



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET  
SUBOTICA



**PETAR SANTRAČ**

**FUNDIRANJE - INTERAKCIJA KONSTRUKCIJE I TLA**

Elektronski udžbenik  
ISBN: 978-86-80297-57-6

Autor: V.Prof. dr Petar SANTRAČ, dipl.inž.građ.  
Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet u Subotici

Recenzenti: Docent Dr Selimir LELOVIĆ, dipl.inž.građ.  
Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet u Beogradu

Prof. dr Mirjana VUKIĆEVIĆ, dipl.inž.građ.  
Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet u Beogradu

Izdavač: Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet u Subotici

Za izdavača: Prof dr Miroslav Bešević, dipl.inž.građ.

Nastavno-naučno veće Građevinskog fakulteta u Subotici, na sednici održanoj 23.02.2021. godine, donelo je odluku br. 11/2021 kojom se odobrava štampanje ovog udžbenika.

Tehnička obrada: Nemanja Bralović, dipl.mast.građ.

### SVA PRAVA ZADRŽANA

Preštampavanje i umnožavanje zabranjeno u celini i u delovima

ISBN 978-86-80297-57-6

ЦИП – Каталогизација у публикацији  
Библиотека Матице српске, Нови Сад  
624.15(075.8)

### **САНТРАЧ, Петар Б., 1956-**

Fundiranje - interakcija konstrukcije i tla [Elektronski izvor] / Petar Santrač. - Subotica  
Građevinski fakultet, 2021

Način pristupa (URL):

[http://www.gf.uns.ac.rs/~zbornik/eludzbenik/Fundiranje\\_Interakcija%20konstrukcije%20i%20tla.pdf](http://www.gf.uns.ac.rs/~zbornik/eludzbenik/Fundiranje_Interakcija%20konstrukcije%20i%20tla.pdf).

- Opis zasnovan na stanju na dan 19.3.2021. - Nasl. sa naslovnog ekranu. - Bibliografija.

ISBN 978-86-80297-57-6

COBISS.SR-ID 3460378

**SADRŽAJ**

<b>PREDGOVOR</b>	<b>5</b>
<b>INTERAKCIJA – SADEJSTVO KONSTRUKCIJE I TLA</b>	<b>7</b>
<b>MODELI DEFORMABILNE PODLOGE</b>	<b>9</b>
<b>GREDA NA DEFORMABILNOJ PODLOZI</b>	<b>17</b>
3.1 Jednačina grede na deformabilnoj podlozi .....	17
3.2 Jednačina savijanja grede na Vinkler-ovoj podlozi.....	17
3.3 Jednačina savijanja grede na Filolenko-Borodich-evoj podlozi .....	19
3.4 Jednačina savijanja grede na Pasternak-ovoj podlozi .....	20
3.5 Jednačina savijanja grede na Hetenyi-evoj podlozi.....	20
<b>METODA POČETNIH PARAMETARA ZA BESKONAČNU GREDU</b>	<b>21</b>
4.1 Vertikalna sila na beskonačnoj gredi na Vinkler-ovoj podlozi .....	22
4.2 Spreg sila na beskonačnoj gredi na Vinkler-ovoj podlozi .....	25
4.3 Linijsko opterećenje beskonačne grede na Vinkler-ovoj podlozi .....	27
4.4 Vertikalna sila na beskonačnoj gredi na Pasternak-ovoj podlozi.....	33
4.5 Spreg sila na beskonačnoj gredi na Pasternak-ovoj podlozi.....	33
4.6 Linijsko opterećenje beskonačne grede na Pasternak-ovoj podlozi.....	34
<b>METODA SUPERPOZICIJE OPTEREĆENJA ZA KONAČNU GREDU</b>	<b>38</b>
5.1 Konačna greda na Vinkler-ovoj podlozi .....	38
5.2 Klasifikacija grede na Vinkler-ovoj podlozi .....	41
5.3 Terensko određivanje modula reakcije tla .....	46
5.4 Određivanje modula reakcije tla korelacijom .....	48
5.5 Modul reakcije za proračun ploče na Vinklerovoj podlozi.....	51
<b>PRIBLIŽNO REŠENJE GREDE NA DEFORMABILNOJ PODLOZI</b>	<b>55</b>
6.1 Jednačina savijanja grede u diferencnom obliku.....	55
6.2 Određivanje statički ekvivalentnog čvornog opterećenja .....	59
6.3 Približan proračun grede na Vinkler-ovoj podlozi .....	61
6.4 Približan proračun grede na Pasternak-ovoj podlozi.....	67
<b>GREDNA NA NELINEARNOJ VINKLEROVOJ PODLOZI</b>	<b>72</b>
<b>PRIBLIŽAN PRORAČUN GREDE NA ELASTIČNOM KONTINUUMU</b>	<b>75</b>
8.1 Određivanje parametara deformabilnosti elastičnog kontinuuma .....	78
8.2 Uticaj izbora modela podloge na rezultate proračuna .....	83
<b>PRORAČUN INTERAKCIJE KONSTRUKCIJE TEMELJA I TLA</b>	<b>85</b>
9.1 Direktna metoda proračuna interakcije .....	86
9.2 Iterativna metoda proračuna interakcije .....	88
<b>PRORAČUN SAVITLJIVOG ZIDA U VINKLER-OVOJ SREDINI</b>	<b>97</b>
<b>PRORAČUN ŠIPOVA U VINKLER-OVOJ SREDINI</b>	<b>109</b>
11.1.1 Šip opterećen aksijalnom silom ( $k\tau = \text{const}$ ) .....	111
11.1.2 Šip opterećen aksijalnom silom ( $k\tau = \text{linearno}$ ).....	115
11.1.3 Šip opterećen aksijalnom silom u uslojenom tlu .....	118
11.2.1 Šip opterećen poprečnim pomeranjem glave ( $kh = \text{const}$ ).....	121
11.2.2 Šip opterećen obrtanjem glave ( $kh = \text{const}$ ).....	123
11.2.3 Šip opterećen pomeranjem i obrtanjem glave ( $kh = \text{const}$ ) .....	124

11.2.4 Šip opterećen poprečnom silom i momentom ( $kh = \text{const}$ ) .....	124
11.3.1 Šip opterećen poprečnom silom i momentom ( $kh = \text{linearno}$ ) .....	125
11.4 Šip opterećen na uvijanje – torziju glave ( $kh = \text{const}$ ) .....	126
11.5 Matrica krutosti šipa u lokalnom koordinatnom sistemu .....	127
11.6 Matrica krutosti šipa u globalnom koordinatnom sistemu .....	128
11.7 Uslovne jednačine ravnoteže naglavnice .....	130
11.8 Određivanje horizontalnog modula reakcije tla za šipove .....	133
<b>PRIBLIŽAN PRORAČUN ŠIPA U VINKLER-OVOJ SREDINI</b>	<b>145</b>
12.1 Šip opterećen aksijalnom silom .....	146
12.2 Šip opterećen horizontalnom silom i momentom .....	147
12.2.1 Slobodna glava šipa .....	148
12.2.2 Uklještena glava šipa .....	150
12.3 Šip u nelinearnoj Vinkler-ovoj sredini .....	156
12.3.1 Aksijalno opterećen šip ( $t-z$ i $Q-z$ krive ) .....	156
12.3.2 Bočno opterećen šip ( $p-y$ krive ) .....	158
<b>PRIBLIŽNA ANALIZA INTERAKCIJE GRUPE ŠIPOVA</b>	<b>160</b>
13.1 Interakcija između vertikalno opterećenih šipova .....	161
13.2 Grupa šipova opterećena vertikalnom silom .....	164
13.3 Grupa šipova opterećena vertikalnom silom i momentom .....	169
<b>INTERAKCIJA NAGLAVNICE ŠIPOVA I TLA</b>	<b>175</b>
14.1 Približna analize interakcije šip-naglavnica-tlo .....	176
<b>GRUPA ŠIPOVA OPTEREĆENA HORIZONTALNOM SILOM</b>	<b>182</b>
15.1 Metoda p-multiplikatora za horizontalno opterećenu grupu šipova .....	183
15.2 Metoda prema DIN1045 za horizontalno opterećenu grupu šipova .....	185
<b>LITERATURA</b>	<b>190</b>

## PREDGOVOR

Nastavni predmet Fundiranje se predaje na VII-smestru Građevinskog fakulteta u Subotici, na smeru za konstrukcije. Zajedno sa nastavnim predmetom Mehanika tla na V-semestru i Osnove funiranja na VI-semestru, predstavlja jedinstvenu celinu u okviru izučavanja praktične oblasti Geotehnike. Osim pomenutih predmeta, za praćenje i savladavanje nastavnog gradiva iz predmeta Fundiranje, potrebno je osnovno znanje iz predmeta Statika konstrukcija i Otpornost materijala.

Osnovna svrha predmeta Fundiranje kako je koncipiran na Građevinskom fakultetu, jeste upoznavanje sa postupcima rešavanja problema sadejstva odnosno interakcije konstrukcije (sup-strukture), temelja i temeljnog tla (sub-strukture).

U okviru klasičnog pristupa, kako u Mehanici tla tako i u Fundiranju, problemi nosivosti i pomeranja su razmatrani odvojeno. Stim u vezi, problemi nosivosti temelja, bočnog pritiska na potporne konstrukcije i stabilnosti analizirani su metodom granične ravnoteže ili metode teorije plastičnosti, a problemi sleganja i pomeranja metodama teorije elastičnosti i jednodimenzionalne deformacije. Sa razvojem i dostupnošću računara i softvera, uprošćen i često nerealan pristup se može zameniti numeričkim metodama koje vode računa o konstitutivnim vezama u tlu i kompatibilnosti pomeranja između temelja i tla ili konstrukcije, temelja i tla.

Fond časova, nivo postojećeg znanja i potreba za praktičnu primenu, opredelili su sadržaj predmeta na elementarnom nivou. Zbog toga su u okviru nastavnog gradiva, analizirani samo jednostavni primeri, u kojem se tlo kao deformabilna sredina tretira na vrlo uprošćen način, kao sistem linearno elastičnih opruga (Vinklerov model) ili nešto složenije, kao model linearno-elastičnog polu-prostora. Kod oba modela, zbog linearne veze između napona i deformacija važi princip superpozicije (nezavisnosti dejstva). Bez obzira na velik broj komercijalnih softvera, razvijenih za rešavanje problema u fundiranju, u predavanju nisu zanemarena postojeća analitička rešenja. Naime, analitička rešenja su alat za kontrolu numeričkih postupaka i način da se razume fizička suština problema i da se jasno sagledaju pretpostavke na kojima se zasniva proračunski model, kako bi se on mogao kritički primenjivati u praksi. Insistiranje samo na softveru, bez razumevanja i bez sposobnosti da se shvati fizička suština problema i sposobnosti da se rezultati kritički verifikuju, ne može inženjera voditi ka sigurnom i racionalnom rešenju.

U okviru ovog predmeta, analizirani su jednostavni praktični primeri, kao što su temeljne grede, šipovi ili ravanski problemi, koje student može vrlo lako i brzo rešiti bez korišćenja specijalnih kompjuterskih programa. Pošto se za proračun koriste numerički postupci, studenti se upućuju na korišćenje računarskog programa EXCEL koji je sastavni i besplatni deo Microsoft office-a na svakom PC-računaru. Program se koristiti u okviru računskih tabela (sheets) ili za napredne korisnike, u "Visual basic" kodu u pozadini.

U predmetu se intenzivno koristi metoda konačnih razlika (skraćeno MKR), kao uobičajen postupak rešavanja diferencijalnih jednačina u inžinjerskoj praksi. Kod linijskih i površinskih nosača, u MKR se u svakoj čvornoj tački diskretizacije pojavljuje jedna nepoznata (ugib), što rezultuje relativno malim brojem algebarskih jednačina koje se mogu lako rešavati.

Treba istaći, da između ostalog, postoji i drugi, moćniji i fleksibilniji metod, koji se naziva metoda konačnih elemenata (MKE). Međutim, kod ove metode, u čvornim tačkama se pojavljuje znatno veći broj nepoznatih. Tako na primer, kod temeljnih greda (linijskih nosača), umesto jedne nepoznate (ugib) u svakoj čvornoj tački imamo po dve nepoznate (ugib i nagib), a kod površinskih, umesto jedne (ugib), 3 nepoznate (ugib i 2 nagiba). Znato veći broj nepoznatih koji se pojavljuje u MKE, višestruko povećava proračun, zbog čega je u ovom predavanju, kao pogadnja za edukaciju, korišćena samo MKR. Ona u suštini pretstavlja jednostavniji numerički postupak od MKE, a pomoću nje se mogu takođe mogu uspešno rešavati problemi interakcije. MKE, koja ovde neće biti prikazana, izučava se na Građevinskom fakultetu na VIII semestru, u okviru posebnog jedno-semestralnog predmeta.

Nakon što student ovlada ovde prikazane teorijske postavke i praktične primere i samostalno reši postavljene zadatke, imaće jasan uvid u problematiku interakcije, elementarno znanje za rešavanje jednostavnih problema i dobru osnovu za buduću nadgradnju iz ove oblasti.

Za primenu u praktičnom radu, danas je za rešavanje geotehničkih problema i s tim u vezi problema interakcije raznih konstruktivnih celina, na raspolaganju vrlo velik broj kvalitetnih komercijalnih softvera. Svi oni koji žele više informacija o ovoj temi, mogu pogledati sajtove, na kojima mogu naći demo verzije softvera, objašnjenja i uputstva za korišćenje.

Subotica, 2020.

V.Prof dr Petar Santrač, dipl.inž.građ.

