenja određuju primenom metode sila. Vektor ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}_p$ usled jednakopodeljenog opterećenja je sledeći:



$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \frac{5pL}{8} \\ \frac{pL^2}{8} \\ \frac{3pL}{8} \end{bmatrix} \tag{6..51}$$

Slika 65.

Vektor ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}_t$ usled temperaturne razlike:



$$\mathbf{Q}_t = 1.5EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ -1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{6..52}$$

Slika 66.

Matrica krutosti štapa tipa g i vektor ekvivalentnog opterećenja

Matrica krutosti štapa tipa g dobija se iz matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa $\mathbf{k}^A$ i matrice krutosti štapa izloženog savijanju $\mathbf{k}^S$ stavljanjem članova matrica na odgovarajuće mesto u matrici krutosti štapa tipa g izloženog složenom naprezanju.

$$\mathbf{k}^A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & -\frac{EF}{L} \\ -\frac{EF}{L} & \frac{EF}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{array} \tag{6..53}$$

$$\mathbf{k}^S = \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \tag{6..54}$$

Da bismo formirali matricu krutosti štapa tipa g potrebno je da numerišemo vrste i kolone matrica krutosti $\mathbf{k}^A$ i $\mathbf{k}^S$. Numerisaćemo ih sa brojevima kojima su numerisana i pomeranja odnosno sile na krajevima štapova. Tako će elementi matrice krutosti $\mathbf{k}^A$ imati oznake 1 i 4 koje odgovaraju oznakama sila i pomeranja aksijalno napregnutog štapa a elementi matrice krutosti $\mathbf{k}^S$ će imati oznake 2, 3 i 5 koje odgovaraju oznakama pomeranja krajeva štapa tipa g izloženog savijanju. Zatim, formiramo nula matricu petog reda, numerišemo vrste i kolone i na odgovarajuća mesta postavljamo elemente iz matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa $\mathbf{k}^A$ i štapa izloženog savijanju $\mathbf{k}^S$. Na taj način se dobija matrica krutosti štapa tipa g:

$$\mathbf{k} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \tag{6..55}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja dobija se na isti način kao i matrica krutosti tako što na odgovarajuća mesta stavljamo elemente vektora ekvivalentnog opterećenja aksijalno napregnutog štapa i štapa izloženog savijanju:

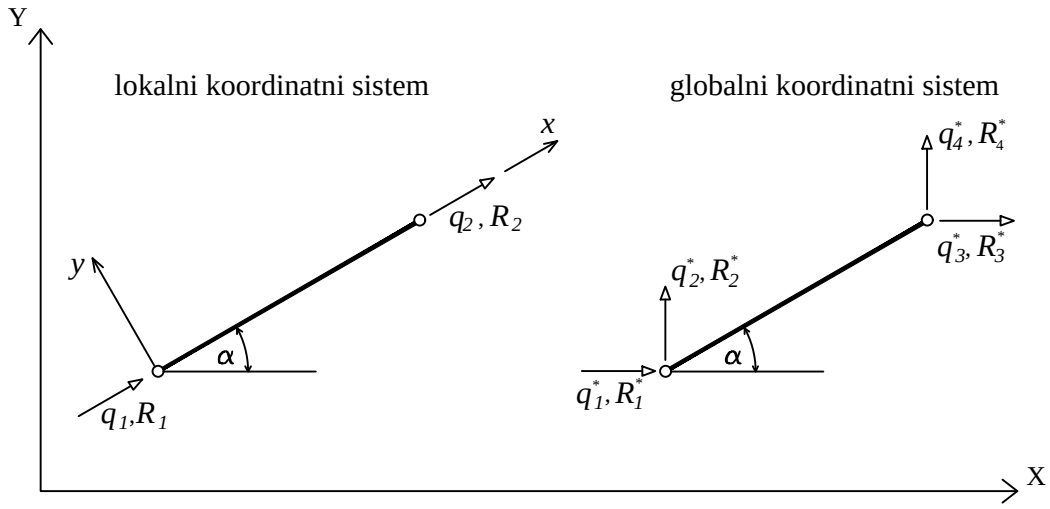
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \tag{6..56}$$

6.5. Transformacije matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja

Matrice krutosti štapova kao i vektori ekvivalentnog opterećenja su ispisani u lokalnom koordinatnom sistemu. Lokalni koordinatni sistem je vezan za štap, osa x se poklapa sa osom štapa a ose y i z sa glavnim osama inercije poprečnog preseka štapa. Na taj način svaki štap ima svoj lokalni koordinatni sistem.

Za analizu sistema međusobno vezanih štapova, potrebno je definisati položaj svakog štapa u odnosu na zajednički sistem koji se naziva referentni, opšti ili globalni koordinatni sistem. Pored toga potrebno je izvršiti transformaciju vektora generalisanih sila (pomeranja) i matrice krutosti štapa iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.

6.5.1. Prost štap



Slika 67.

Vektori sila $\mathbf{R}$ i pomeranja $\mathbf{q}$ krajeva štapa u globalnom koordinatnom sistemu su:

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix} \tag{6..57}$$

Transformacija vektora sila i pomeranja definisana je uglom α koji X osa globalnog koordinatnog sistema zaklapa sa x osom lokalnog koordinatnog sistema.

$$R_1 = R_1^* \cos\alpha + R_2^* \sin\alpha \tag{6..58}$$

analogno:

$$R_2 = R_3^* \cos\alpha + R_4^* \sin\alpha \tag{6..59}$$

Veza između vektora sila na krajevima štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu u matričnom obliku glasi:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \end{bmatrix} \tag{6..60}$$

Odnosno

$$\mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^* \tag{6..61}$$

gde je $\mathbf{T}$ matrica transformacije aksijalno napregnutog štapa

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..62}$$

Ona važi i za vektore pomeranja krajeva štapa kao i vektore ekvivalentnog opterećenja

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^* \end{aligned} \tag{6..63}$$

Obrnuta veza (globalni koordinatni sistem-lokalni koordinatni sistem)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R} \\ \mathbf{q}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{6..64}$$

Transformacija matrice krutosti

Polazeći od jednačine štapa u lokalnom koordinatnom sistemu i zamenjujući $\mathbf{q}$ sa izrazom 6.63a, dobijamo:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \\ &\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* \end{aligned} \tag{6..65}$$

Ako uvedemo obeležavanje

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \tag{6..66}$$

dobija se

$$\mathbf{R} = \widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q}^* \tag{6..67}$$

gde je $\widehat{\mathbf{K}}$ matrica krutosti koja daje vezu između vektora sila $\mathbf{R}$ u lokalnom koordinatnom sistemu i vektora pomeranja $\mathbf{q}^*$ u globalnom koordinatnom sistemu.
Množeći prethodnu jednačinu sa leve strane sa $\mathbf{T}^T$ dobija se:

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{T}^T \cdot \widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q}^* \tag{6..68}$$

Odnosno

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{q}^* \tag{6..69}$$

Dobili smo vezu između vektora sila $\mathbf{R}^*$ i vektora pomeranja $\mathbf{q}^*$ u globalnom koordinatnom sistemu koja je definisana matricom krutosti štapa $\mathbf{K}^*$ u globalnom koordinatnom sistemu gde je, uzimajući u obzir jednačine (6.66) i (6.68)

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \cdot \widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \tag{6..70}$$

Matrica $\widehat{\mathbf{K}}$ za aksijalno napregnut štap dobija se množenjem matrica $\mathbf{K}$ i $\mathbf{T}$ u obliku:

$$\widehat{\mathbf{K}} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..71}$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..72}$$

Kada se matrica $\widehat{\mathbf{K}}$ pomnoži sa leve strane matricom $\mathbf{T}^T$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..73}$$

dobija se matrica krutosti $\mathbf{K}^*$ prostog štapa u globalnom koordinatnom sistemu u obliku:

$$\mathbf{K}^* = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_e & -\mathbf{k}_e \\ -\mathbf{k}_e & \mathbf{k}_e \end{bmatrix} \tag{6..74}$$

gde je $\mathbf{k}_e$ submatrica matrice krutosti štapa $\mathbf{k}^*$

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{6..75}$$

Transformacija vektora ekvivalentnog opterećenja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem usled temperaturne promene u osi štapa:

$$\mathbf{Q}_t^* = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} EF\alpha_t t^o \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = EF\alpha_t t^o \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..76}$$

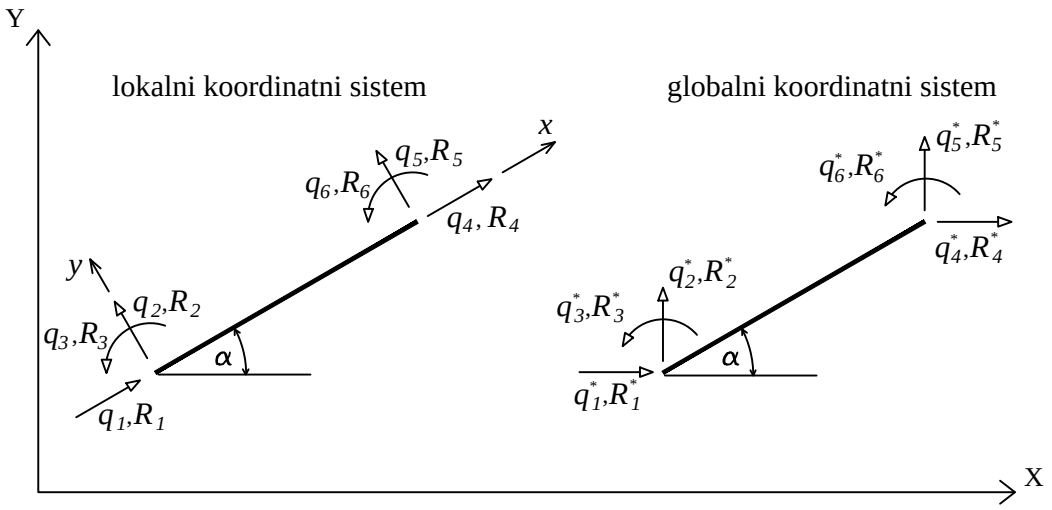
Na isti način vršimo transformaciju vektora ekvivalentnog opterećenja usled raspodeljenog opterećenja:

$$\mathbf{Q}_p^* = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1\cos\alpha \\ Q_1\sin\alpha \\ Q_2\cos\alpha \\ Q_2\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..77}$$

odnosno, transformaciju vektora ekvivalentnog opterećenja usled jednakopodeljenog opterećenja p:

$$\mathbf{Q}_p^* = \frac{pL}{2} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..78}$$

6.5.2. Štap tipa k



Slika 68.

Vektori sila $\mathbf{R}$ i pomeranja $\mathbf{q}$ u globalnom koordinatnom sistemu su:

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \\ R_5^* \\ R_6^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{bmatrix} \tag{6..79}$$

Projektovanjem komponenata globalnog sistema R_1^* i R_2^* na pravce osa lokalnog koordinatnog sistema xy dobija se veza između sila u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1^* \cos\alpha + R_2^* \sin\alpha \\ R_2 &= -R_1^* \sin\alpha + R_2^* \cos\alpha \end{aligned} \tag{6..80}$$

Vektor momenta je invarijanta u odnosu na rotaciju sistema

$$R_3 = R_3^* \tag{6..81}$$

Ako ove tri jednačine napišemo u matričnom obliku dobija se da je:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{bmatrix} \tag{6..82}$$

Odnosno

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_i^* \tag{6..83}$$

Vektori $\mathbf{R}_i$ i $\mathbf{R}_i^*$ su vektor sila u čvoru i u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu, a $\mathbf{t}$ je čvorna matrica transformacije.

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_i^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6..84}$$

Na osnovu analogije možemo napisati vezu između vektora sila u čvoru k u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_k^* \tag{6..85}$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_k^* = \begin{bmatrix} R_4^* \\ R_5^* \\ R_6^* \end{bmatrix} \tag{6..86}$$

Ispisivajući jednačine koje opisuju vezu između vektora sila na krajevima štapa $\mathbf{R}$ u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu za štap tipa k se dobija:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_i \\ \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^* \\ \\ \mathbf{R}_k^* \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}^* \tag{6..87}$$

Matrica $\mathbf{T}$ predstavlja matricu transformacije štapa tipa k. Ona se sastoji od dve submatrice $\mathbf{T}$ koje leže na glavnoj dijagonali dok su vandijagonalne matrice jednake nuli.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \tag{6..88}$$

U razvijenom obliku matrica transformacije glasi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6..89}$$

Ista veza može da se napiše za vektore pomeranja $\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}^*$ kao i za vektore ekvivalnetnog opterećenja $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{Q}^*$ štapa:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^* \end{aligned} \tag{6..90}$$

Matrica transformacije je ortogonalna matrica tj. njena inverzna matrica $\mathbf{T}^{-1}$ je jednaka transponovanoj matrici $\mathbf{T}^T$

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1} \tag{6..91}$$

Pa sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R} \\ \mathbf{q}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{6..92}$$

Matrica krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu dobija se na isti način opisan za prost štap:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{Q} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q} = \widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q} \tag{6..93}$$

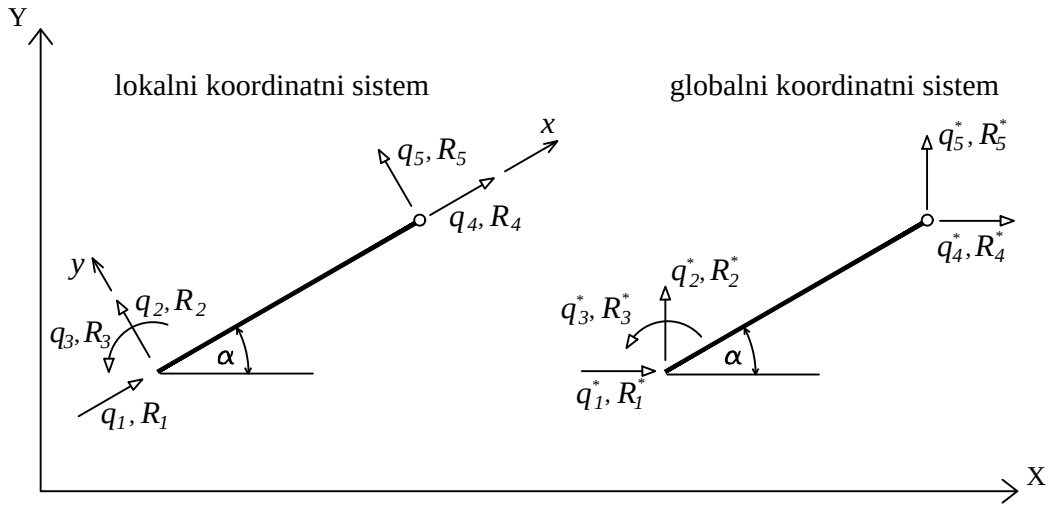
Matrica $\widehat{\mathbf{K}}$ daje vezu između vektora sila u lokalnom koordinatnom sistemu i vektora pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu.
Množeći prethodnu jednačinu sa $\mathbf{T}^T$ sa leve strane dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{T}^T \cdot \widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{R}^* &= \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q}^*\end{aligned} \tag{6..94}$$

Gde je

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \cdot \widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \tag{6..95}$$

6.5.3. Štap tipa g



Slika 69.

Vektori sila $\mathbf{R}$ i pomeranja $\mathbf{q}$ u globalnom koordinatnom sistemu su sledeći:

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \\ R_5^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \\ q_5^* \end{bmatrix} \tag{6..96}$$

Veza između vektora sila i vektora pomeranja u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu definisana je preko matrice transformacije:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^* \\ \mathbf{q} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^*\end{aligned} \tag{6..97}$$

Matrica transformacije $\mathbf{T}$ za štap tipa g može se dobiti iz matrice transformacije štapa tipa k

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{6..98}$$

Matrica transformacije je ortogonalna pa važe relacije:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R} \\ \mathbf{q}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{6..99}$$

Matrica krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu dobija se na isti način opisan za prost štap:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{Q} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q} = \widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q} \tag{6..100}$$

Matrica $\widehat{\mathbf{K}}$ daje vezu između vektora sila u lokalnom koordinatnom sistemu i vektora pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu. Množeći prethodnu jednačinu sa $\mathbf{T}^T$ sa leve strane dobija se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{T}^T \cdot \widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{R}^* &= \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{q}^* - \mathbf{Q}^* \end{aligned} \tag{6..101}$$

Gde je

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \cdot \widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \tag{6..102}$$

6.6. Formiranje uslovnih jednačina za određivanje pomeranja nosača

Za svaki štap j na koji deluju spoljašnji uticaji veza između generalisanih sila i generalisanih pomeranja na krajevima štapa može se prikazati izrazom:

$$\mathbf{R}_j^* = \mathbf{k}_j^* \cdot \mathbf{q}_j^* - \mathbf{Q}_j^* \qquad j = 1, 2, 3, \ldots M \tag{6..103}$$

Gde su:

- $\mathbf{R}_j^*$ vektor sila
- $\mathbf{k}_j^*$ matrica krutosti
- $\mathbf{q}_j^*$ vektor pomeranja
- $\mathbf{Q}_j^*$ vektor ekvivalentnog opterećenja
- M broj štapova u nosaču

Zvezdica uz oznake znači da se sve veličine odnose na globalni, referentni koordinatni sistem.
Ako se prethodna jednačina napiše za sve štapove sistema dobija se sledeća matrična jednačina:

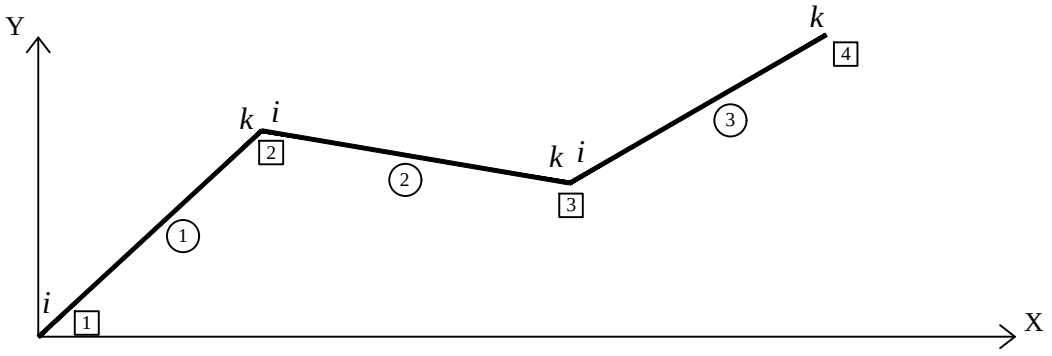
$$\overline{\mathbf{R}}^* = \overline{\mathbf{k}}^* \cdot \overline{\mathbf{q}}^* - \overline{\mathbf{Q}}^* \qquad j = 1, 2, 3, \ldots M \tag{6..104}$$

Pri ispisivanju jednačina nisu postavljani bilo kakvi uslovi što se tiču veza štapova. Jednačine su ispisane redom za sve štapove onako kako su oni u sistemu obeleženi, pod pretpostavkom da su oni međusobno nezavisni, odnosno nepovezani. Zato se matrica krutosti $\overline{\mathbf{k}}^*$ naziva matrica krutosti sistema nepovezanih štapova.
Međutim, štapovi su povezani u čvorovima, tako da su pomeranja (obrtanja) u nekom čvoru ista za štapove koji se u tom čvoru vezuju. Ako se uvede vektor generalisanih pomeranja čvorova sistema $\mathbf{q}^*$ čije se komponente mere u odnosu na referentni koordinatni sistem , veza između ovog vektora i vektora $\overline{\mathbf{q}}^*$ čije su komponente generalisana pomeranja na krajevima pojedinih štapova, postoji određena zavisnost:

$$\overline{\mathbf{q}}^* = \mathbf{J} \cdot \mathbf{q}^* \tag{6..105}$$

Matrica $\mathbf{J}$ pomoću koje se uspostavlja neposredna zavisnost između vektora $\overline{\mathbf{q}}^*$ i $\mathbf{q}^*$ je pravougaona matrica kod koje je broj vrsta jednak zbiru broja stepeni slobode štapova sistema, a broj kolona jednak broju stepeni slobode čvorova sistema. Elementi ove matrice su ili nule ili jedinice.

Ako bismo posmatrali sistem na slici 70, on ima ima tri štapa po tri stepena slobode u čvorovima na krajevima štapa, tada vektor $\overline{\mathbf{q}}^*$ ima ukupno 3x2x3=18 komponenata dok vektor $\mathbf{q}^*$ ima 4x3=12 komponente. Prema tome matrica $\mathbf{J}$ je pravougaona matrica sa 18 vrsta i 12 kolona.



Slika 70.