## INTERAKCIJA – SADEJSTVO KONSTRUKCIJE I TLA

Rešenja problema interakcije između deformabilnih tela imaju vrlo široku primenu u mnogim inžinjerskim disciplinama, međutim ona se po pravilu mogu dobiti samo primenom vrlo složenih numeričkih metoda. U probleme interakcije spada proračun konstrukcije u tlu ili na tlu kao što su npr. plitki temelji, duboki temelji, potporne konstrukcije, podzemne konstrukcije, tunelske obloge, proračun kompozitnih materijala i laminata, proračun plovećih struktura i slično.

Najjednostavnija rešenja problema interakcije opisuju sadejstvo linearne elastičnih tela ili linearne elastičnih i idealno krutih tela. Kada su problemi vrlo jednostavni, rešenje je moguće dobiti i u analitičkom obliku. Međutim kod praktičnih problema, koji su uglavnom više ili manje složeni, čak i kada se koristi najprostiji linearne elastični model, rešenje se može dobiti približnim odnosno numeričkim metodama. Za dobijenje realnih rezultata proračuna konstrukcije, neophodno je između ostalog rešiti i interakciju objekta sa temeljem i tлом tokom svih faza izgradnje, počev od iskopa i zaštite temeljne jame i susednih objekata, snižavanja i održavanja nivoa podzemne vode, izgradnje objekta i eksploracije objekta.

Mehaničke osobine tla su vrlo složene i rešenje problema interakcija temeljnog tla sa elementima konstrukcije zahteva određena uprošćenja kojim se realna konstrukcija i tlo aproksimira računskim modelom. Bez uprošćenja, problem ne bi bio rešiv. Nivo uprošćenja mora biti takav da zadrži bitne mehaničke karakteristike konstrukcije i tla a da isključi one karakteristike koji ne utiču ili vrlo malo utiču na krajnji rezultat.

Složeniji modeli materijala, ako se pravilno primene, daju realnije rezultate na osnovu kojih je moguće racionalnije i projektovati i graditi. Međutim njihova primena nije uvek neophodna ili opravdana. Zavisno od vrste i složenosti problema, intuitivan i iskusan inženjer, sposoban da prepozna i shvati suštinu problema, može dobiti realne rezultate i na osnovu vrlo uprošćenih modela.

U geomehanici postoji velik broj rešenja koji aproksimiraju tlo kao modele elastičnih opruga ili model linearno-elastičnog kontinuma. Ova rešenja su jednostavna ali zbog nekad grube idealizacije, mogu dati nerealne i/ili potpuno pogrešne rezultate. Zbog toga, svaki model kojim se aproksimira stvarni fizički proces kao i svaki rezultat proistekao iz takvog modela, uvek treba kritički prihvpati.

U okviru ovog predmeta, objasniće se metode za analizu interakcije konstrukcija-tlo, u kojima se realno tlo aproksimira vrlo jednostavnim modelom elastičnih opruga ili modelom elastičnog kontinuma. Pored osnovnog modela koji će biti detaljno obrađen kroz primere, prikazće se i drugi modeli dobijeni poboljšanjem osnovnog modela. Nakon modela elastičnih opruga, detaljno će se kroz primere obraditi model tla koji je zasnovan na elastičnom kontinuumu.

Primena modela elastičnih opruga će se prikazati na primeru temeljnih greda i ploča, na primeru zaštitnih zidova kod iskopa temeljnih jama, pojedinačnih šipova koji su opterećenih vertikalnom i horizontalnom silom i momentom savijanja i grupe šipova povezanih idealno

kruto naglavnicom opterećenih proizvoljnom silom. Kod analize grupe šipova, prikazaće se uprošćeni postupak za uvođenje međusobne interakcije kroz redukciju modula reakcije tla.

Izbor odgovarajuće vrednosti vertikalnog, horizontalnog ili smičućeg modula reakcije tla presudno utiče na pouzdanost rezultata proračuna, pa su prikazane uobičajene metode za njihovo određivanje. Pošto modul reakcije tla nije fundamentalni fizički parametar tla, on se ne može odrediti terenskom ili laboratorijskom metodom, već se određuje na osnovu približne korelacije sa drugim merljivom fizičkim parametrima tla, kao što je nedrenirana čvrstoća zasićena gline, vlažnost i relativna zbijenost peska, modul deformacije tla, standardna ili statička penetraciona otpornost tla i sl. Osim vrste tla, na veličinu modula reakcije tla utiče i dimenzija opterećene površine, stepen mobilizacije čvrstoće, priroda opterećenja (statičko, ciklično, dinamičko) i dr. Realno tlo je u suštini nelinearno deformabilno, što naročito dolazi do izražaja kod horizontalno opterećenih šipova i vertikalnih zaštitnih konstrukcija za temeljne lame. Zbog toga je u ovom predmetu bilo neophodno da se prikaže model tla sa nelinearno deformabilnim oprugama. Proračun interakcije konstrukcije i nelinernog modela tla je vrlo složen i zahtevan postupak i prevazilazi osnovni program studija.

Model elastičnog kontinuuma je detaljno prikazan kroz primer proračuna temeljne grede i proračun interakcije gornje konstrukcije sa temeljnom gredom koja leži tlu koji je modeliran elastičnim kontinuumom. Takođe je objašnjen postupak za izbor parametara deformabilnosti, odnosno modula elastičnosti i Poissonovog koeficijenta. Proračun temeljnih ploča i šipova, na i u, elastičnom kontinuumu, zbog obimnosti i složenosti, ovde nije obuhvaćen, ali je ukazano na algoritam proračuna.

U okviru ovog nastavnog predmeta, koristi se metoda konačnih razlika za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina i matrična metoda proračuna. U cilju efikasnosti u složenim proračunima, studentu je uz svaki zadatak pripremljena pomoć u programu Excel. Time se student oslobođa zamornog, dugotrajnog i nepotrebnog računanja, čime se on koncentriše na suštinu problema, na analizu uticaja ulaznih parametara na rezultate proračuna i na kritičku analizu korišćenog modela tla.

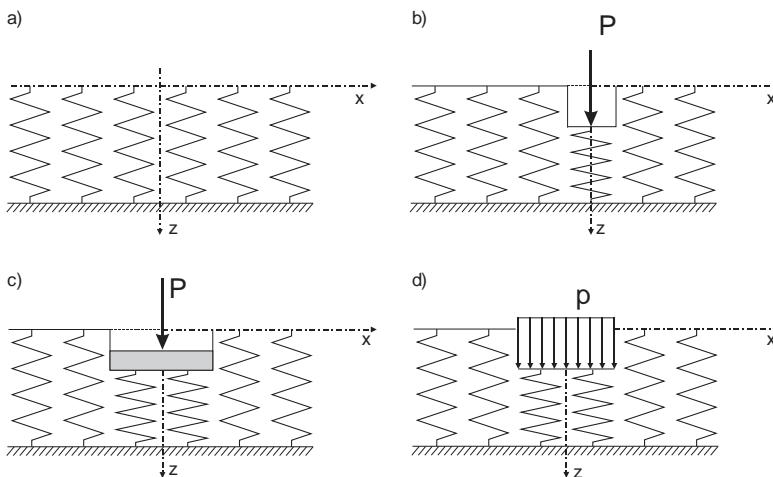
Na kraju predavanja, predviđeno je upoznavanje sa komercijalnim softverima za geotehniku, koji projektantima pružaju mogućnost za geotehničke proračune koji su zasnovani modelima tla u koji se mogu uključiti heterogenost, anizotropija, nelinearnost, elasto-plastičnost, viskoznost (puzanje) i sl. Ovi softveri, koriste vrlo složene numeričke postupke i konstitutivne modele tla, za čiju su primenu potrebni visokostručni, iskusni i posebno obučeni kadrovi kroz specijalizovana predavanja i praktične obuke.

## MODELI DEFORMABILNE PODLOGE

U problemima interakcije, tlo se uvek zamenjuje nekim pojednostavljenim modelom. Za rešavanje praktičnih problema, razvijen je velik broj različitih modela, od kojih su neki jednostavni za upotrebu do vrlo složenih koji se zahtevaju primenu softvera koji koriste složene numeričke metode.

**Model elastičnih opruga:** Modeliranje tla nezavisnim elastičnim oprugama, prvi je u primjenjenu mehaniku uveo Winkler (1867) a Zimmerman (1888) ga je prvi put primenio za proračun napona u železničkim šinama. Pošto su oslonci (pragovi) šina međusobno nezavisni, usled sile nad jednim osloncem sleže samo taj oslonac, dok su sleganja svih susednih oslonaca jednaka nuli. Ovo je osnovna radna hipoteza modela, u mehanici poznatog još i kao Vinklerov model ili jedno-parametarski model, pošto sadrži samo jedan nezavisni parametar, (Slika 2.1).

Tokom decenija, primena modela je proširena i na proračun drugih konstrukcija (temelji, temeljni nosači, temeljni roštilji, temeljne ploče, kolovozne ploče, šipovi, pribor i zidovi u tlu i dr.). Za razliku od temeljnih nosača gde je tlo zamenjeno vertikalnim oprugama, kod vertikalno opterećenih šipova su dodate smičuće, a kod pribora i horizontalno opterećenih šipova se koriste horizontalne opruge.



Slika 2.1 a) Tlo modelirano elastičnim oprugama, b) Opterećenje koncentrišanom silom,  
c) Opterećenje krutog temelja, d) Jednoliko opterećenje idealno savitljivog temelja

Deformabilnost podlage kod Vinklerovog modela je definisana modulom reakcije  $k$  u  $\text{kN/m}^3$ , koji nije fundamentalna fizička karakteristika tla. Veza između kontaktnog napona  $q$  u temeljnoj spojnici (reaktivno opterećenje) i sleganja podlage  $w$ , glasi:

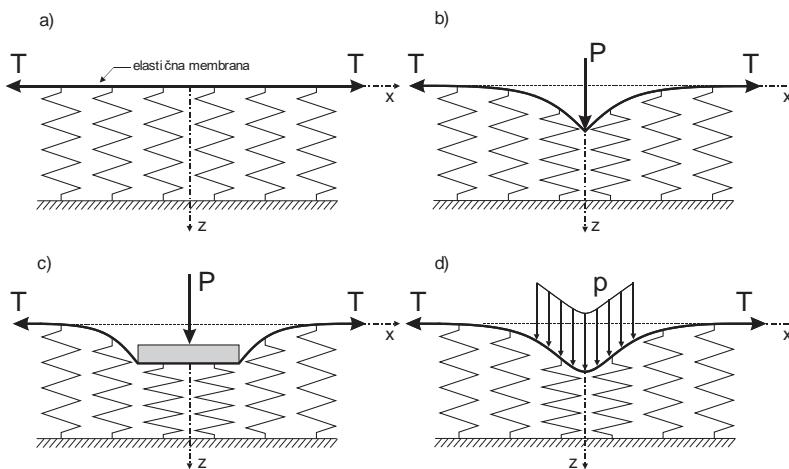
$$q(x, y) = k \cdot w(x, y)$$

Kritički posmatrano, pretpostavka o tlu kao o sistemu nezavisnih opruga ne odgovara stvarnosti. Tlo je kontinuum, u kojem se uticaj iz jedne tačke širi obrnuto сразмерno

rastojanju. Uprkos nedostacima model se zbog jednostavnosti koristi i danas, stim što su u međuvremenu uvedena i određena poboljšanja kroz tzv. dvo-parametarski model, koji indirektno uvode svojstvo kontinualnosti

**Model elastičnih opruga i membrane:** Filolenko-Borodich (1963) su uveli dvo-parametarski model, u kojem je kontinuitet između opruga ostvarena vrlo tankom elastičnom membranom u kojoj deluje zatežujuća sila  $T$  ( $\text{kN/m}$ ). Na taj način je dobijen model podloge sa osobinama elastičnog kontinuuma (Slika 2.2). Veza kontaktnog napona i pomeranja kod ovog modela je data izrazom:

$$q(x, y) = k \cdot w(x, y) - T \cdot \nabla^2 w(x, y), \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



Slika 2.2 a) Tlo modelirano el. oprugama i membranom, b) Opterećenje koncentrisanom silom, c) Opterećenje krutog temelja, d) Jednoliko opterećenje idealno savitljivog temelja

**Model elastičnih opruga i ploče:** Heteny (1950) je vezu između elastičnih opruga ostvario uvođenjem tanke elastične ploče debeline  $h$  određene krutosti  $D$  ( $\text{kNm}$ ). Umesto ploče, kod temeljne grede se koristi greda. Kontaktni napon kod ovog dvo-parametarskog modela, glasi:

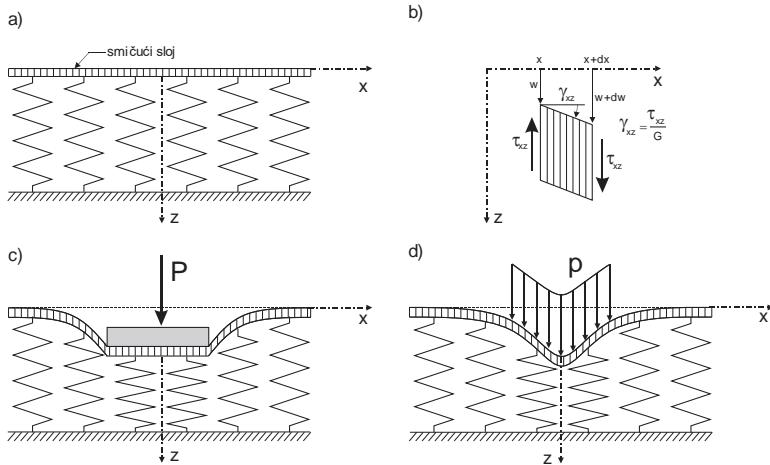
$$q(x, y) = k \cdot w(x, y) + D \cdot \nabla^4 w(x, y), \quad D = Eh^3 / 12(1 - \nu_s^2)$$

**Model elastičnih opruga sa trenjem:** Pasternak (1954) je prikazao dvo-parametarski model, gde je između opruga uveo trenje preko nestišljivih kliznih elemenata koji se deformišu smicanjem u vertikalnoj ravni. Kontaktni napon je:

$$q(x, y) = k \cdot w(x, y) - G \cdot h \cdot \nabla^2 w(x, y), \quad h = 1.0m, \quad G = E/2(1 + \nu)$$

Diferencijalna jednačina Pasternakovog modela, matematički je identična modelu Filolenko-Borodicha. Razlika je u konstanti ispred diferencijalnog operatora koja je u prvom modelu

modul smicanja  $G$  a u drugom sila zatezanja  $T$  u membrani. Dvo-parametarski modeli tla se jednostavno svode na jedno-parametarski odnosno Vinklerov model, ako se u odgovarajućim izrazima anuliraju parametri  $T$ ,  $D$  ili  $G$ .



**Slika 2.3** a) Tlo modelirano el. oprugama i slojem za trenje, b) Deformacija sloja za trenje,  
c) Opterećenje krutog temelja, d) Jednoliko opterećenje idealno savitljivog temelja

Treba istaći, da u gore prikazanim modelima deformabilne podloge, parametri  $k$ ,  $T$ ,  $D$  i  $G$ , nisu fundamentalne fizičke karakteristike tla koje se mogu odrediti opitim, već fiktivni parametri koji se mogu odrediti indirektno, metodom iteracije, oslanjajući se na rešenja jednostavnih problema zasnovanih na npr. teoriji elastičnog kontinuma.

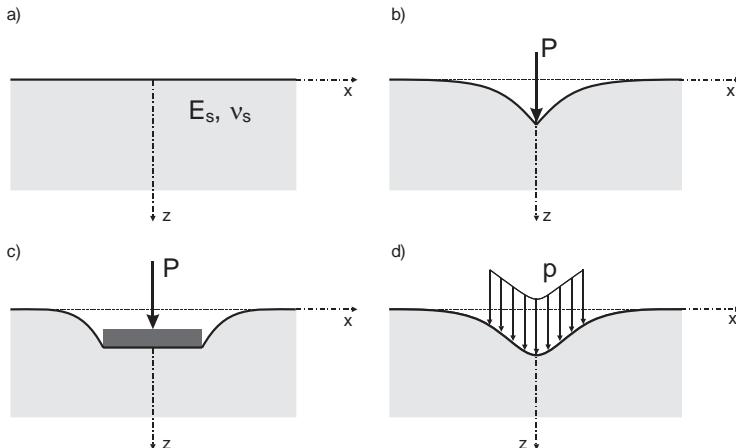
**Model uproščenog elastičnog kontinuma:** Vlasov i Leontiev (1966) uvode dvoparametarski model, koji je na neki način među korak prema modelu elastičnog kontinuma. Polazeći od tri grupe parcijalnih diferencijalnih jednačina polu-beskonačnog kontinuma (kompatibilnost pomeranja, konstitutivna veza napona i deformacija, jednačine ravnoteže), u ove modele se uvode određena uproščenja u odnosu na pomeranja ili napone, kako bi se jednačine mogle jednostavno rešiti u zatvorenom obliku. Pionirski rad u tom pravcu je dao Reissner (1958).

Simvulidi (1974) je dao analitičko rešenje ravanskog stanja deformacije grede na elastičnom kontinumu. Autor je nepoznati kontaktne napone interpolirao polinomom trećeg stepena, a zadato opterećenje na temeljnoj gredi Gersevanov-om prekidnom funkcijom (S.Gersevanov, 1933). Nakon integracije diferencijalne jednačine grede na deformabilnoj podlozi, četiri integracione konstante je odredio iz uslova ravnoteže  $\Sigma Z=0$  i  $\Sigma M=0$ , i dva granična uslova  $w''(0)=0$  i  $w''(L)=0$ , koji podrazumevaju da je moment savijanja na levom i desnom slobodnom kraju nosača jednak nuli.

Nepoznate koeficijente polinoma trećeg stepena, autor je odredio iz 4 uslova: jednakost ugiba nosača i podloge na levom kraju i sredini nosača, jednakost površine omeđene linijom ugiba podloge i nosača i jednakost trećih izvoda linije ugiba nosača i podloge na sredini nosača. Za

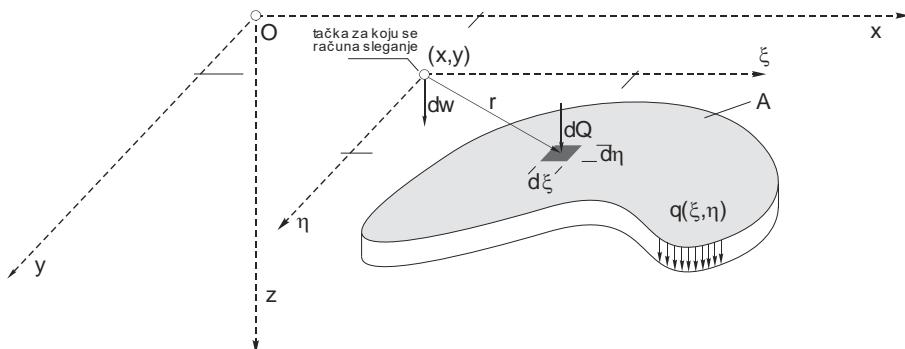
brzo rešavanje praktičnih problema, primenom principa superpozicije, autor je pripremio tabelarne podatke, a model je programiran i za rad na računaru.

**Model elastičnog kontinuuma**, za razliku od Vinklerovog, pretstavlja neprekidnu sredinu koja je definisana fundamentalnim karakteristikama materijala (modul elastičnosti  $E_s$  i Poissonov koefficijent  $\nu_s$ ). U kontinuumu se uticaj iz jedne tačke širi na sve okolne tačke obrnuto srazmerno odstojanju, tako da sleganje u jednoj tački zavisi od kontaktnih napona u svim tačkama kontaktne spojnice.



Slika 2.4 a) Elastični kontinuum, b) Opterećenje koncentrisanom silom,  
c) Opterećenje krutog temelja, d) Jednoliko opterećenje idealno savitljivog temelja

Proračun sleganja na homogenoj, izotropnoj i linearno-elastičnoj sredini, zasniva se na formuli Busineska (1885).



Slika 2.5 Sleganje  $dw$  tačke  $(x, y)$  na površini kontinuma, usled vertikalne sile  $dQ$  (prostorno stanje)

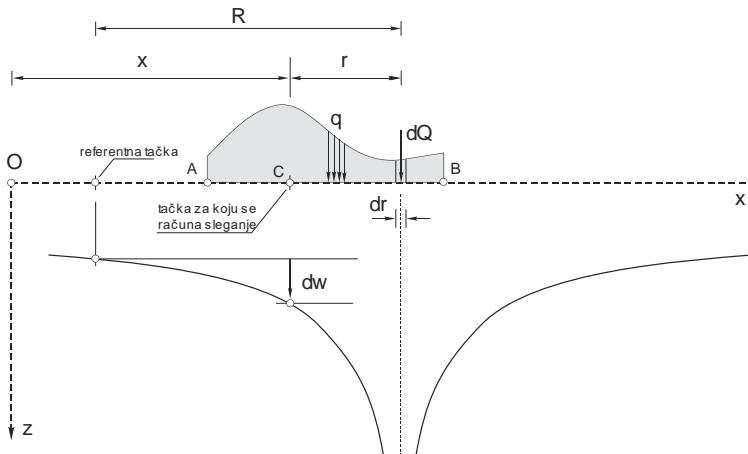
Sleganje tačke sa koordinatama  $(x, y)$  na odstojanju  $r$  od vertikalne koncentrisane sile  $dQ$  na površini elastične sredine, glasi :

$$dw(x, y) = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} dQ \frac{1}{r} \quad , \quad dQ = q dA$$

Površina opterećenja  $A(\xi, \eta)$  i površinsko opterećenje  $q(\xi, \eta)$  se definiše u odnosu na pomoći koordinatni sistem  $(\xi, \eta)$ , sa koordinatnim početkom u tački  $(x, y)$  za koju se traži sleganje. Da bi se odredilo sleganje  $w$  tačke  $(x, y)$ , potrebno je izvršiti integraciju Busineskovog izraza, po površini  $A$ , prema sledećem izrazu:

$$w(x, y) = \int_A dw(x, y) = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} \int_A \frac{dQ}{r} = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} \int_A \frac{q(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

U slučaju ravanskog stanja deformacije, umesto apsolutne veličine sleganja, može se odrediti relativna veličina sleganja u odnosu na proizvoljnu (referentnu) tačku u ravni preseka, prema metodi Flamanta (1892).



**Slika 2.6** Sleganje  $dw$  tačke  $(x)$  na površini kontinuma, usled vertikalne sile  $dQ$  (ravanska deformacija)

$$dw(x) = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} dQ \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad , \quad dQ = q(r) \cdot dr$$

$$w(x) = \int_{AB} dw(x) = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} \int_{AB} dQ \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} \int_{AB} q(r) \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)^2 dr$$

gde je:  $r$  = odstojanje sile od tačke u kojoj se traži sleganje

$R$  = odstojanje sile od referentne tačke u odnosu na koju se traži sleganje

Za praktičan slučaj, referentna tačka se usvaja na odstojanju na kojem je sleganje  $w(R)$  usled opterećenja zanemarljivo malo, ali se može usvojiti i drugačije (npr. relativno u odnosu na levi ili desni kraj nosača). Ukupna sleganja zavise od izbora referentne tačke, međutim relativna

sleganja odnosno zakrivljenost elastične linije (i presečne sile u temeljnem nosaču) su nezavisna od položaja referentne tačke.

Treba imati u vidu da je rešenje Busineska i Flamanta, sa fizičke strane posmatrano problematično. Oba rešenja imaju singularnost u tački dejstva sile  $w(r=0)=\infty$  bez obzira koliko je sila mala, a Flamantovo rešenje dodatno ne zadovoljava ni granični uslov za beskonačno udaljenu tačku, jer je rezultat  $w(r=\infty) = -\infty$ .

Inače, problemi singularnosti i diskontinuiteta u klasičnoj teoriji elastičnosti rezultat su zanemarenja efekta veličine materijalnih čestica koje izgrađuju realni materijal. Prema teoriji, elastični kontinuum je sastavljen od beskonačnog broja tačaka (bez dimenzija) dok je svaki realan materijal u suštini skup čestica konačne veličine (zrna, vlakna, čelijske strukture, kompoziti). Problemi klasične teorije elastičnosti se mogu prevazići teorijama višeg reda koje mogu modelirati efekte razmere heterogenih materijala, kada je veličina heterogenosti (unutrašnja dimenzija) i dimenzija strukture (spoljna dimenzija različitog reda). Efekat razmere heterogenog materijala se u suštini svodi na to da uzorci manjih dimenzija pokazuju veću krutost i čvrstoću od velikih uzoraka.

Prvi pomak od klasične teorije elastičnog kontinuma, u pravcu modeliranja čestične strukture materije, izvršili su Eugene and Francois Cosserat (1909), formulacijom teorije mikropolarnog medija (poznatu kao Cosseratova elastičnost, mikropolarna elastičnost ili mikropolarna teorija elastičnosti) kao kontinualnog skupa krutih čestica. Matematičko rešenje bazirano na ovoj teoriji je vrlo složeno i za sada ograničeno samo na jednostavne probleme.

Imajući u vidu diferencijalne izraze za sleganje, može se zaključiti da je proračun sleganja na linearno elastičnoj i izotropnoj podlozi (Hukov model) znatno složeniji zadatak od proračuna sleganja na Vinklerovoj podlozi. Umesto prostog izraza, po kojem je sleganje Vinklerove podloge jednakо količniku kontaktog napona i modula reakcije podloge, kod Hukovog modela se sleganje mora izračunati dvostrukim integrisanjem uticaja kontaktnih napona u svim tačkama opterećene površine.

Pošto kontaktni napon osim parametara podloge, zavisi i od opterećenja i krutosti nosača, deformacija nosača i Vinklerovoj podlozi se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine. Diferencijalna jednačina se može rešiti analitički za proizvoljno opterećen nosač konstantnog preseka. Međutim, deformacija nosača na linearno elastičnoj podlozi se svodi na rešavanje integro-diferencijalne jednačine, koja se analitički može rešiti samo za nekoliko vrlo prostih slučajeva opterećenja.

Bolja aproksimacija deformabilne podloge, postiže se uvođenjem složenijih modela, zasnovanih na teoriji linearno elastičnog kontinuma, na teoriji elasto-plastičnosti ili teoriji elasto-visko-plastičnosti (konsolidacija i puzanje). Međutim, po pravilu, ono što se dobija kvalitetnijim modelom podloge, odnosno kvalitetnijim predviđanjem mehaničkog ponašanja tla, gubi se kroz znatno složeniji matematički postupak rešavanja problema. Analitička rešenja su moguća samo za jednostavnije primere. Opšte slučajeve iz prakse, moguće je rešiti samo približno, koristeći numeričke metode, kao što su metoda konačnih elemenata (kratica: MKE - Finite Elements Method) i metoda konačnih razlika (kratica: MKR - Finite Difference Method).