Veza za sistem na slici je:

$$\begin{bmatrix} q_i^{*1} \\ q_k^{*1} \\ q_i^{*2} \\ q_k^{*2} \\ q_i^{*3} \\ q_k^{*3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & I & \\ & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix} \tag{6..106}$$

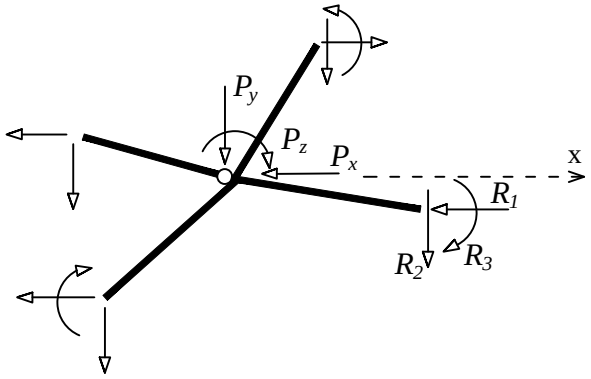
Gde su $\mathbf{q}_i^{*m} \quad m = 1, 2, 3$ generalisana pomeranja krajeva štapova, $q_i^* \quad i = 1, 2, 3, 4$ generalisana pomeranja čvorova sistema a $\mathbf{I}$ jedinična matrica trećeg reda. Matrica $\mathbf{J}$ pomoću koje se definišu uslovi veze štapova u čvorovima sistema naziva se matrica veze štapova.
Pored uslova kompatibilnosti u čvorovima sistema moraju biti ispunjeni i uslovi ravnoteže. Na čvor i koji je izdvojen iz datog sistema deluju sile veze i spoljašnje koncentrisane sile i momenti koji neposredno deluju u čvoru i.

Vektor spoljašnjih sila koje neposredno deluju u čvoru i obeležen je sa $\mathbf{P}_i^*$

$$\mathbf{P}_i^* = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} \tag{6..107}$$

Uslov ravnoteže sila u čvoru i u vektorskom obliku glasi:

$$\mathbf{P}_i^* - \sum_{i=1}^{\eta_i} \overline{\mathbf{R}}_i^{j*} = 0 \quad i = 1, 2, 3, N \tag{6..108}$$



Slika 71.

Vrši se sumiranje po svim štapovima vezanim u čvoru i pri čemu η_i predstavlja broj štapova u čvoru i.
Analogno uslovima ravnoteže čvora i koji su prikazani prethodnim izrazom, mogu da se formiraju uslovi ravnoteže svih čvorova i prikažu sažeto u sledećem obliku:

$$\mathbf{P}^* - \mathbf{R}^* = 0 \tag{6..109}$$

Gde su:

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} P_1^* \\ \vdots \\ P_i^* \\ \vdots \\ P_N^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ \vdots \\ R_i^* \\ \vdots \\ R_N^* \end{bmatrix} \tag{6..110}$$

vektor zadatih spoljašnjih sila i vektor sila veze u čvorovima sistema koji ima N čvorova.
Ako to primenimo na ilustrovani primer možemo zapisati:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_1^* - \overline{\mathbf{R}}_i^{*1} = 0 \\ &\mathbf{P}_2^* - \overline{\mathbf{R}}_k^{*1} - \overline{\mathbf{R}}_i^{*2} = 0 \\ &\mathbf{P}_3^* - \overline{\mathbf{R}}_k^{*2} - \overline{\mathbf{R}}_i^{*3} = 0 \\ &\mathbf{P}_4^* - \overline{\mathbf{R}}_k^{*3} = 0 \end{aligned} \tag{6..111}$$

U kojima uz vektor sila veze gornji indeks označava štap a donji indeks kraj štapa, levi (i) ili

desni (k). Prethodne jednačine se mogu ispisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^* \\ \mathbf{P}_2^* \\ \mathbf{P}_3^* \\ \mathbf{P}_4^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & \\ & \mathbf{I} & \mathbf{I} & & & \\ & & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \\ & & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}}_i^{*1} \\ \overline{\mathbf{R}}_k^{*1} \\ \overline{\mathbf{R}}_i^{*2} \\ \overline{\mathbf{R}}_k^{*2} \\ \overline{\mathbf{R}}_i^{*3} \\ \overline{\mathbf{R}}_k^{*3} \end{bmatrix} = 0 \tag{6..112}$$

Odnosno

$$\mathbf{P}^* - \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{R}}^* = 0 \tag{6..113}$$

Gde je $\mathbf{J}^T$ transponovana matrica veze štapova.
Analogno vezi između vektora pomeranja $\mathbf{q}^*$ i $\overline{\mathbf{q}}^*$ možemo zapisati:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{R}}^* \tag{6..114}$$

Smenom prethodne jednačine u jednačinu ravnoteže svih čvorova dobija se:

$$\mathbf{P}^* - \mathbf{J}^T (\overline{\mathbf{K}}^* \cdot \overline{\mathbf{q}}^* - \overline{\mathbf{Q}}^*) = 0 \tag{6..115}$$

Odnosno

$$\mathbf{P}^* - \mathbf{J}^T (\overline{\mathbf{K}}^* \mathbf{J} \mathbf{q}^* - \overline{\mathbf{Q}}^*) = 0 \tag{6..116}$$

Matrična jednačina u kojoj je nepoznat vektor pomeranja čvorova $\mathbf{q}^*$ posle sređivanja može da se prikaže u standardnoj formi sistema algebarskih jednačina:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{q}^* = \mathbf{S}^* \tag{6..117}$$

Gde je $\mathbf{K}^*$ matrica koeficijenata uz nepoznate $\mathbf{S}^*$ vektor slobodnih članova

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{K}}^* \mathbf{J} \\ \mathbf{S}^* &= \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{Q}}^* \end{aligned} \tag{6..118}$$

Matrica $\mathbf{K}^*$ se naziva matrica krutosti sistema a vektor $\mathbf{S}^*$ vektor slobodnih članova. Matrica krutosti $\mathbf{K}^*$ se dobija tako što se matrica krutosti nepovezanih štapova $\overline{\mathbf{K}}^*$ pomnoži sa leva sa $\mathbf{J}^T$ a sa desna sa $\mathbf{J}$.

6.6.1. Konturni uslovi i određivanje pomeranja čvorova i reakcija oslonaca

U izrazu $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{q}^* = \mathbf{S}^*$ nepoznate su komponente vektora pomeranja čvorova $\mathbf{q}^*$ dok su komponente vektora $\mathbf{S}^*$ poznati slobodni članovi. Iz ovog sistema potrebno je odrediti pomeranja i obrtanja čvorova. Da bi to bilo moguće potrebno je definisati konturne uslove, što znači da u vektoru pomeranja $\mathbf{q}^*$ uvek postoji jedan broj poznatih komponenata, kojima se definišu uslovi oslanjanja. Na taj način ukupan broj nepoznatih pomeranja i obrtanja se smanjuje za broj sprečenih pomeranja i obrtanja oslonaca.

Ako se slobodna pomeranja i obrtanja čvorova koja su nepoznata grupišu i prikažu kao komponente vektora $\mathbf{q}_s^*$ a poznata pomeranja i obrtanja oslonačkih čvorova kao komponente vektora $\mathbf{q}_o^*$ tako da je

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s^* \\ \\ \mathbf{q}_o^* \end{bmatrix} \tag{6..119}$$

Tada sistem jednačina može da se prikaže:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss}^* & \mathbf{K}_{so}^* \\ \\ \mathbf{K}_{os}^* & \mathbf{K}_{oo}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s^* \\ \\ \mathbf{q}_o^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_s^* \\ \\ \mathbf{S}_o^* \end{bmatrix} \tag{6..120}$$

Odnosno da se razdvoji na dva sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ss}^* \cdot \mathbf{q}_s^* + \mathbf{K}_{so}^* \cdot \mathbf{q}_o^* &= \mathbf{S}_s^* \\ \mathbf{K}_{os}^* \cdot \mathbf{q}_s^* + \mathbf{K}_{oo}^* \cdot \mathbf{q}_o^* &= \mathbf{S}_o^* \end{aligned} \tag{6..121}$$

Iz prvog sistema neposredno se dobija:

$$\mathbf{q}_s^* = \mathbf{K}_{ss}^{*-1}(\mathbf{S}_s^* - \mathbf{K}_{so}^* \cdot \mathbf{q}_o^*) \tag{6..122}$$

A potom iz drugog, vodeći računa da je:

$$\mathbf{S}_o^* = \mathbf{R}_o^* + \mathbf{Q}_o^* \tag{6..123}$$

Reakcije oslonaca:

$$\mathbf{R}_o^* = \mathbf{K}_{os}^* \mathbf{q}_s^* + \mathbf{K}_{oo}^* \cdot \mathbf{q}_o^* - \mathbf{Q}_o^* \tag{6..124}$$

Homogeni konturni uslovi
U slučaju homogenih konturnih uslova komponente vektora $\mathbf{q}_o^*$ su jednake nuli. Tada se dobija

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_s^* &= \mathbf{K}_{ss}^{*-1} \mathbf{S}_s^* \\ \mathbf{R}_o^* &= \mathbf{K}_{os}^* \mathbf{q}_s^* - \mathbf{Q}_o^* \end{aligned} \tag{6..125}$$

Nehomogeni konturni uslovi - uticaji pomeranja oslonaca
U slučaju nehomogenih konturnih uslova bar jedna od komponenti vektora $\mathbf{q}_o$ je različita od nule.
Određivanje vektora sila ma krajevima štapa
Kada su poznata pomeranja svih čvorova vektor sila na krajevima štapa j u lokalnom koordinatnom sistemu određuje se iz jednačine štapa

$$\mathbf{R}^j = \widehat{\mathbf{k}}^j \mathbf{q}^{*j} - \mathbf{Q}^j \tag{6..126}$$

6.6.2. Formiranje marice krutosti sistema postupkom kodnih brojeva

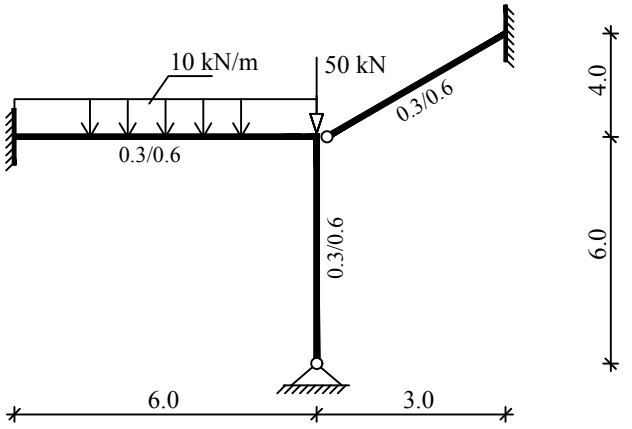
Ako se jednačine ispišu za sve čvorove sistema tako da indeksi i i k uzmu oznake odgovarajućih čvorova dobija se sistem jednačina. Postupak kodnih brojeva zasniva se na tome da se u matricama krutosti štapova čvorne matrice krutosti kodiraju prema unapred usvojenim kodnim brojevima koji su dodeljeni čvorovima nosača. Postupak:

- vrši se numeracija čvorova nosača brojevima 1 do k

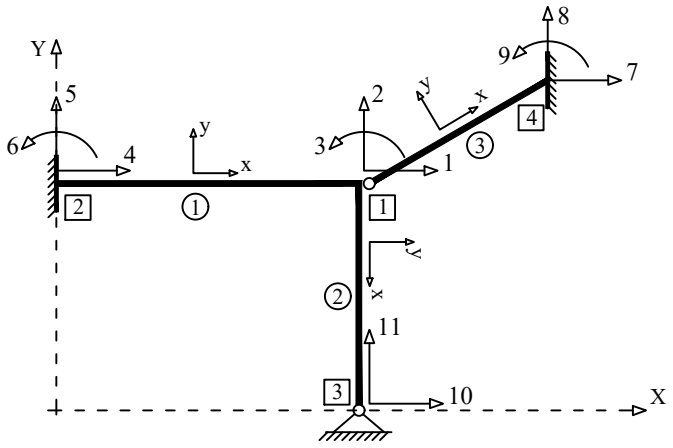
- numeracija štapova nosača brojevima 1 do N
- usvaja se lokalni koordinatni sistem za svaki pojedini štap
- usvajaju se generalisana pomeranja za svaki čvor
- formiraju se matrice krutosti u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu i vrši se numerisanje vrsta i kolona matrica štapova prema usvojenim generalisanim pomeranjima za svaki čvor.
- formira se kvadratna nula matrica reda n, gde je n ukupan broj stepeni slobode sistema.
- u prethodno formiranu matricu se unose elementi matrica krutosti pojedinih štapova na pozicije koje odgovaraju njihovim oznakama, odnodno indeksima u globalnom koordinatnom sistemu. Kada se pri tome na istoj poziciji nađu elementi dva ili više štapova oni se sabiraju.

6.6.3. Zadatak

Za nosač na skici izračunati i nacrtati dijagrame presečnih sila. Dimenzije poprečnih preseka štapova su prikazane na skici. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2



Izbor generalisanih pomeranja čvorova nosača

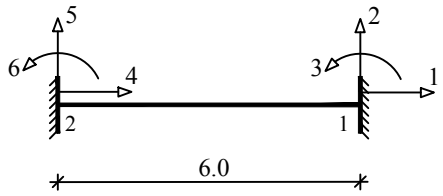


Nepoznata generalisana pomeranja: 1, 2, 3

ŠTAP	i	k	$l[m]$	$F[m^2]$	$I[m^4]$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1	2	1	6.0	0.18	0.0054	0	0	1
2	1	3	6.0	0.18	0.0054	270	-1	0
3	1	4	5.0	0.18	0.0054	53.13	0.8	0.6

Matrice krutosti štapova u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

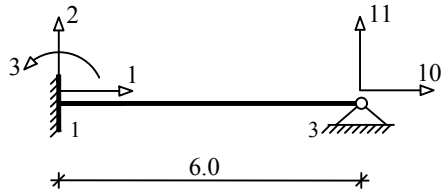
Štap 1



Matrica krutosti štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_1 = \widehat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K}_1^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 900000 & 0 & 0 & -900000 & 0 & 0 \\ 0 & 9000 & 27000 & 0 & -9000 & 27000 \\ 0 & 27000 & 108000 & 0 & -27000 & 54000 \\ -900000 & 0 & 0 & 900000 & 0 & 0 \\ 0 & -9000 & -27000 & 0 & 9000 & -27000 \\ 0 & 27000 & 54000 & 0 & -27000 & 108000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Štap 2



Matrica krutosti štapa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 900000 & 0 & 0 & -900000 & 0 \\ 0 & 2250 & 13500 & 0 & -2250 \\ 0 & 13500 & 81000 & 0 & -13500 \\ -900000 & 0 & 0 & 900000 & 0 \\ 0 & -2250 & -13500 & 0 & 2250 \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije

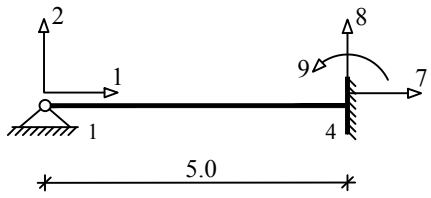
$$\mathbf{T}_2 == \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K}_2\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -900000 & 0 & 0 & 900000 \\ 2250 & 0 & 13500 & -2250 & 0 \\ 13500 & 0 & 81000 & -13500 & 0 \\ 0 & 900000 & 0 & 0 & -900000 \\ -2250 & 0 & -13500 & 2250 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_2^* = \mathbf{T}_2^T\widehat{\mathbf{K}}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2250 & 0 & 13500 & -2250 & 0 \\ 0 & 900000 & 0 & 0 & -900000 \\ 13500 & 0 & 81000 & -13500 & 0 \\ -2250 & 0 & -13500 & 2250 & 0 \\ 0 & -900000 & 0 & 0 & 900000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

Štap 3



Matrica krutosti štapa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1080000 & 0 & -1080000 & 0 & 0 \\ 0 & 3888 & 0 & -3888 & 19440 \\ -1080000 & 0 & 1080000 & 0 & 0 \\ 0 & -3888 & 0 & 3888 & -19440 \\ 0 & 19440 & 0 & -19440 & 97200 \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_3 = \mathbf{K}_3\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 648000 & 864000 & -648000 & -864000 & 0 \\ -3110.40 & 2332.80 & 3110.40 & -2332.80 & 19440 \\ -648000 & -864000 & 648000 & 864000 & 0 \\ 3110.40 & -2332.80 & -3110.40 & 2332.80 & -19440 \\ -15552 & 11664 & 15552 & -11664 & 97200 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_3^* = \mathbf{T}_3^T \widehat{\mathbf{K}}_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 391288.32 & 516533.76 & -391288.32 & -516533.76 & -15552 \\ 516533.76 & 692599.68 & -516533.76 & -692599.68 & 11664 \\ -391288.32 & -516533.76 & 391288.32 & 516533.76 & 15552 \\ -516533.76 & -692599.68 & 516533.76 & 692599.68 & -11664 \\ -15552 & 11664 & 15552 & -11664 & 97200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

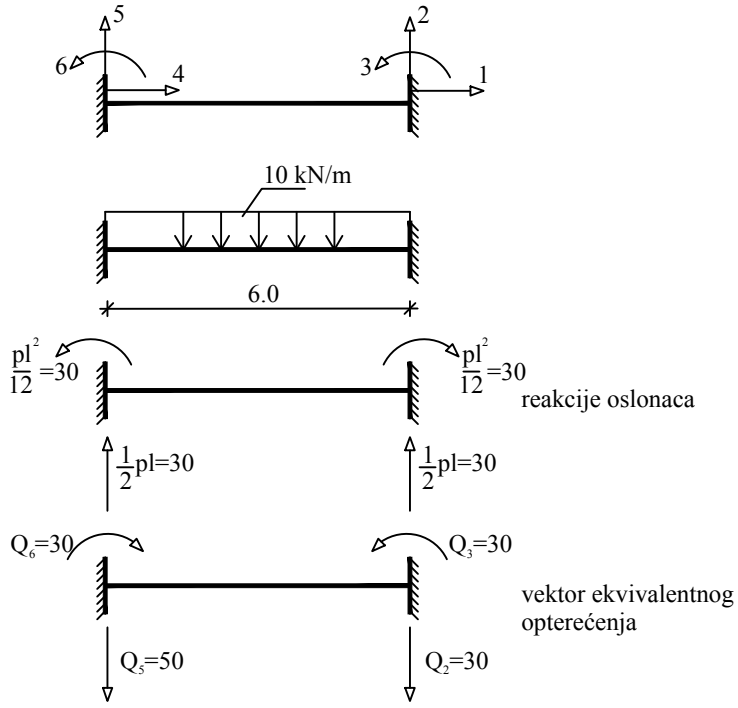
Podmatrica matrice krutosti sistema

$$\mathbf{K}_{ss}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1293538.32 & 516533.76 & 13500 \\ 516533.76 & 1601599.68 & -27000 \\ 13500 & -27000 & 189000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Vektori ekvivalentnog opterećenja

Vektori ekvivalentnog opterećenja po štapu

Štap 1



$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -30 \\ 0 \\ -30 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Ukupni vektor ekvivalentnog opterećenja za nepoznata generalisana pomeranja po štapovima

$$\mathbf{Q}_s^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Ukupni vektor ekvivalentnog opterećenja za nepoznata generalisana pomeranja po čvorovima

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Ukupan vektori ekvivalentnog opterećenja podsistema

$$\mathbf{S}_s^* = \mathbf{Q}_s^* + \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Nepoznata generalisana pomeranja

$$\mathbf{K}_{ss}^* \cdot \mathbf{q}_s^* = \mathbf{S}_s^*$$

$$\mathbf{q}_s^* = \mathbf{K}_{ss}^{*-1} \cdot \mathbf{S}_s^* = \begin{bmatrix} 1.994618 \cdot 10^{-5} \\ -5.386076 \cdot 10^{-5} \\ 1.496110 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Sile na krajevima štapa

$$\mathbf{R}_i = \widehat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{q}_i^* - \mathbf{Q}_i$$

Štap 1

$$\mathbf{R}_1 = \widehat{\mathbf{K}}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.994618 \cdot 10^{-5} \\ -5.386076 \cdot 10^{-5} \\ 1.496110 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -30 \\ 0 \\ -30 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.951 \\ 34.524 \\ 39.533 \\ 17.951 \\ 25.475 \\ -12.388 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