U numeričkoj analizi, metode konačnih razlika su klasa numeričkih tehnika za rešavanje diferencijalnih jednačina aproksimacijom izvoda funkcije konačnim razlikama. Kao i prostorni domen tako i vremenski interval (ako je primenjen) su diskretizovani na konačan broj koraka, a vrednost rešenja u tim diskretnim tačkama se određuje rešavanjem algebarskih jednačina koje sadrže konačne razlike i vrednosti iz susednih tačaka. Metode konačnih razlika pretvaraju obične diferencijalne jednačine ili parcijalne diferencijalne jednačine (linearne ili nelinearne), u sistem linearnih algebarskih jednačina koje se mogu rešiti tehnikama matrične algebre. Savremeni računari mogu efikasno izvršiti lineарне algebarske proračune, što je uz njihovu relativnu lakoću primene, dovelo do široke upotrebe MKR u savremenoj numeričkoj analizi. Danas su MKR zajedno sa MKE jedan od najčešćih pristupa numeričkom rešenju.

### Nelinearno deformabilni modeli

U narednim poglavljima, biće prikazane metode za rešavanje deformacije linijskih temeljnih nosača na linearno elastičnoj Vinklerovoj podlozi i elastinom poluprostoru. Tačniji modeli podloge, kao što su nelinearno elastični, elastoplastični i visko-elastični prevazilaze okvir osnovnih studija i neće se prikazati.

### Geotehnički softveri

Danas postoji vrlo velik broj geotehničkih softvera. Sistematisiran pregled se može videti na sajtu <http://www.ggsd.com> (Geotechnical & Geoenvironmental Software Directory). Imenik kataloški prikazuje oko 1760 programa iz oblasti mehanike tla, mehanike stena, fundiranja, inženjerske geologije, hidrogeologije, inženjerstva zaštite životne sredine i dr. kao i oko 900 izdavači ovih programa. Imenik je prvi put objavljen 1996. a godišnje prima više od 10 miliona stranica. Unosi u imenik su besplatni, a ažuriraju se oko četiri puta godišnje. U nastavku će se prikazati samo nekoliko poznatijih, dok se za dalje istraživanje preporučuje navedeni sajt.

<http://www.plaxis.com>

Razvoj PLAXIS-a započeo je 1987. godine na Univerzitetu za tehnologiju Delft, na inicijativu holandskog Ministarstva javnih radova i upravljanja vodama. Početna svrha bila je razviti 2D konačni element jednostavan za upotrebu za analizu rečnih nasipa na mekom tlu holandske nizije. Danas je jedan od vodećih softverskih alata za statičku i dinamičku analizu napona i deformacija u tlu i steni, za analizu protoka vode, zagađenja i toplove kroz tlo, i analizu interakcije tla i konstrukcije. Softver može da obrađuje 2D i 3D probleme, metodom konačnih elemenata, uz konstitutivne modele sa nelinearnim i vremenski zavisnim ponašanjem tla i stena.

<https://www.itascainternational.com>

Razvoj FLAC-a (Fast Lagrangian Analysis of Continua) je započet 1981. godine, u okviru *Itasca Consulting Group, Inc.* koju su osnovali profesori departmana za građevinarstvo i mineralno inženjerstvo univerziteta u Minesoti U.S. (Charles Fairhurst, Peter Cundall, Barry Brady, Tony Starfield, Ray Sterling) radi pružanja usluga u okviru mehanike stena, numeričkog modeliranja geotehničkih sredina i korišćenja podzemnog prostora. Prvi komercijalni softver je objavljen 1986. godine. Danas je jedan od vodećih softverskih alata za vrlo sofisticiranu statičku i

dinamičku analizu napona i deformacija u tlu i steni, za analizu protoka vode, zagađenja i toplote kroz tlo, i analizu interakcije tla i konstrukcije. Softver može da obrađuje 2D i 3D probleme, metodom konačnih razlika ili konačnih elemenata, uz konstitutivne modele sa nelinearnim i vremenski zavisnim ponašanjem tla i stena.

#### <https://www.geoslope.com>

Kanadska firma GEOSLOPE, razvija geotehničke softvere od 1977. godine, a njen GeoStudio je integrисани softver za statičku i dinamičku analizu napona i deformacija u tlu, za interakciju, za analizu protoka vode, zagađenja i toplote kroz tlo. Za razliku od predhodna dva softver za sada obrađuje samo 2D probleme, metodom konačnih elemenata, koristeći konstitutivne modele sa nelinearnim i vremenski zavisnim ponašanjem tla.

#### <https://www.zsoil.com>

ZSOIL je razvijan u kompaniji Zace Services Ltd od 1982. Najnovije verzije razvio je tim koji su predvodili A.Truti, K.Podles & Th.Zimmermann, sa istraživačkim iskustvom na Švajcarskom federalnom institutu za tehnologiju, Univerzitetu za tehnologiju u Krakovu, U.C. Berkeley i Caltech. Softver omogućava numeričku simulaciju mehanike tla i stena, nadzemnih i podzemnih konstrukcija, iskopa, interakcije konstrukcija-tlo, protoka vode i toplote, statičku i dinamičku analizu. Softver obrađuje 2D i 3D probleme, metodom konačnih elemenata, uz konstitutivne modele sa nelinearnim i vremenski zavisnim ponašanjem tla i stena.

#### <https://www.finesoftware.eu>

FINE je među vodećim programerima softvera za građevinsko inženjerstvo u Češkoj. Od 1989. godine razvija softver za statičku analizu, dimenzionisanje i geotehniku. Sadrži vrlo velik broj različitih modula iz oblasti mehanike tla, plitkog i dubokog fundiranja, dubokih iskopa i drugo. Metode rešavanja su analitičke i metodom konačnih elemenata, a omogućuju rešavanje 2D i 3D problema uz korišćenje nelinearnih konstitutivnih modela.

#### <https://www.ensoftinc.com>

Ensoft, Inc., osnovao je Lymon C. Reese u Austinu u Teksasu 1985. godine, sa ciljem razvoja i softvera za rešavanje složenih problema u geotehnici i građevinskom konstrukterstvu. Među Ensoftovim računarskim programima zapaženi su oni koji se bave analizom i projektovanjem temelja na šipovima, kao što su LPILE i GROUP.

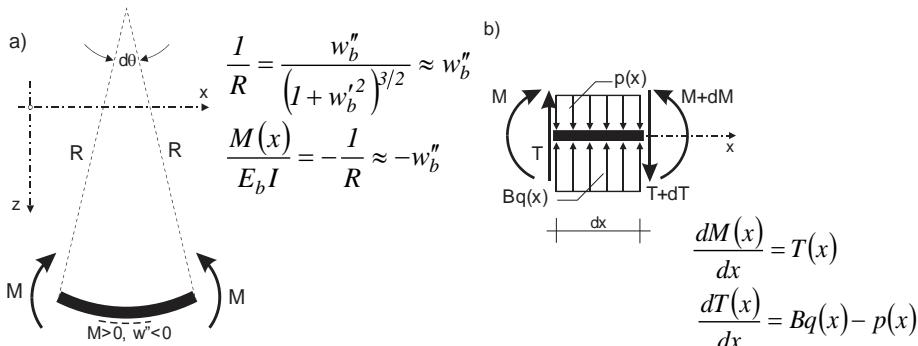
#### <https://geotecsoftware.com>

GEOTEC Software Inc. je osnovao Manfred Kany sa Geotehničkog instituta LGA Nuremberg Germany. Prvi komercijalni softver za proračun sleganja temelja ELPLA je objavljen 1995. godine. Od 2014. godine je sedište GEOTEC-a u Kanadi. Postoji različiti moduli, za proračun sleganja i dimenzionisanje temelja samaca, temeljnih ploča i roštilja, grupe šipova, interakcije, proračuna zaštite temeljnih jama i dr. Softveri omogućavaju rešavanje 3D problema, metodom konačnih elemenata, koristeći linearne i nelinearne modele.

## GREDA NA DEFORMABILNOJ PODLOZI

### 3.1 Jednačina grede na deformabilnoj podlozi

Na osnovu hipoteze o ravnom poprečnom preseku savijenog nosača, može se uspostaviti veza između momenta savijanja  $M$  i poluprečnika zakriviljenosti  $R$  elastične linije nosača (Slika 3.1a). Ako je nagib  $w_b'$  elastične linije nosača vrlo mali, zakriviljenost  $1/R$  elastične linije nosača je približno jednaka drugom izvodu ugiba  $w_b''$  (Slika 3.1a). Na osnovu uslova ravnoteže, diferencijalna veza između opterećenja  $p$ , kontaktnog napona  $q$  i presečnih sila  $M$  i  $T$  nosača (Slika 3.1b), glasi:



Slika 3.1 a) Veza zakriviljenosti i momenta savijanja , b) Uslov ravnoteže infinitezimalnog nosača

Polazeći od izraza na slici 3.1, diferencijalna jednačina ravnoteže savijenog oblika elastične linije temeljnog nosača (grede), glasi:

$$E_b I \frac{d^4 w_b(x)}{dx^4} = p(x) - B \cdot q(x) \quad (3.1)$$

gde je:  $E_b I$  - krutost temeljnog nosača na savijanje u  $\text{kNm}^2$   
 $B$  - širina temeljnog nosača u  $\text{m}$   
 $w_b(x)$  - ugib temeljnog nosača u  $\text{m}$   
 $p(x)$  - opterećenje temeljnog nosača u  $\text{kN/m}$   
 $q(x)$  - kontaktni napon u  $\text{kN/m}^2$

### 3.2 Jednačina savijanja grede na Vinkler-ovoj podlozi

Kao najjednostavniji i najviše primenjivan, detaljno će se opisati rešenje za gredu koja leži na Vinklerovoj podlozi, dok će se ostali modeli prikazati ukratko. Za nosač na Vinklerovoj podlozi, veza kontaktnog napona  $q(x)$ , sleganja podloge nosača  $w(x)$  i modula reakcije tla  $k$  glasi:

$$q(x) = k \cdot w(x) \quad (3.2)$$

gde je:  $w(x)$  - sleganje podloge u m  
 $k$  - modul reakcije podloge (tla ili posteljice) u  $\text{kN/m}^3$

Polazeći od pretpostavke, da je u svakoj tački kontakta sleganje podloge jednako sleganju nosača ( $w = w_b$ ), može se izvršiti smena jednačine (3.2) u (3.1), nakon čega se dobija linearna diferencijalna jednačina 4-reda sa konstantnim koeficijentima:

$$E_b I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p(x) - k B w(x) \Rightarrow E_b I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k B w(x) = p(x) \quad (3.3)$$

Homogeni deo diferencijalne jednačine i njeno opšte rešenje glase:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = 0, \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{kB}{4E_b I}}$$

$$w(x) = e^{\lambda x} (C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)) \quad (3.4)$$

gde su  $\lambda$  parametar krutosti nosača i podloge, a  $C_1 - C_4$  integracione konstante

Kada je poznato sleganje  $w(x)$ , nagib tangente elastične linije nosača  $\theta(x)$ , moment savijanja  $M(x)$  i transverzalna sila  $T(x)$ , mogu se odrediti na osnovu poznatih izraza:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}, \quad M(x) = -E_b I \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -E_b I \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad (3.5)$$

Parametar  $\lambda$  ima dimenziju  $\text{m}^{-1}$ , i uglavnom se izražava u recipročnom obliku kao  $1/\lambda$  pod nazivom karakteristična dužina. Kada je nosač krući od podloge, karakteristična dužina je veća (i obrnuto), što znači da se uticaj (ugib, nagib, presečna sila) od mesta opterećenja prostire na veću udaljenost. Proizvod  $\lambda L$  (gde je  $L$  dužina nosača) je bezdimenzionalna veličina, i naziva se koeficijent savitljivosti nosača.

Konstante  $C_1, C_2, C_3, C_4$  važe duž temeljnog nosača na kojem su ugib  $w(x)$  i njegovi izvodi neprekidni do 4-tog reda. Analitičko rešenje diferencijalne jednačine savijanja temeljnog nosača na Vinklerovoj podlozi, može se odrediti samo za jednostavne probleme (konstantan modul reakcije, konstantna širina i krutost nosača), uglavnom na osnovu metode početnih parametara i metode superpozicije opterećenja.

Treba istaći, da je u jednačini (3.4) zanemaren uticaj horizontalnih sila i smičućih napona u temeljnoj spojnici. Pošto su horizontalne sile na temeljnog nosaču, po pravilu znatno manje od vertikalnih, aksijalne deformacije i pomeranja nosača se mogu zanemariti. Goodier (1932), Timoshenko i Goodier (1970), Donnell (1976) i dr, strogom analizom problema su pokazali, da je uticaj smičućih napona na deformaciju i presečne sile nosača bitan samo ako je nosač vrlo krut a dužina nosača približno jednaka širini. Inače, smičući naponi su nula na sredini a maksimalni po ivici temeljne spojnice, sa smerom od ivice prema sredini. Kod savitljivih

temeljnih nosača, uticaj smičućih napona u kontaktu spojnici se može zanemariti. Pošto je veza između pomeranja i opterećenja linearna, može se primeniti princip superpozicije (princip nezavisnosti dejstva), koji u matematičkom obliku glasi:

$$f(a_1 P_1, a_2 P_2, \dots, a_n P_n) = a_1 f(P_1) + a_2 f(P_2) + \dots + a_n f(P_n)$$

U gornjem izrazu, funkcija  $f$  je "linearni operator", a može da predstavlja sleganje nosača, nagib elastične linije nosača ili presečne sile duž nosača.

Kada u temeljnoj spojnici postoji porni pritisak vode, sleganje se određuje na osnovu efektivnog napona, a presečne sile na osnovu totalnog napona. Modul reakcije tla kao deformacijski parametar, određuje se pomoću efektivnog napona, prema izrazu:

$$q'(x) = k \cdot w(x) , \quad q(x) = q'(x) + u$$

Ako se u (3.1), totalni napon zameni zbirom efektivnog napona i pornog pritiska, a zatim efektivni napon izrazi preko modula reakcije tla i sleganja, dobija se izraz:

$$E_b I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k B w(x) = p(x) - B \cdot u$$

Kada je porni pritisak  $u=0$ , gornja jednačina se svodi na (3.1), pa se i presečne sile i sleganja određuju prema totalnom naponu  $q(x)$ . Ako postoji porni pritisak, pored aktivnog opterećenja  $p(x)$ , na nosač treba dodati opterećenje  $-u \cdot B$ , pa se proračun sleganja (implicitno) određuje na osnovu efektivnog napona  $q'(x)$ , a presečne sile na osnovu totalnog napona  $q(x)=q'(x)+u$ . Interesantno je napomenuti, da je razlika presečnih sila za zlučaj  $u=0$ , u odnosu na  $u>0$ , mala, po pravilu do nekoliko % pa se uglavnom može zanemariti. U daljim prikazima i proračunima, uvek će se podrazumevati da je  $u=0$  odnosno  $q'(x)=q(x)$ !

### 3.3 Jednačina savijanja grede na Filolenko-Borodich-evoj podlozi

Ako se umesto Vinklerovog, za podlogu usvoji model sa oprugama i tankom membranom, koji su predložili Filolenko-Borodich, izraz za kontaktni napon  $q(x)$  i diferencijalnu jednačinu grede na deformabilnoj podlozi dobija sledeći oblik:

$$q(x) = k \cdot w(x) - T \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

$$E_b I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - T \cdot B \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k \cdot B w(x) = p(x) \quad (3.6)$$

Kada su parametri modela  $k$  i  $T$ , širina nosača  $B$  i moment inercije  $I$ , konstanti duž nosača, diferencijalna jednačina se može rešiti analitički.

### 3.4 Jednačina savijanja grede na Pasternak-ovoj podlozi

Pasternakov model sa elastičnim oprugama između kojih postoji smičuće trenje matematički je identičan modelu Filolenko-Borodicha i Vlasov-Leontijeva. Kada se sila u membrani  $T$ , zameni modulom klizanja  $G=G_0h$ , gde je debljina smičućeg sloja  $h=1.0\text{m}$  zbog dimenzionalne ispravnosti jednačine, dobija se:

$$\begin{aligned} q(x) &= k \cdot w(x) - G \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \\ E_b I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - G \cdot B \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k \cdot B w(x) &= p(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Opšte rešenje homogenog dela diferencijalne jednačine glasi:

$$w(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + C_4 e^{m_4 x}, \quad m_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\frac{GB}{2E_b I}} + i \sqrt{\frac{kB}{E_b I} - \left( \frac{GB}{2E_b I} \right)^2}$$

Postoje 3 rešenja gornje jednačine, zavisno od vrednosti koeficijenta uz imaginarni član ( $i$ ), koji mož biti pozitivan, jednak nuli ili negativan.

Ovde će se prikazati samo rešenje za slučaj kada je koeficijent uz imaginarni član negativan. Taj slučaj je u praksi uobičajen, pošto je smičuća interakcija  $G$ , vrlo retko veća od dvostrukog korena proizvoda modula reakcije tla  $k$ , širine grede  $B$  i fleksione krutosti grede  $E_b J$ . Koeficijenti i opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine za taj slučaj glasi:

$$\frac{GB}{2\sqrt{kBE_b I}} < 1 \rightarrow m_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\alpha \pm \beta i}, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{GB}{4E_b I}}, \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{GB}{4E_b I}}$$

$$w(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) \quad (3.8)$$

### 3.5 Jednačina savijanja grede na Hetenyi-evoj podlozi

Hetenyiev model sa elastičnim oprugama preko koje je tanka ploča čija je cilindrična krutost na savijanje  $D$ , opisan je jednačinom:

$$\begin{aligned} q(x) &= k \cdot w(x) - D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} \\ (E_b I - D) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k \cdot B w(x) &= p(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

## METODA POČETNIH PARAMETARA ZA BESKONAČNU GREDU

U metodi početnih parametara, integracione konstante  $C_1, C_2, C_3, C_4$  koje figurišu u opštem rešenju homogene diferencijalne jednačine grede na Vinkler-ovoj podlozi (3.4), određuju se direktno na osnovu graničnih uslova, odnosno presečnih sila i pomeranja  $M, T, w, w'=0$  na levom i desnom kraju temeljnog nosača.

Granični uslovi mogu biti zadati po silama, po pomeranjima ili mešovito po silama i pomeranjima. Tako npr. ako je kraj nosača slobodan, granični uslovi se mogu izraziti po silama  $M=0$  i  $T=0$  na levom i desnom kraju nosača. Ako je kraj nosača slobodno oslojen, granični uslovi se mogu izraziti mešovito, po silama  $M=0$  i pomeranju  $w=0$ . Za uklješten kraj nosača, granični uslovi se mogu izraziti po pomeranjima  $w=0, \theta=0$ .

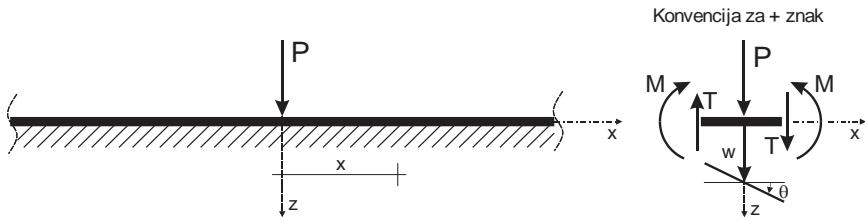
Na isti način se 4 integracione konstante, mogu odrediti i za druge modele podloge, koje su definisane jednačinama (3.6, 3.7 ili 3.9).

Za opšti slučaj opterećenja, metoda početnih parametara je spora i neadekvatna za praktičnu primenu. Postupak će se prikazati samo za nosač beskonačne dužine, koji je opterećen koncentrisanom silom  $P$ , spregom sila  $M_0$  ili jednolikim opterećenjem  $p$  na konačnoj dužini, koji leži na Vinkler-ovoj ili Pasternak-ovoj podlozi.

Koristeći analitičke izraze za beskonačni nosač koji je izveo Hetenyi, mogu se jednostavnim postupkom odrediti presečne sile, ugibi i nagibi konačnog nosača, pomoću jedne druge metode, poznate kao metoda superpozicija opterećenja. Ova metoda se može korisiti za bilo koji od gore prikazanih modela deformabilne podloge.

#### 4.1 Vertikalna sila na beskonačnoj gredi na Vinkler-ovoj podlozi

Na osnovu opšteg rešenja homogene diferencijalne jednačine grede na Vinklerovoj podlozi (3.4) i graničnih uslova za slobodan kraj, mogu se analitički metodom početnih parametara, odrediti ugib i nagib elastične linije i sile u preseku na odstojanju  $x$ , beskonačnog nosača, opterećenog koncentrisanom vertikalnom silom (slika 4.1).



Slika 4.1 Nosač beskonačne dužine na Vinklerovoj podlozi, opterećen vertikalnom silom

Da bi se zadovoljili granični uslovi, odnosno da sleganje nosača u  $x = \pm\infty$  bude jednak nuli, moraju integracione konstante  $C_1$  i  $C_2$  uz član  $e^{\lambda x}$  u jednačini (3.4) biti jednake nuli, odnosno  $C_1=C_2=0$ , pri čemu jednačina (3.4) dobija oblik:

$$w(x) = e^{-\lambda x} (C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)) \quad (4.1)$$

Ispod koncentrisane sile, u tački  $x=0$ , tangenta na elastičnu liniju nosača je horizontalna, odnosno  $\theta=0$ . Uslovna jednačina za nagib  $\theta$  elastične linije glasi:

$$\frac{dw}{dx} = -\lambda e^{-\lambda x} (C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)) + \lambda e^{-\lambda x} (-C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x)) = 0$$

$$x=0 \Rightarrow \lambda e^{-\lambda 0} [C_3 (-\cos 0 + \sin 0) + C_4 (-\sin 0 + \cos 0)] = 0$$

$$\lambda [C_3 (-1+0) + C_4 (0+1)] = 0 \Rightarrow C_3 = C_4$$

Nakon smene  $C_3=C_4$  u jednačinu (4.1), dobija se sledeći izraz za sleganje:

$$w = C_3 e^{-\lambda x} (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)) \Rightarrow w = C_3 A(\lambda x) \quad (4.2)$$

Uzastopnim diferenciranjem jednačine (4.2) se dobija:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = C_3 \frac{dA}{dx} = C_3 (-2\lambda e^{-\lambda x} \sin(\lambda x)) \Rightarrow \theta = -C_3 2\lambda B(\lambda x) \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = C_3 \frac{d^2 A}{dx^2} = C_3 [-\lambda^2 e^{-\lambda x} (\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))] = -C_3 \lambda^2 C(\lambda x) \quad (4.4)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = C_3 \frac{d^3 A}{dx^3} = C_3 [4\lambda^3 e^{-\lambda x} \cos(\lambda x)] = C_3 4\lambda^3 D(\lambda x) \quad (4.5)$$

Transverzalna sila nije definisana u preseku ispod sile (prekid funkcije), već samo u preseku - dx (blisko levo) i +dx (blisko desno).

Na osnovu veze između transverzalne sile i ugiba nosača (3.5), može se odrediti integraciona konstanta  $C_3$ :

$$T_l(0) = T(-dx) = P/2 \quad , \quad T_d(0) = T(+dx) = T_l(0) - P = -P/2$$

$$T = -E_b I \frac{d^3 w}{dx^3} = -E_b I C_3 \frac{d^3 A}{dx^3} = -E_b I C_3 4\lambda^3 D(\lambda x)$$

$$T_d(0) = -\frac{P}{2} = -E_b I C_3 4\lambda^3 D(0) \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{P}{8\lambda^3 E_b I}$$

Kada se uvrsti vrednost za  $C_3$  u jednačine (4.2) i (4.3), dobijaju se sledeći izrazi za sleganje  $w$  i nagib  $\theta$  elastične linije, na odstojanju  $x$ , desno od koncentrisane sile:

$$w = \frac{P}{8\lambda^3 E_b I} A(\lambda x), \quad \lambda^3 = \left( \frac{kB}{4E_b I} \right)^{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{P\lambda}{2Bk} A(\lambda x) \quad (4.6)$$

$$\theta = -2\lambda \frac{P}{8\lambda^3 E_b I} B(\lambda x), \quad \lambda^2 = \left( \frac{kB}{4E_b I} \right)^{\frac{2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{P\lambda^2}{Bk} B(\lambda x) \quad (4.7)$$

Na osnovu (3.5), (4.4) i (4.5), izrazi za moment savijanja i transverzalnu silu u preseku na odstojanju  $x$ , desno od koncentrisane sile glase:

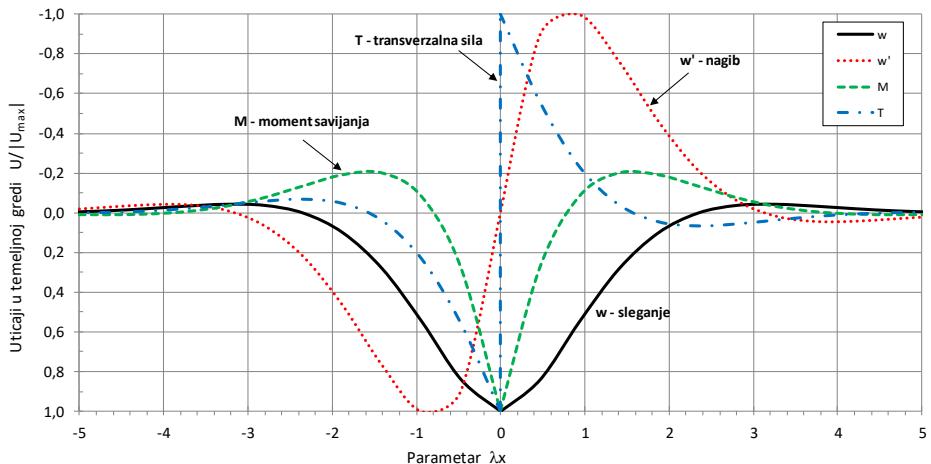
$$M = -E_b I \left( -\lambda^2 \frac{P}{8\lambda^3 E_b I} C(\lambda x) \right), \quad \lambda^2 = \left( \frac{kB}{4E_b I} \right)^{\frac{2}{4}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{P}{4\lambda} C(\lambda x) \quad (4.8)$$

$$T = -E_b I \left( 4\lambda^3 \frac{P}{8\lambda^3 E_b I} C(\lambda x) \right), \quad \lambda^3 = \left( \frac{kB}{4E_b I} \right)^{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{P}{2} D(\lambda x) \quad (4.9)$$