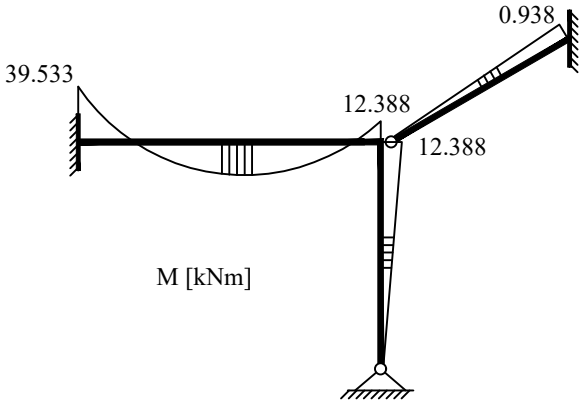
Štap 2

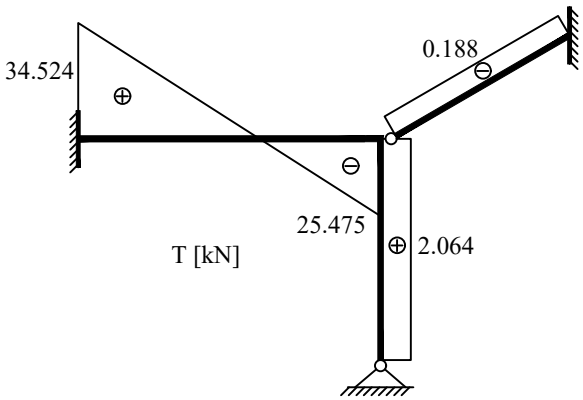
$$\mathbf{R}_2 = \widehat{\mathbf{K}}_2 \begin{bmatrix} 1.994618 \cdot 10^{-5} \\ -5.386076 \cdot 10^{-5} \\ 1.496110 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 48.474 \\ 2.064 \\ 12.388 \\ -48.474 \\ -2.065 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

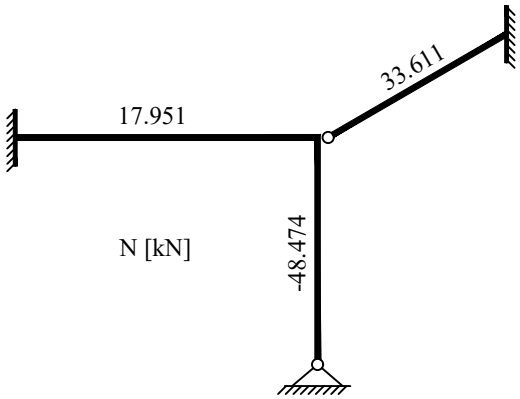
Štap 3

$$\mathbf{R}_3 = \widehat{\mathbf{K}}_3 \begin{bmatrix} 1.994618 \cdot 10^{-5} \\ -5.386076 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -33.611 \\ -0.188 \\ 33.611 \\ 0.188 \\ -0.938 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Dijagrami presečnih sila

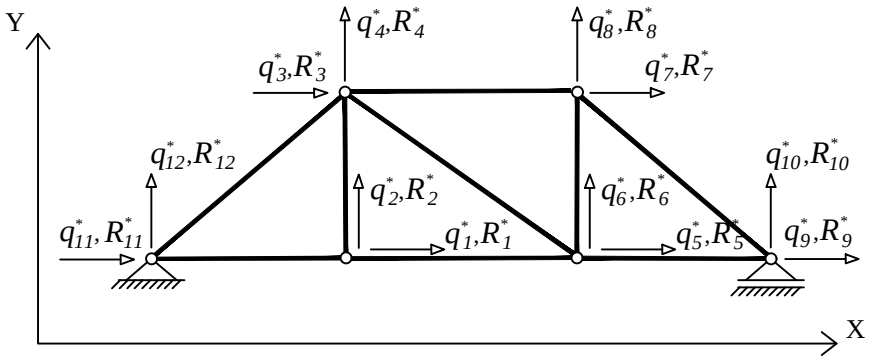






6.7. Rešetkasti nosači

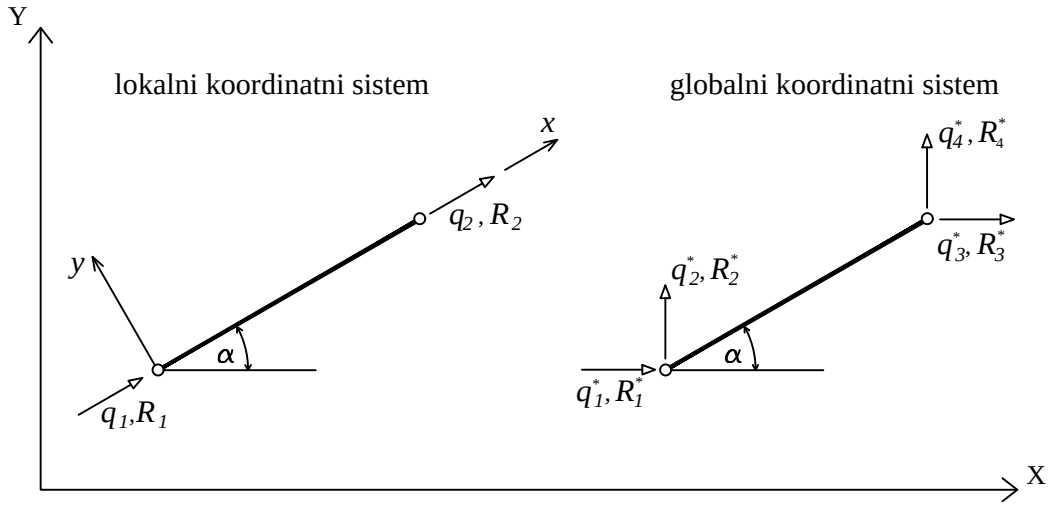
Sastoje se od prostih štapova koji su zglavkasto vezani u čvorovima. Svaki čvor ima 2 stepena slobode pomeranja, komponente pomeranja u i v u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema X i Y.



Slika 72.

Ukupan broj pomeranja čvorova N jednak je dvostrukom broju čvorova, $N = 2k$. Od ukupnog broja pomeranja, z_o pomeranja se mogu odrediti iz uslova kompatibilnosti pomeranja oslonaca. Nosač na skici:

- Broj čvorova $k = 6$
- Broj ŏslonaca $z_o = 3$
- Broj stepeni slobode pomeranja $N = 2k = 12$
- Broj nepoznatih pomeranja $n = N - z_o = 12 - 3 = 9$



Slika 73.

Element rešetke je prost štap koji ima 2 stepena slobode pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu, odnosno četiri stepena slobode pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu.

Vektor sila $\mathbf{R}$, pomeranja $\mathbf{q}$ i ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}$ prostog štapa u lokalnom koordinatnom sistemu su sledeći:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{6..127}$$

Matrica krutosti $\mathbf{k}$ prostog štapa u lokalnom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{k} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6..128}$$

Gde je E modul elastičnosti, F površina poprečnog preseka, a L dužina štapa.
Vektor pomeranja $\mathbf{q}^*$, vektor sila $\mathbf{R}^*$ i vektor ekvivalnetnog opterećenja $\mathbf{Q}^*$ prostog štapa u globalnom koordinatnom sistemu su sledeći:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ \\ q_2^* \\ \\ q_3^* \\ \\ q_4^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ \\ R_2^* \\ \\ R_3^* \\ \\ R_4^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} Q_1^* \\ \\ Q_2^* \\ \\ Q_3^* \\ \\ Q_4^* \end{bmatrix} \tag{6..129}$$

Matrice transformacije $\mathbf{T}$ i $\mathbf{T}^T$ definišu preslikavanje vektora sila, tj. pomeranja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem i obrnuto:

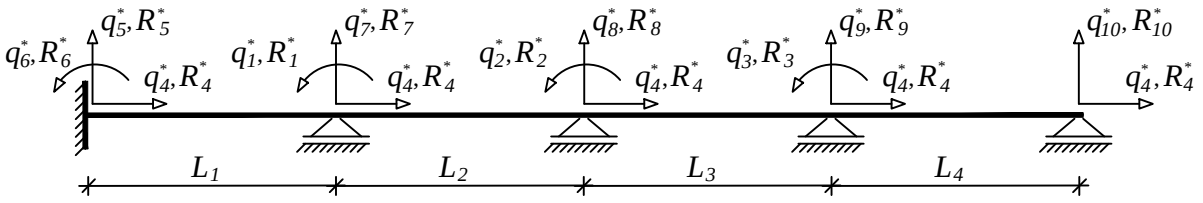
$$\begin{aligned} &\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}^* \qquad \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^* \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^* \\ &\mathbf{q}^* = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{q}^* \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R}^* \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}^* \end{aligned} \tag{6..130}$$

Matrica transformacije za prost štap je reda 2x4:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{6..131}$$

6.8. Kontinualni nosači

Kontinualni nosači su specijalan slučaj ortogonalnih nosača. Ose svih štapova su horizontalne i leže duž jednog pravca. Nepoznate veličine kod kontinualnih nosača sa nepomerljivim osloncima su obrtanja oslonačkih čvorova.



Slika 74.

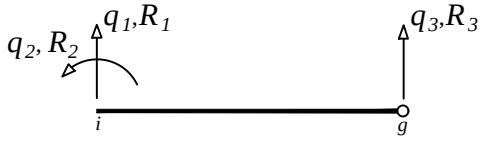
ma
Kontinualni nosač na skici se sastoji od 4 štapa od koji su štapovi 1 , 2, 3 štapovi tipa k dok je štap 4 tipa g. Od mogućih 9 pomeranja nepoznata su samo obrtanja u čvorovima 1, 2 i 3: q_1^*, q_2^*, q_3^*.
Matrice krutosti štapova su jednake matricama krutosti izloženih savijanju.

Štap tipa k

Slika 75.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6..132)$$

Štap tipa g



Slika 76.