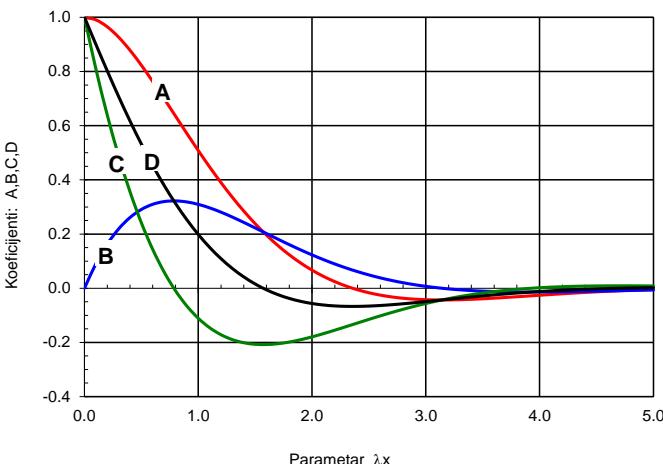
Na slici 4.3 je prikazan dijagram ugiba  $w$ , nagiba  $\theta$ , momenta savijanja  $M$  i transverzalne sile  $T$ , beskonačnog nosača (sa normiranim ordinatama od -1 do +1, u odnosu na maksimalne vrednosti), prikazan je u funkciji koeficijenta  $\lambda x$  u intervalu od  $-5 \leq \lambda x \leq 5$ . U prethodnim izrazima, pomoćne funkcije  $A(\lambda x)$ ,  $B(\lambda x)$ ,  $C(\lambda x)$  i  $D(\lambda x)$ , glase:

$$A(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)), \quad B(\lambda x) = e^{-\lambda x} \sin(\lambda x)$$

$$C(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)), \quad D(\lambda x) = e^{-\lambda x} \cos(\lambda x)$$



Slika 4.2 Uticaji u beskonačnom nosaču na Vinklerovoj podlozi, usled koncentrisane sile



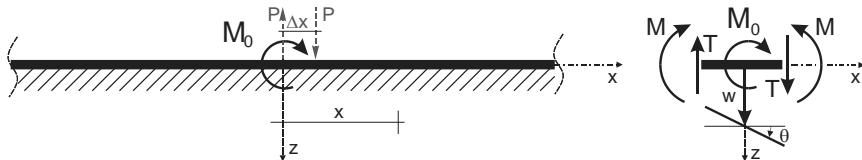
Slika 4.3 Grafički prikaz pomoćnih funkcija, za rešenje nosača na Vinklerovoj podlozi

Za odstojanje, za koje je koeficijent  $\lambda x > 2.5$ , ugib je  $< 2\%$ , a za  $\lambda x > 5.0$ , ugib je  $< 0.5\%$  od ugiba nosača ispod sile. Za  $\lambda x > 2.5$ , moment savijanja je  $< 11\%$ , a za  $\lambda x > 5$  je  $< 0.8\%$  od momenta savijanja ispod sile. To znači, da se uklanjanjem levog ili desnog dela nosača, koji su od sile udaljeni više od  $\lambda x = 2.5$  (efektivni radijus  $\approx 2.5/\lambda$ ), zanemarljivo utiče na promenu ugiba, transverzalne sile i momenta savijanja ispod sile.

## 4.2 Spreg sila na beskonačnoj gredi na Vinkler-ovoj podlozi

Spreg sila  $M_0$  može se zameniti sa dve paralelne sile suprotnog smera, na rastojanju  $\Delta x = M_0/P$ . Negativna sila  $P$  je u koordinatnom početku, a pozitivna na odstojanju  $\Delta x$  od koordinatnog početka (Slika 4.4). Pozitivan smer momenta je u smeru obrtanja kazaljke na satu, tako da daje pozitivan nagib elastičnoj liniji u I-kvadrantu ( $xOz$ ).

Konvencija za + znak



**Slika 4.4** Nosač beskonačne dužine na Vinklerovoj podlozi, opterećen spregom sila

U preseku na odstojanju  $x$  od koordinatnog početka, ugib nosača  $w$  je jednak zbiru ugiba od sile  $-P$  koja je od preseka udaljena  $x$ , i ugiba od sile  $+P$  koja je od preseka udaljena  $x - \Delta x$ , prema sledećoj jednačini:

$$w = w(M_0, x) = w(-P, x) + w(P, x - \Delta x) = -w(P, x) + w(P, x - \Delta x)$$

$$w = -\frac{P\lambda}{2Bk} [A(\lambda x) - A(\lambda(x - \Delta x))] = \frac{-P\lambda}{2Bk} \Delta A(\lambda x) \frac{\Delta x}{\Delta x} = -\frac{P\Delta x \lambda}{2Bk} \frac{\Delta A(\lambda x)}{\Delta x}$$

Kada se izvrši smena sprega dve paralelne sile  $P$ , i  $-P$  na rastojanju  $\Delta x$  momentom  $M_0$  i kada se pusti da rastojanje  $\Delta x$  teži ka nuli, dobiće se sledeći izrazi:

$$P\Delta x = M_0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A(\lambda x)}{\Delta x} = \frac{dA(\lambda x)}{dx} = -2\lambda B(\lambda x)$$

$$w = -\frac{M_0 \lambda}{2Bk} (-2\lambda B(\lambda x)) = \frac{M_0 \lambda^2}{Bk} B(\lambda x) \quad (4.10)$$

Uzastopnim diferenciranjem izraza (4.10), za presek na odstojanju  $x$ , desno od sprega sila  $M_0$ , mogu se dobiti izrazi za nagib elastične linije  $\theta$ , i presečne sile  $M$  i  $T$ .

Nagib elastične linije nosača iznosi:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{M_0 \lambda^2}{Bk} \frac{dB}{dx} = \frac{M_0 \lambda^2}{Bk} \lambda C(\lambda x) = \frac{M_0 \lambda^3}{Bk} C(\lambda x) \quad (4.11)$$

Moment savijanja u preseku nosača iznosi:

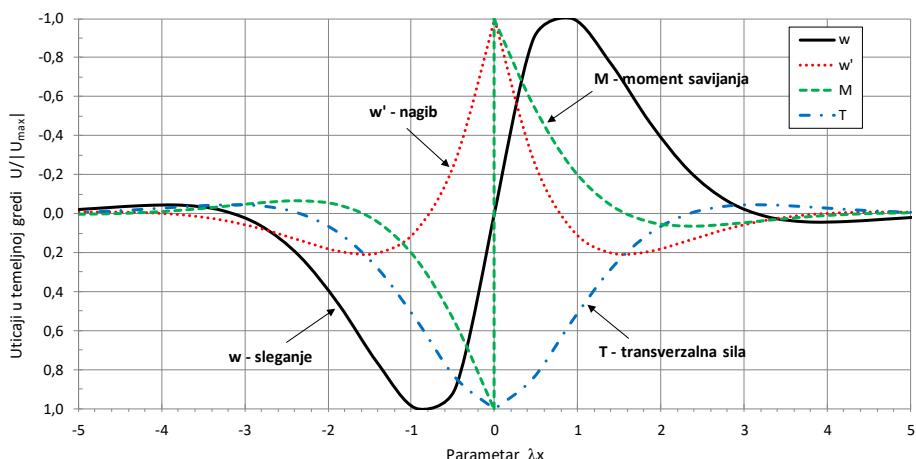
$$M = -E_b I \frac{d^2 w}{dx^2} = -E_b I \frac{M_0 \lambda^3}{Bk} \frac{d^2 B}{dx^2} = -E_b I \frac{M_0 \lambda^3}{Bk} (-2\lambda^2 D(\lambda x))$$

$$M = E_b I \frac{2M_0}{Bk} \lambda^4 D(\lambda x) = E_b I \frac{2M_0}{Bk} \frac{kB}{4E_b I} D(\lambda x) = \frac{M_0}{2} D(\lambda x) \quad (4.12)$$

Transverzalna sila u preseku nosača iznosi:

$$\begin{aligned} T &= -E_b I \frac{d^3 w}{dx^3} = -E_b I \frac{M_0 \lambda^2}{Bk} \frac{d^3 B}{dx^3} = -E_b I \frac{M_0 \lambda^2}{Bk} (2\lambda^3 A(\lambda x)) \\ T &= -E_b I \frac{2M_0 \lambda}{Bk} \lambda^4 A(\lambda x) = -E_b I \frac{2\lambda M_0}{Bk} \frac{kB}{4E_b I} A(\lambda x) = -\frac{M_0 \lambda}{2} A(\lambda x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dijagram ugiba  $w$ , nagiba  $\theta$ , momenta savijanja  $M$  i transverzalne sile  $T$ , beskonačnog nosača (sa normiranim ordinatama od -1 do +1, u odnosu na maksimalne vrednosti), prikazan je u funkciji karakterističnog parametra  $\lambda x$  u intervalu  $-5 \leq \lambda x \leq 5$ .

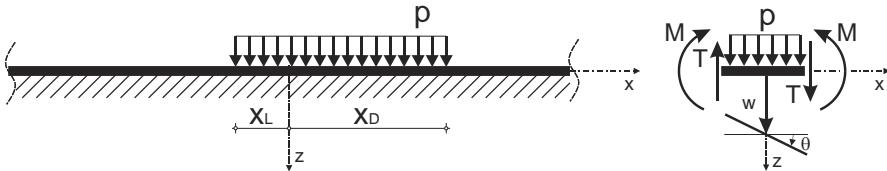


Slika 4.5 Uticaji u beskonačnom nosaču na Vinklerovoj podlozi, usled sprega sile

Za odstojanje, za koje je koeficijent  $\lambda x > 2.5$ , ugib je  $< 15.5\%$ , a za  $\lambda x > 5$ , ugib je  $< 2\%$  od ugiba nosača ispod sprega sile. Na odstojanju od  $\lambda x > 2.5$ , moment savijanja je  $< 6.5\%$ , a na  $\lambda x > 5$ , je  $< 0.2\%$  od momenta savijanja ispod sprega sile. To znači, da se uklanjanjem levog ili desnog dela nosača, koji su od sprega udaljeni više od  $\lambda x = 2.5$ , zanemarljivo utiče na promenu ugiba, odnosno presečnih sila nosača ispod sile.

#### 4.3 Linijsko opterećenje beskonačne grede na Vinkler-ovoj podlozi

Jednoliko raspodeljeno linijsko opterećenje intenziteta  $p$ , koje deluje na ograničenoj dužini nosača, počev od odstojanja  $x_L$  levo od koordinatnog početka do odstojanja  $x_D$  desno od koordinatnog početka, može se predstaviti kao integral niza malih koncentrisanih sila intenziteta  $dP = pdx$ .



Slika 4.6 Nosač beskonačne dužine na Vinklerovoj podlozi, opterećen jednolikim opterećenjem

Na osnovu Slike 4.6, imajući u vidu prethodno, diferencijalno sleganje nosača iznosi:

$$dw = \frac{\lambda dP}{2Bk} A(\lambda x) = \frac{\lambda pdx}{2Bk} A(\lambda x) = \frac{p\lambda}{2Bk} A(\lambda x) \frac{d(\lambda x)}{\lambda} = \frac{p}{2Bk} A(\lambda x) d(\lambda x) \quad (4.14)$$

Sleganje unutar opterećene površine, za presek koji je na odstojanju  $x_L$  od leve ivice i  $x_D$  od desne ivice opterećenja, glasi:

$$w = \frac{p}{2Bk} \int_0^{x_L} A(\lambda x) d(\lambda x) + \frac{p}{2Bk} \int_{x_D}^0 A(\lambda x) d(\lambda x)$$

$$w = \frac{p}{2Bk} [2 - D(\lambda x_L) - D(\lambda x_D)] \quad (4.15)$$

Uzastopnim diferenciranjem izraza (4.15), mogu se dobiti izrazi za nagib  $\theta$ , moment savijanja  $M$  i transverzalnu силу  $T$ , na odstojanju  $r$  od leve ivice, odnosno s od desne ivice opterećenja:

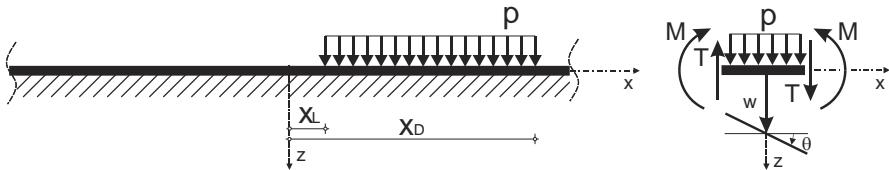
$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{p\lambda}{2Bk} [A(\lambda x_L) - A(\lambda x_D)] \quad (4.16)$$

$$M = -E_b I \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{p}{4\lambda^2} [B(\lambda x_L) - B(\lambda x_D)] \quad (4.17)$$

$$T = -E_b I \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{p}{4\lambda} [C(\lambda x_L) - C(\lambda x_D)] \quad (4.18)$$

Ako je presek za koji se traži uticaji izvan opterećene površine (Slika 4.7), sa leve strane jednoliko raspodeljenog opterećenja, izrazi za uticaje glase:

$$w = \frac{p}{2Bk} \int_0^{Ax_L} A(\lambda x) d(\lambda x) - \frac{p}{2Bk} \int_0^{Ax_D} A(\lambda x) d(\lambda x) = \frac{p}{2Bk} [D(\lambda x_L) - D(\lambda x_D)] \quad (4.19)$$



Slika 4.7 Nosač beskonačne dužine na Vinklerovoj podlozi, opterećen jednolikim opterećenjem

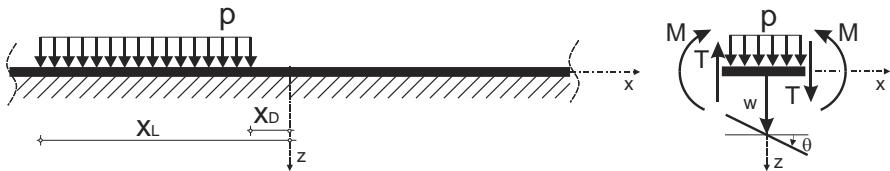
$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{p\lambda}{2Bk} [A(\lambda x_L) - A(\lambda x_D)] \quad (4.20)$$

$$M = -E_b I \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{p}{4\lambda^2} [B(\lambda x_L) - B(\lambda x_D)] \quad (4.21)$$

$$T = -E_b I \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{p}{4\lambda} [C(\lambda x_L) - C(\lambda x_D)] \quad (4.22)$$

Ako je presek izvan opterećene površine (4.8), sa desne strane opterećenja, izrazi za sleganje nosača  $w$ , nagib  $\theta$ , moment savijanja  $M$  i transverzalnu silu  $T$ , glase:

$$w = \frac{p}{2Bk} \int_0^{Ax_D} A(\lambda x) d(\lambda x) - \frac{p}{2Bk} \int_0^{Ax_L} A(\lambda x) d(\lambda x) = -\frac{p}{2Bk} [D(\lambda x_D) - D(\lambda x_L)] \quad (4.23)$$



Slika 4.8 Nosač beskonačne dužine na Vinklerovoj podlozi, opterećen jednolikim opterećenjem

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{p\lambda}{2Bk} [A(\lambda x_D) - A(\lambda x_L)] \quad (4.24)$$

$$M = -E_b I \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p}{4\lambda^2} [B(\lambda x_D) - B(\lambda x_L)] \quad (4.25)$$

$$T = -E_b I \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{p}{4\lambda} [C(\lambda x_D) - C(\lambda x_L)] \quad (4.26)$$

Pošto je u praksi temeljni nosač konačne dužine, izrazi izvedeni za beskonačni nosač na Vinklerovoj podlozi sami po sebi nemaju praktičnu primenu, ali su nezaobilazni kod proračuna temeljnih nosača konačne dužine primenom metode superpozicije. Koristeći "znak" funkciju, u tabeli 4.1 su dati uopšteni analitički izrazi za proračun uticaja u proizvolnjem preseku beskonačnog nosača na Vinkler-ovoj podlozi, za sve prethodno obradene tipove opterećenja.

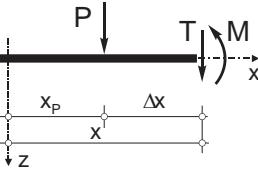
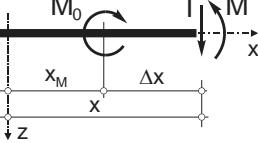
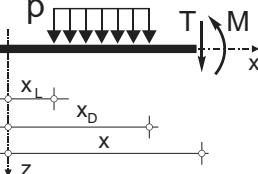
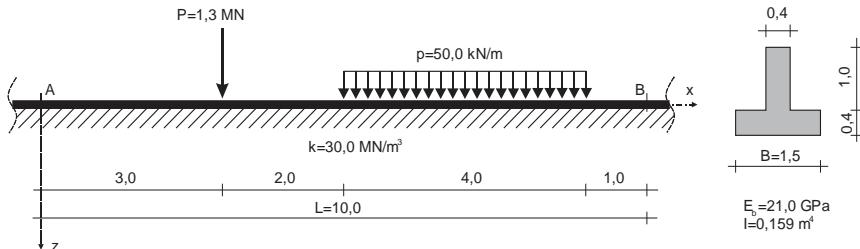
Tip opterećenja:	Presečne sile $M(x)$ i $T(x)$ , ugib $w(x)$ i nagib $\theta(x)$	
	$sgn(\Delta x < 0) = -1, \quad sgn(\Delta x = 0) = 0, \quad sgn(\Delta x > 0) = 1$	
	$\Delta x = x - x_P$ $M = \frac{P}{4\lambda} C(\lambda \Delta x )$ $w = \frac{P\lambda}{2Bk} A(\lambda \Delta x )$ $T = -sgn(\Delta x) \frac{P}{2} D(\lambda \Delta x )$ $\theta = -sgn(\Delta x) \frac{P\lambda^2}{Bk} B(\lambda \Delta x )$	
	$\Delta x = x - x_M$ $M = sgn(\Delta x) \frac{M_o}{2} D(\lambda \Delta x )$ $w = sgn(\Delta x) \frac{M_o \lambda^2}{Bk} B(\lambda \Delta x )$ $T = -\frac{M_o \lambda}{2} A(\lambda \Delta x )$ $\theta = \frac{M_o \lambda^3}{Bk} C(\lambda \Delta x )$	
	$\Delta x_L = x - x_L \quad \Delta x_D = x - x_D$ $M = \frac{p}{4\lambda^2} [sgn(\Delta x_L) \cdot B(\lambda \Delta x_L ) - sgn(\Delta x_D) \cdot B(\lambda \Delta x_D )]$ $T = \frac{p}{4\lambda} [C(\lambda \Delta x_L ) - C(\lambda \Delta x_D )]$ $w = \frac{p}{2Bk} [ sgn(\Delta x_L) - sgn(\Delta x_D)  - sgn(\Delta x_L) \cdot D(\lambda \Delta x_L ) + sgn(\Delta x_D) \cdot D(\lambda \Delta x_D )]$ $\theta = \frac{p\lambda}{2Bk} [A(\lambda \Delta x_L ) - A(\lambda \Delta x_D )]$	

Tabela 4.1

Pregledan prikaz  $M, T, w, \theta$  u preseku beskonačne grede na Vinklerovoj podlozi

### BROJNI PRIMER - 4.1

Potrebno je odrediti uticaje (sleganje  $w$ , nagib elastične linije  $\theta$ , transverzalnu силу  $T$  i moment savijanja  $M$ ) u tački A, B i nagib elastične linije ispod koncentrisane sile P, vrlo dugačkog nosača na deformabilnoj podlozi, prema opterećenju i dimenzijama na Slici 4.9. Temeljnu podlogu aproksimirati Vinklerovim modelom ( $k=30,0 \text{ MN/m}^3$ ). Proračun izvršiti analitički, prema izrazima za beskonačni nosač.



Slika 4.9 Opterećenje između tačaka A i B beskonačnog nosača

**Rešenje:**

Parametar krutosti sistema temeljni nosač – podloga (tlo), iznosi:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kB}{4E_b I}} = \sqrt[4]{\frac{30,0 \cdot 1,5}{4 \cdot 21000 \cdot 0,159}} = 0,2409 \text{ m}^{-1}$$

Proračun sleganja  $w$ , nagiba  $\theta$ , transverzalne sile  $T$  i momenta savijanja  $M$ , u tački A :

- pomoćne veličine za proračun uticaja koncentrisanog opterećenja :

$$\Delta x = x - x_P = 0 - 3,0 = -3,0 \quad sgn(\Delta x) = sgn(-3,0) = -I$$

- pomoćne veličine za proračun uticaja od jednakog podeljenog opterećenja :

$$\Delta x_L = x - x_L = 0 - 5,0 = -5,0 \quad \Delta x_D = x - x_D = 0 - 9,0 = -9,0$$

$$sgn(\Delta x_L) = sgn(-5,0) = -I \quad sgn(\Delta x_D) = sgn(-9,0) = -I$$

$$w_A = \frac{P\lambda}{2Bk} A(3\lambda) + \frac{p}{2Bk} [D(5\lambda) - D(9\lambda)]$$

$$w_A = \frac{1300 \cdot 0,2409}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} A(0,723) + \frac{50,0}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} [D(1,205) - D(2,169)] = 2,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_A = \frac{P\lambda^2}{Bk} B(3\lambda) + \frac{p\lambda}{2Bk} [A(5\lambda) - A(9\lambda)]$$

$$\theta_A = \frac{1300 \cdot 0,2409^2}{1,5 \cdot 30000} B(0,723) + \frac{50,0 \cdot 02409}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} [A(1,205) - A(2,169)] = 0,586 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_A = \frac{P}{4\lambda} C(3\lambda) - \frac{p}{4\lambda^2} [B(5\lambda) - B(9\lambda)]$$

$$M_A = \frac{1300,0}{0,964} C(0,723) - \frac{50,0}{0,232} [B(1,205) - B(2,169)] = 18,028 \text{ kNm}$$

$$T_A = \frac{P}{2} D(3\lambda) + \frac{p}{4\lambda} [C(5\lambda) - C(9\lambda)]$$

$$T_A = \frac{1300,0}{2} D(0,723) + \frac{50,0}{0,964} [C(1,205) - C(2,169)] = 235,914 \text{ kN}$$

Proračun sleganja w, nagiba θ, transverzalne sile T i momenta savijanja M, u tački B :

$$\Delta x = 7,0 \quad sgn(\Delta x) = 1 \quad \Delta x_L = 5,0 \quad sgn(\Delta x_L) = 1 \quad \Delta x_D = 1,0 \quad sgn(\Delta x_D) = 1$$

$$w_B = \frac{P\lambda}{2Bk} A(7\lambda) + \frac{p}{2Bk} [D(5\lambda) - D(\lambda)]$$

$$w_B = \frac{1300 \cdot 0,2409}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} A(1,687) + \frac{50,0}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} [D(1,205) - D(0,241)] = 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_B = -\frac{P\lambda^2}{Bk} B(7\lambda) + \frac{p\lambda}{2Bk} [A(5\lambda) - A(\lambda)]$$

$$\theta_B = -\frac{1300 \cdot 0,2409^2}{1,5 \cdot 30000} B(1,687) + \frac{50,0 \cdot 02409}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} [A(1,205) - A(0,241)] = -0,384 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_B = \frac{P}{4\lambda} C(7\lambda) + \frac{p}{4\lambda^2} [B(5\lambda) - B(\lambda)]$$

$$M_A = \frac{1300,0}{0,964} C(1,687) + \frac{50,0}{0,232} [B(1,205) - B(0,241)] = -257,049 \text{ kNm}$$

$$T_\infty = -\frac{P}{2} D(7\lambda) + \frac{p}{4\lambda} [C(5\lambda) - C(\lambda)]$$

$$T_B = -\frac{1300,0}{2} D(1,687) + \frac{50,0}{0,964} [C(1,205) - C(0,241)] = -24,930 \text{ kN}$$

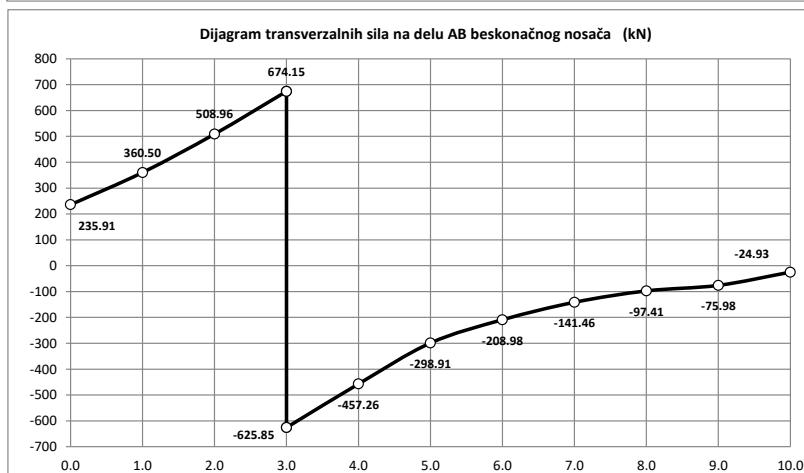
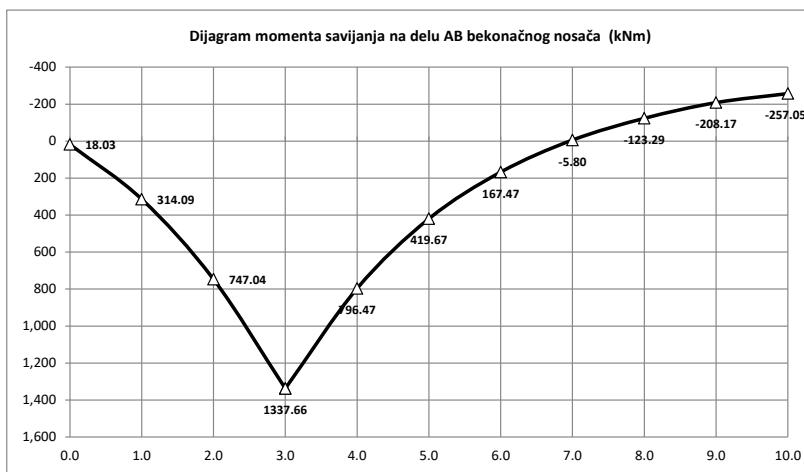
Sleganje  $w$  i nagib elastične linije beskonačnog nosača  $\theta$  ispod sile  $P$ :

$$w = \frac{P\lambda}{2Bk} A(0) + \frac{p}{2Bk} [D(2\lambda) - D(6\lambda)]$$

$$w = \frac{1300 \cdot 0,2409}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} 1,00 + \frac{50,0}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} [D(0,482) - D(1,445)] = 3,77 \cdot 10^{-3} m$$

$$\theta = \frac{P\lambda^2}{Bk} B(0) + \frac{p\lambda}{2Bk} [A(2\lambda) - A(6\lambda)]$$

$$\theta = \frac{1300 \cdot 0,2409^2}{1,5 \cdot 30000} 0,0 + \frac{50,0 \cdot 0,02409}{2 \cdot 1,5 \cdot 30000} [A(0,482) - A(1,445)] = 0,0765 \cdot 10^{-3} rad$$



Slika 4.10 Presečne sile na delu AB bekonačnog nosača na Vinklerovoj podlozi

#### 4.4 Vertikalna sila na beskonačnoj gredi na Pasternak-ovoj podlozi

Rešenje ovog problema je dao Selvadurai (1979). Kao i za slučaj beskonačne grede na Vinlerovoj podlozi, koeficijenti  $C_1$  i  $C_2$  uz član koji za  $x \rightarrow \infty$  daje  $w(x) \rightarrow \infty$ , moraju biti jednaki nuli, čime opšte rešenje za  $x \geq 0$  i integracione konstante prema (3.8) glasi:

$$w(x) = e^{-\alpha x} (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) , \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{G}{4E_b I}} , \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{G}{4E_b I}}$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0 \rightarrow C_3 \alpha + C_4 \beta = 0 , \quad T^d(0) = -\frac{P}{2} \rightarrow C_2 = \frac{P \lambda^2}{2 \alpha k B} \quad (4.27)$$

Zamenom integracionih konstanti u opšte rešenje, dobija se:

$$w(x) = \frac{P \lambda^2}{2kB} A(\alpha, \beta, x) , \quad A(\alpha, \beta, x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \beta} (\beta \cos(\beta x) + \alpha \sin(\beta x))$$

$$\theta(x) = \mp \frac{P}{4E_b I} B(\alpha, \beta, x) , \quad B(\alpha, \beta, x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \beta} \sin(\beta x) \quad (4.28)$$

$$M(x) = \frac{P}{4} C(\alpha, \beta, x) , \quad C(\alpha, \beta, x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \beta} (\beta \cos(\beta x) - \alpha \sin(\beta x))$$

$$T(x) = \mp \frac{P}{4} D(\alpha, \beta, x) , \quad D(\alpha, \beta, x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \beta} (2\alpha \beta \cos(\beta x) + (\alpha^2 - \beta^2) \sin(\beta x))$$

Predznak (-) odnosno (+) se odnos na vrednosti apscise  $x \geq 0$ , odnosno  $x < 0$ .