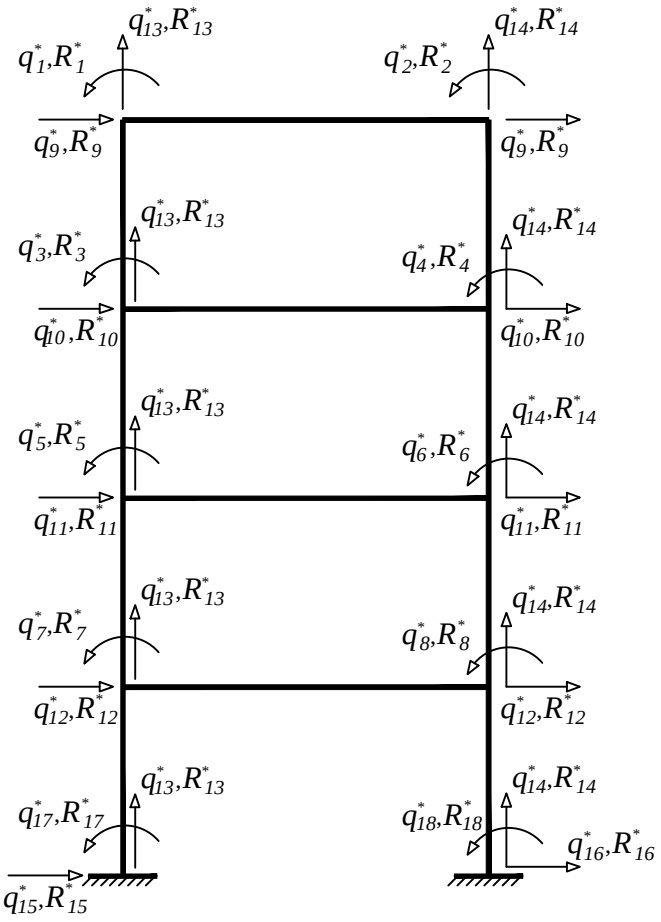
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (6..133)$$

6.9. Ortogonalni nosači

Ortogonalni nosači su nosači čiji su štapovi paralelni ili međusobno zaklapaju prav ugao. Kod takvih nosača uticaj normalnih sila na deformaciju se može zanemariti bez većeg uticaja na sile u presecima nosača.
Zanemarenje uticaja normalnih sila u matričnoj analizi:

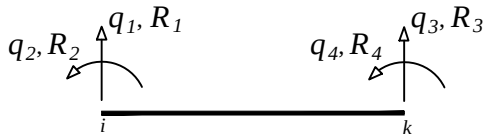
- Smanjuje broj nepoznatih komponenata pomeranja nosača
- Redukuje matrice krutosti štapova
- Pravilnim izborom lokalnih osa izbegava se transformacija vektora sila i pomeranja.

Ako se uticaj normalnih sila na deformaciju zanemari pomeranja krajeva štapa međusobno su jednaka, tj. pomeranja svih čvorova nosača u pravcu jednog poteza štapova međusobno su jednaka. Na slici 77 je prikazan način obeležavanja generalisanih sila i pomeranja za slučaj ortogonalnih nosača.



Slika 77.

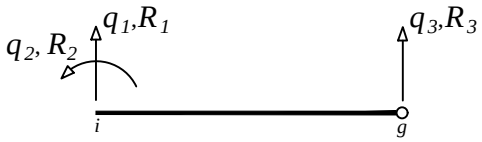
Matrice krutosti:
Štap tipa k



Slika 78.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{6..134}$$

Štap tipa g



Slika 79.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{6..135}$$

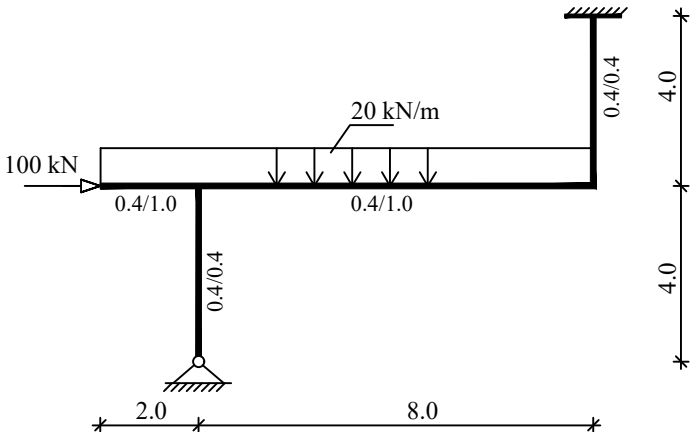
Matrice krutosti štapova kod kojih se uticaj normalnih sila zanemaruje su matrice krutosti štapova izloženih savijanju. Njihov red je za dva niži od reda matrica krutosti odgovarajućih štapova kod kojih se N sile ne zanemaruju.
Da bi izbegli transformaciju lokalni koordinatni sistem treba postaviti tako da prvi čvor bude:

- Levi čvor kod horizontalnih štapova
- Gornji čvor kod vertikalnih štapova

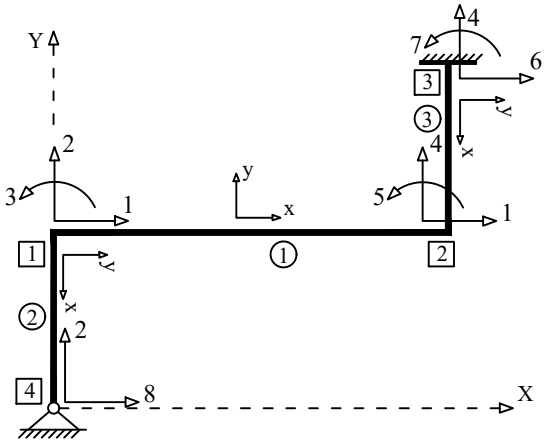
Izborom levog čvora štapa za koordinatni početak horizontalnih štapova dobija se da je lokalna x osa paralelna globalnoj X osi tako da je matrica transformacije jedinična matrica. Ako se kod vertikalnih štapova gornji čvor izabere za prvi tada se pravac pozitivnog pomeranja u pravcu lokalne y ose poklapa sa pravcem pozitivnog pomeranja globalne X ose pa transformacija nije potrebna.

6.9.1. Zadatak

Za nosač na skici izračunati i nacrtati dijagrame presečnih sila ukoliko se uticaj normalnih sila na deformaciju zanemaruje. Dimenzije poprečnih preseka štapova su prikazane na skici. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2



Izbor generalisanih pomeranja čvorova nosača

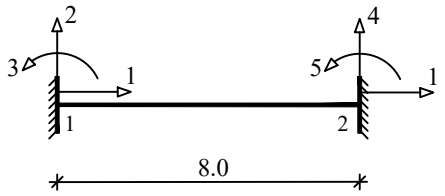


Nepoznata generalisana pomeranja: 1, 3, 5

ŠTAP	i	k	$l[m]$	$F[m^2]$	$I[m^4]$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1	1	2	8.0	0.4	0.0333	0	0	1
2	1	4	4.0	0.16	0.002133	270	-1	0
3	3	2	4.0	0.16	0.002133	270	-1	0

Matrice krutosti štapova u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

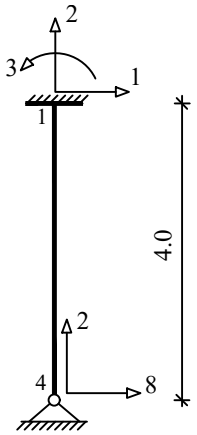
Štap 1



Matrica krutosti štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_1 = \widehat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K}_1^* = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 23437.50 & 93750 & -23437.50 & 93750 \\ 93750 & 500000 & -93750 & 250000 \\ -23437.50 & -93750 & 23437.50 & -93750 \\ 93750 & 250000 & -93750 & 500000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

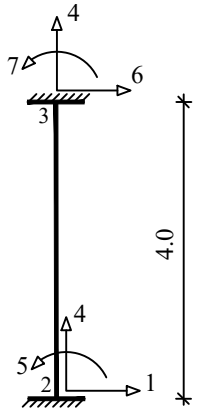
Štap 2



Matrica krutosti štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_2 = \widehat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K}_2^* = \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 3 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3000 & 12000 & -3000 \\ 12000 & 48000 & -12000 \\ -3000 & -12000 & 3000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{matrix}$$

Štap 3



Matrica krutosti štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_3 = \widehat{\mathbf{K}}_3 = \mathbf{K}_3^* = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 6 & 7 & 1 & 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 12000 & 24000 & -12000 & 24000 \\ 24000 & 64000 & -24000 & 32000 \\ -12000 & -24000 & 12000 & -24000 \\ 24000 & 32000 & -24000 & 64000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{matrix}$$

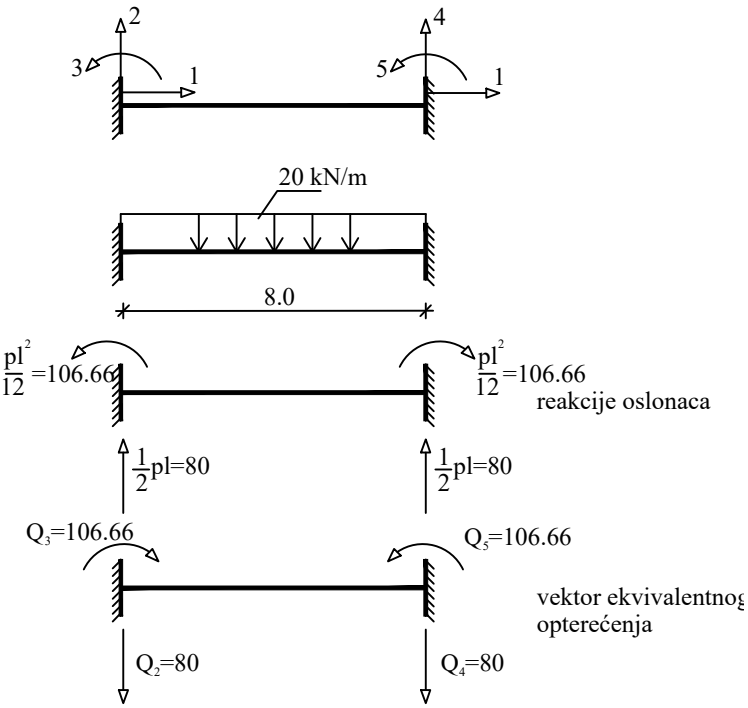
Podmatrica matrice krutosti sistema

$$\mathbf{K}_{ss} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 15000 & 12000 & -24000 \\ 12000 & 548000 & 250000 \\ -24000 & 250000 & 564000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Vektori ekvivalentnog opterećenja

Vektori ekvivalentnog opterećenja po štapu

Štap 1



$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^* = \begin{bmatrix} -80 \\ -106.66 \\ -80 \\ 106.66 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Ukupni vektor ekvivalentnog opterećenja za nepoznata generalisana pomeranja po štapovima

$$\mathbf{Q}_s^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -106.66 \\ 106.66 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Ukupni vektor ekvivalentnog opterećenja za nepoznata generalisana pomeranja po čvorovima

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Ukupan vektori ekvivalentnog opterećenja podsistema

$$\mathbf{S}_s^* = \begin{bmatrix} 100 \\ -66.66 \\ 106.66 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Nepoznata generalisana pomeranja

$$\mathbf{K}_{ss}^* \cdot \mathbf{q}_s^* = \mathbf{S}_s^*$$

$$\mathbf{q}_s^* = \mathbf{K}_{ss}^{*-1} \cdot \mathbf{S}_s^* = \begin{bmatrix} 8.62375 \cdot 10^{-3} \\ -7.0719 \cdot 10^{-4} \\ 8.6956 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Sile na krajevima štapa

$$\mathbf{R}_i = \widehat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{q}_i^* - \mathbf{Q}_i$$

Štap 1

$$\mathbf{R}_1 = \widehat{\mathbf{K}}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -7.0719 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 8.6956 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} - \begin{bmatrix} -80 \\ -106.66 \\ -80 \\ 106.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95.222 \\ -29.538 \\ 64.779 \\ 151.316 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

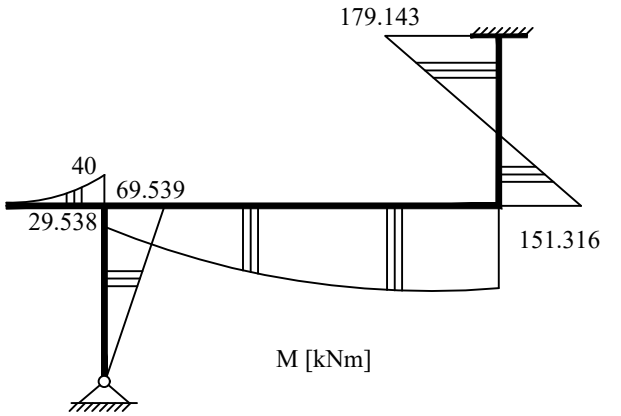
Štap 2

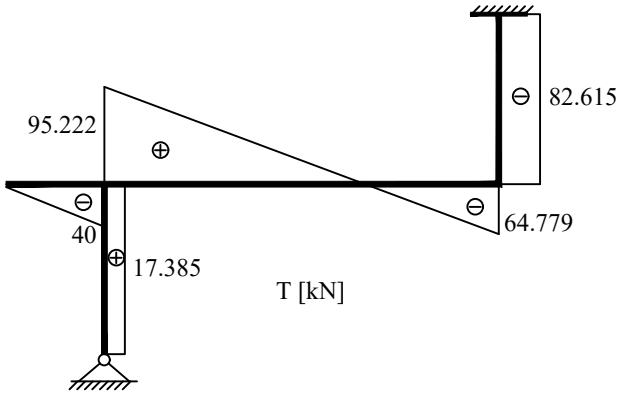
$$\mathbf{R}_2 = \widehat{\mathbf{K}}_2 \begin{bmatrix} 8.6237 \cdot 10^{-3} \\ -7.07197 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 17.385 \\ 69.539 \\ -17.385 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{matrix}$$

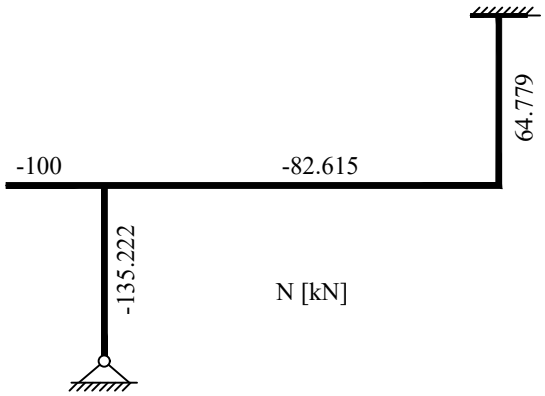
Štap 3

$$\mathbf{R}_3 = \widehat{\mathbf{K}}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.62375 \cdot 10^{-3} \\ 8.6956 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -82.615 \\ -179.143 \\ 82.615 \\ -151.317 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{matrix}$$

Dijagrami presečnih sila

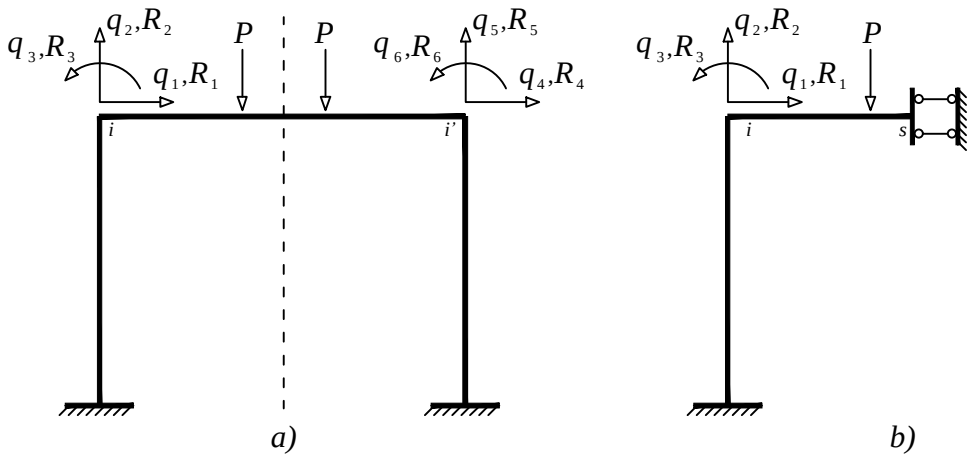






6.10. Simetrični nosači

U poglavlju 5 su opisani simetrični nosači. To su nosači čiji su elementi simetrično raspoređeni u odnosu na jednu ili više osa simetrije. Tu karakteristiku ćemo iskoristiti u matričnoj analizi na način da je moguće smanjiti broj nepoznatih za slučaj simetričnih nosača opterećenih simetričnim opterećenjem, uvodeći novi tip štapa koji se naziva štap tipa s.



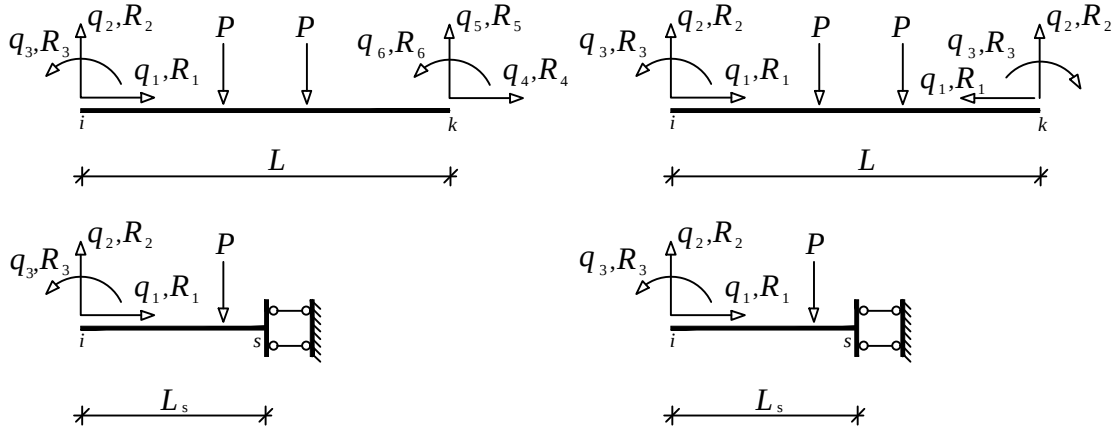
Slika 80.

Na slici 80a je prikazan simetričan nosač koji je opterećen simetričnim opterećenjem. Polovljenjem štapa ii' dobija se štap is (slika 80b) kome se dodaje odgovarajući oslonac u čvoru s, saglasno pravilima koje smo spomenuli u poglavlju 5. Dobijeni štap ima 4 nepoznata pomeranja, tri komponente pomeranja u čvoru i i vertikalno pomeranje oslonca u čvoru s na osi simetrije. Vertikalno pomeranje u osi nije neophodno za određivanje sila u štapu ii' pošto se one mogu dobiti iz pomeranja krajeva tog štapa, tako da vektor sila $\mathbf{R}$ i vektor pomeranja $\mathbf{q}$ štapa tipa s sadrže samo komponente pomeranja tj.sila u čvoru i:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{6..136}$$

Matrica krutosti štapa tipa s dobija se kada u vezu između sila i pomeranja štapa tipa k koga polovi osa simetrije unesemo veze koje važe između pomeranja u čvorovima i i i' pri simetričnom opterećenju.

Štap tipa k



Slika 81.

Matrica krutosti štapa tipa s dobija se tako što se eliminišu sile i pomeranja u čvoru i'.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -q_1 \\ q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \tag{6..137}$$

Veza između vektora sila i vektora pomeranja $\mathbf{R} = \mathbf{kq}$ za štap tipa k izložen simetričnoj deformaciji glasi:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -q_1 \\ q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \tag{6..138}$$

Ako vektor sila u čvoru i izrazimo preko vektora pomeranja u tom čvoru, tj. ako pomnožimo gornji deo matrice krutosti vektorom pomeranja i iz proizvoda izvučemo komponente pomeranja

u čvoru i, dobiće se veza između vektora sila i vektora pomeranja u čvoru i u sledećem obliku:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dfrac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{6..139}$$

Matrica koja daje vezu između vektora sila i vektora pomeranja predstavlja matricu krutosti štapa tipa s:

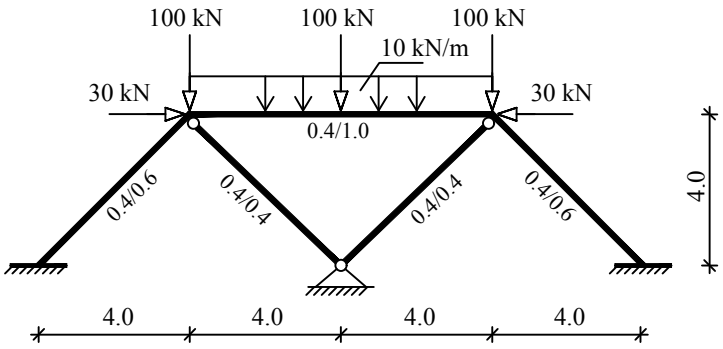
$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 2\dfrac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dfrac{EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{EI}{L_s} \end{bmatrix} \tag{6..140}$$

U gornjoj jednačini L je dužina štapa ii' dok je L_s dužina štapa tipa s.
Vektor ekvivalentnog opterećenja štapa:

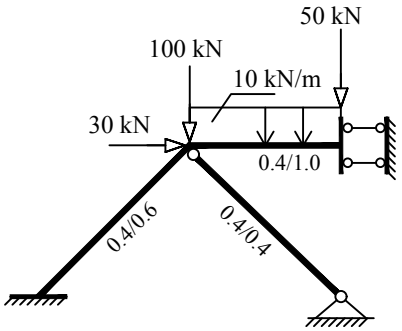
$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{6..141}$$

6.10.1. Zadatak

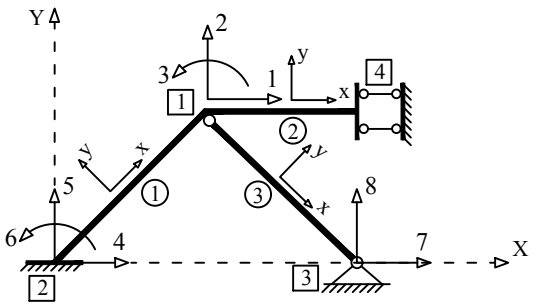
Za nosač na skici izračunati i nacrtati dijagrame presečnih sila. Dimenzije poprečnih preseka štapova su prikazane na skici. Modul elastičnosti je $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2



Simetričan nosač - simetrično opterećenje



Izbor generalisanih pomeranja čvorova nosača

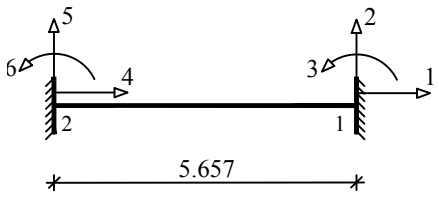


Nepoznata generalisana pomeranja: 1, 2, 3

ŠTAP	i	k	$l[m]$	$F[m^2]$	$I[m^4]$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1	2	1	5.657	0.24	0.0072	45	0.707	0.707
2	1	4	4.0	0.40	0.033	0	0	1
3	1	3	5.657	0.16	0.002133	315	−0.707	0.707

Matrice krutosti štapova u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

Štap 1



Matrica krutosti štapa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1272759.41 & 0 & 0 & -1272759.41 & 0 & 0 \\ 0 & 14317.81 & 40497.91 & 0 & -14317.81 & 40497.91 \\ 0 & 40497.91 & 152731.13 & 0 & -40497.91 & 76365.56 \\ -1272759.41 & 0 & 0 & 1272759.41 & 0 & 0 \\ 0 & -14317.81 & -40497.91 & 0 & 14317.81 & -40497.91 \\ 0 & 40497.91 & 76365.56 & 0 & -40497.91 & 152731.13 \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije

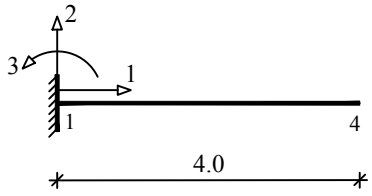
$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K}_1\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 899840.91 & 899840.91 & 0 & -899840.91 & -899840.91 & 0 \\ -10122.69 & 10122.69 & 40497.91 & 10122.69 & -10122.69 & 40497.91 \\ -28632.02 & 28632.02 & 152731.13 & 28632.02 & -28632.02 & 76365.57 \\ -899840.91 & -899840.91 & 0 & 899840.91 & 899840.91 & 0 \\ 10122.69 & -10122.69 & -40497.91 & -10122.69 & 10122.69 & -40497.91 \\ -28632.02 & 28632.02 & 76365.57 & 28632.02 & -28632.02 & 152731.13 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_1^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 643344.26 & 629030.78 & -28632.02 & -643344.26 & -629030.78 & -28632.02 \\ 629030.78 & 643344.26 & 28632.02 & -629030.78 & -643344.26 & 28632.02 \\ -28632.02 & 28632.02 & 152731.13 & 28632.02 & -28632.02 & 76365.57 \\ -643344.26 & -629030.78 & 28632.02 & 643344.26 & 629030.78 & 28632.02 \\ -629030.78 & -643344.26 & -28632.02 & 629030.78 & 643344.26 & -28632.02 \\ -28632.02 & 28632.02 & 76365.57 & 28632.02 & -28632.02 & 152731.13 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

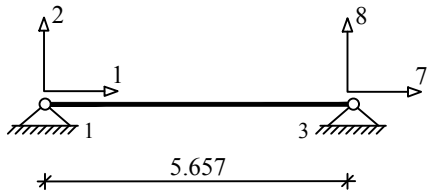
Štap 2



Matrica krutosti štapa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_2 = \widehat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K}_2^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3000000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 250000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Štap 3



Matrica krutosti štapa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 848506.28 & -848506.28 \\ -848506.28 & 848506.28 \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_3 = \mathbf{K}_3\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 599893.94 & -599893.94 & -599893.94 & 599893.94 \\ -599893.94 & 599893.94 & 599893.94 & -599893.94 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{K}_3^* = \mathbf{T}_3^T\widehat{\mathbf{K}}_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 424125.01 & -424125.01 & -424125.01 & 424125.01 \\ -424125.01 & 424125.01 & 424125.01 & -424125.01 \\ -424125.01 & 424125.01 & 424125.01 & -424125.01 \\ 424125.01 & -424125.01 & -424125.01 & 424125.01 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

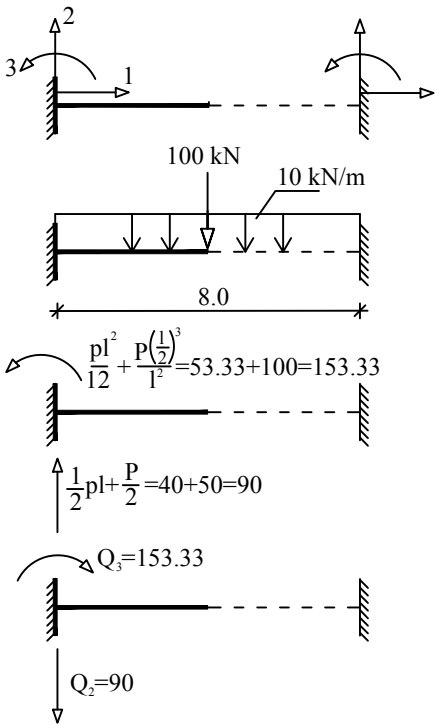
Podmatrica matrice krutosti sistema

$$\mathbf{K}_{ss} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4067469.27 & 204905.77 & 28632.02 \\ 204905.77 & 1067469.27 & -28632.02 \\ 28632.02 & -28632.02 & 402731.13 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Vektori ekvivalentnog opterećenja

Vektori ekvivalentnog opterećenja po štapu

Štap 2



reakcije oslonaca

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -153.33 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

vektor ekvivalentnog opterećenja

Ukupni vektor ekvivalentnog opterećenja za nepoznata generalisana pomeranja po štapovima

$$\mathbf{Q}_s^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -153.33 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Ukupni vektor ekvivalentnog opterećenja za nepoznata generalisana pomeranja po čvorovima

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 30 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Ukupan vektori ekvivalentnog opterećenja podsistema

$$\mathbf{S}_s^* = \mathbf{Q}_s^* + \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 30 \\ -190 \\ -153.33 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Nepoznata generalisana pomeranja

$$\mathbf{K}_{ss}^* \cdot \mathbf{q}_s^* = \mathbf{S}_s^*$$

$$\mathbf{q}_s^* = \mathbf{K}_{ss}^{*-1} \cdot \mathbf{S}_s^* = \begin{bmatrix} 1.985537 \cdot 10^{-5} \\ -1.924194 \cdot 10^{-4} \\ -3.958253 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Sile na krajevima štapa

$$\mathbf{R}_i = \widehat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{q}_i^* - \mathbf{Q}_i$$

Štap 1

$$\mathbf{R}_1 = \widehat{\mathbf{K}}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.985537 \cdot 10^{-5} \\ -1.924194 \cdot 10^{-4} \\ -3.958253 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 155.28 \\ -13.88 \\ -24.15 \\ -155.28 \\ 13.88 \\ -54.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

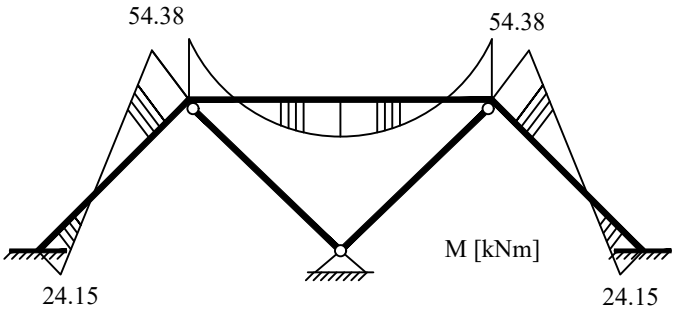
Štap 2

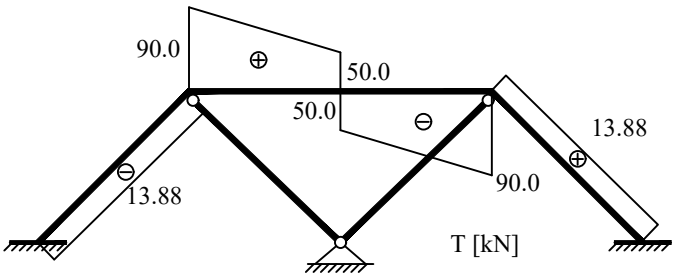
$$\mathbf{R}_2 = \widehat{\mathbf{K}}_2 \begin{bmatrix} 1.985537 \cdot 10^{-5} \\ -1.924194 \cdot 10^{-4} \\ -3.958253 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -153.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.57 \\ 90 \\ 54.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

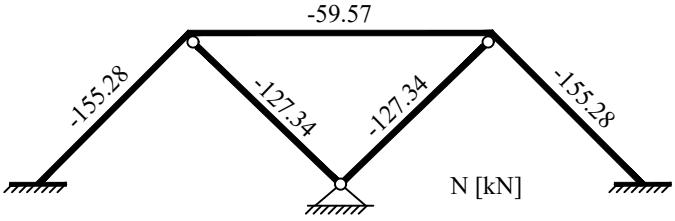
Štap 3

$$\mathbf{R}_3 = \widehat{\mathbf{K}}_3 \begin{bmatrix} 1.985537 \cdot 10^{-5} \\ -1.924194 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 127.34 \\ -127.34 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix}$$

Dijagrami presečnih sila







Literatura

Brčić Stanko, Tehnička mehanika I, Akademska misao, 2012

Brčić Vlatko, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1989

Đurić Milan, Statika konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1979

Đurić Milan, Nikolić Dragoljub, Statika konstrukcija - Uticaj pokretnog opterećenja, Naučna knjiga, Beograd, 1983

Petronijević Mira, Teorija konstrukcija 1, Akademska misao, Beograd, 2019

Petronijević Mira, Danilović Nefovska Marija, Statika konstrukcija II - Zbirka zadataka sa izvodima iz teorije, Građevinski fakultet, Beograd, 2009

Sekulović Miodrag, Teorija linijskih nosača, Građevinska knjiga, Beograd, 2005

Sekulović Miodrag, Matrična analiza konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1991