#### 4.5 Spreg sila na beskonačnoj gredi na Pasternak-ovoj podlozi

Zamenom sprega sila sa dve paralelne sile intenziteta  $\pm P$  na rastojanju  $\Delta x \rightarrow 0$ , dobija se beskonačna greda opterećena spregom sila  $M_0$  u koordinatnom početku. Opšte rešenje i granični uslovi su sledeći:

$$w(x) = e^{-\alpha x} (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) , \quad w(0) = 0 , \quad M^d(0) = -\frac{M_0}{2}$$

Zamenom nepoznatih integracionih konstanti u opšte rešenje, dobija se:

$$w(x) = \pm \frac{M_0}{4E_b I} B(\alpha, \beta, x) , \quad \theta(x) = \frac{M_0}{4E_b I} C(\alpha, \beta, x)$$

$$M(x) = \pm \frac{M_0}{4} D^*(\alpha, \beta, x) , \quad T(x) = -\frac{M_0}{4E_b I} A(\alpha, \beta, x) \quad (4.29)$$

$$D^*(\alpha, \beta, x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \beta} (2\alpha \beta \cos(\beta x) - (\alpha^2 - \beta^2) \sin(\beta x))$$

#### 4.6 Linijsko opterećenje beskonačne grede na Pasternak-ovoj podlozi

Kao i kod beskonačnog nosača na Vinklerovoj podlozi, jednako podeljeno linijsko opterećenje intenziteta  $p$ , koje deluje na ograničenoj dužini nosača, počev od odstojanja  $x_L$  levo od koordinatnog početka do odstojanja  $x_D$  desno od koordinatnog početka, može se pretstaviti kao integral niza malih koncentrisanih sila intenziteta  $dP=pdx$ . Rešenje zavisi od položaja tačke u odnosu na opterećenje.

I-slučaj kada je tačka unutar opterećenja:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{q}{2kB} [4 - D(\alpha, \beta, x_L) - D(\alpha, \beta, x_D)] \\ \theta(x) &= \frac{q\lambda^2}{2kB} [A(\alpha, \beta, x_L) - A(\alpha, \beta, x_D)] \\ M(x) &= \frac{q}{4} [B(\alpha, \beta, x_L) + B(\alpha, \beta, x_D)] \\ T(x) &= \frac{q}{4} [C(\alpha, \beta, x_L) + C(\alpha, \beta, x_D)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

II-slučaj kada je tačka levo od opterećenja:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{q}{2kB} [D(\alpha, \beta, x_L) - D(\alpha, \beta, x_D)] \\ \theta(x) &= \frac{q\lambda}{2kB} [A(\alpha, \beta, x_L) - A(\alpha, \beta, x_D)] \\ M(x) &= -\frac{q}{4} [B(\alpha, \beta, x_L) - B(\alpha, \beta, x_D)] \\ T(x) &= \frac{q}{4} [C(\alpha, \beta, x_L) - C(\alpha, \beta, x_D)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

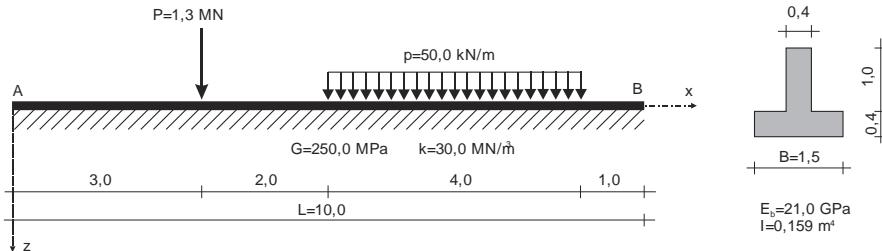
III-slučaj kada je tačka desno od opterećenja:

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{q}{2kB} [D(\alpha, \beta, x_L) - D(\alpha, \beta, x_D)] \\ \theta(x) &= \frac{q\lambda}{2kB} [A(\alpha, \beta, x_L) - A(\alpha, \beta, x_D)] \\ M(x) &= \frac{q}{4} [B(\alpha, \beta, x_L) - B(\alpha, \beta, x_D)] \\ T(x) &= \frac{q}{4} [C(\alpha, \beta, x_L) - C(\alpha, \beta, x_D)] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ako se  $G$  u jednačinama, zameni silom u membrani  $T$  ili smičućim parametrom  $t$ , dobija se rešenje za Filolenko-Borodich-etu i Vlasov-Leontijev-ovu podlogu.

## BROJNI PRIMER - 4.2

Potrebno je odrediti uticaje (sleganje  $w$ , nagib elastične linije  $\theta$ , transverzalnu silu  $T$  i moment savijanja  $M$ , u tački A, B i nagib elastične linije ispod koncentrisane sile P, vrlo dugačkog nosača na deformabilnoj podlozi, prema opterećenju i dimenzijama na Slici 4.11. Temeljnu podlogu aproksimirati Pasternakovim modelom ( $k=30.0 \text{ MN/m}^3$ ,  $G=250.0 \text{ MPa}$ ). Proračun izvršiti analitički, prema izrazima za beskonačni nosač.



Slika 4.11 Opterećenje između tačaka A i B beskonačnog nosača

**Rešenje:**

Parametri krutosti sistema temeljni nosač- podloga (tlo) iznose:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kB}{4E_bI}} = \sqrt[4]{\frac{30.0 \cdot 1.5}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159}} = 0.241 \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{G}{4E_bI}} = \sqrt{0.2409^2 + \frac{250.0}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159}} = 0.277 \text{ m}^{-1}$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{G}{4E_bI}} = \sqrt{0.2409^2 - \frac{250.0}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159}} = 0.198 \text{ m}^{-1}$$

Proračun sleganja  $w$ , nagiba  $\theta$ , transverzalne sile  $T$  i momenta savijanja  $M$ , u tački A:

- pomoćne veličine za proračun uticaja koncentrisanog opterećenja:  $x=3.0 \text{ m}$
- pomoćne veličine za proračun uticaja kontinualnog opterećenja:  $x_L=5.0 \text{ m}$ ,  $x_D=9.0 \text{ m}$

$$w_A = \frac{P \cdot \lambda^2}{2kB} A(\alpha, \beta, x) + \frac{q}{2kB} [D(\alpha, \beta, x_L) - D(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$w_A = \frac{1300 \cdot 0.241^2}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} \cdot 2.533 + \frac{50}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [0.417 - 0.020] = 2.34 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_A = \frac{P}{4E_b I} B(\alpha, \beta, x) + \frac{q \cdot \lambda}{2kB} [A(\alpha, \beta, x_L) - A(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$\theta_A = \frac{1300}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159} 4.444 + \frac{50 \cdot 0.241}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [1.551 + 0.344] = 0.433 \text{ rad}$$

$$M_A = \frac{P}{4} C(\alpha, \beta, x) - \frac{q}{4} [B(\alpha, \beta, x_L) - B(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$M_A = \frac{1300}{4} 0.071 - \frac{50}{4} [3.814 - 1.471] = -6.11 \text{ kNm}$$

$$T_A = \frac{P}{4} D(\alpha, \beta, x) + \frac{q}{4} [C(\alpha, \beta, x_L) - C(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$T_A = \frac{1300}{4} 0.888 + \frac{50}{4} [-0.562 + 0.471] = 287.40 \text{ kN}$$

Proračun sleganja  $w$ , nagiba  $\theta$ , transverzalne sile  $T$  i momenta savijanja  $M$ , u tački B:

- pomoćne veličine za proračun uticaja koncentrisanog opterećenja:  $x=7.0\text{m}$
- pomoćne veličine za proračun uticaja kontinualnog opterećenja:  $x_L=5.0\text{m}$ ,  $x_D=1.0\text{m}$

$$w_B = \frac{P \cdot \lambda^2}{2kB} A(\alpha, \beta, x) - \frac{q}{2kB} [D(\alpha, \beta, x_L) - D(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$w_B = \frac{1300 \cdot 0.241^2}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} \cdot 0.808 - \frac{50}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [0.417 - 1.588] = 1.33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_B = -\frac{P}{4E_b I} B(\alpha, \beta, x) + \frac{q \cdot \lambda}{2kB} [A(\alpha, \beta, x_L) - A(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$\theta_B = -\frac{1300}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159} 2.575 + \frac{50 \cdot 0.241}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [1.551 - 3.436] = -0.251 \text{ rad}$$

$$M_B = \frac{P}{4} C(\alpha, \beta, x) + \frac{q}{4} [B(\alpha, \beta, x_L) - B(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$M_B = \frac{1300}{4} (-0.619) + \frac{50}{4} [3.815 - 2.719] = -187.48 \text{ kNm}$$

$$T_B = -\frac{P}{4} D(\alpha, \beta, x) + \frac{q}{4} [C(\alpha, \beta, x_L) - C(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$T_B = -\frac{1300}{4} (0.149) + \frac{50}{4} [-0.562 - 1.930] = -79.44 \text{ kN}$$

Proračun sleganja w, nagiba θ, u tački C:

- pomoćne veličine za proračun uticaja koncentrisanog opterećenja: x=0
- pomoćne veličine za proračun uticaja kontinualnog opterećenja: x<sub>L</sub>=2.0m, x<sub>D</sub>=6.0m

$$w_C = \frac{P \cdot \lambda^2}{2kB} A(\alpha, \beta, x) - \frac{q}{2kB} [D(\alpha, \beta, x_L) - D(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$w_C = \frac{1300 \cdot 0.24I^2}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} \cdot 3.610 + \frac{50}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [1.211 - 0.26I] = 3.55 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_C = -\frac{P}{4E_b I} B(\alpha, \beta, x) + \frac{q \cdot \lambda}{2kB} [A(\alpha, \beta, x_L) - A(\alpha, \beta, x_D)]$$

$$\theta_C = \frac{1300}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159} 0.000 + \frac{50 \cdot 0.24I}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [3.033 - 1.143] = 0.253 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

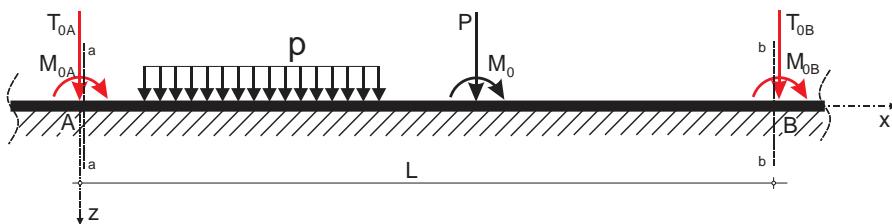
## METODA SUPERPOZICIJE OPTEREĆENJA ZA KONAČNU GREDU

Za grede konačne dužine, sa proizvoljnim i složenim opterećenjem, metoda početnih parametara, koja je prikazana za beskonačni nosač postaje komplikovana. Umesto nje, za analitičko rešavanje inžinjerskih problema znatno jednostavnija i brža je metoda superpozicije (Hetenyi, 1936). Ona se zasniva na rešenjima za beskonačnu gredu, koja je pojedinačno opterećena: vertikalnim silama, spregovima sile, kao i ravnomerno podeljenim opterećenjem. Greda konačne dužine, posmatra se samo kao deo beskonačne grede (zauzima samo određeni deo beskonačne grede). Metoda superpozicije se može primeniti za bilo koji tip deformabilne podloge, međutim ovde će se prikazati samo za Vinklerovu podlogu. U metodi se implicitno prepostavlja da važi princip superpozicije, odnosno da je kontaktni napon (reaktivno opterećenje nosača) linearna funkcija sleganja podloge.

Da bi se zadovoljili granični uslovi za temeljni nosač konačne dužine, na beskonačni nosač, u tačkama koje odgovaraju krajevima konačnog nosača, treba dodati fiktivne sile, koje čine 2 momenta i 2 transverzalne sile. Nepoznate fiktivne sile se određuju iz četiri (4) uslovne jednačine, dobijene na osnovu graničnih uslova po silama i/ili pomeranjima na levom i desnom kraju temeljnog nosača konačne dužine.

### 5.1 Konačna greda na Vinkler-ovoj podlozi

Posmatra se deo beskonačnog nosača na Vinklerovoj podlozi, između tačaka A i B, na rastojanju L, koje odgovaraju krajevima konačnog nosača. Koordinatni početak je u tački A i osa x je usmerena od tačke A prema tački B. Između tačaka A i B, na nosač deluje proizvoljno opterećenje (koncentrisana sila, spreg sile, linijsko opterećenje). Pošto su krajevi konačnog nosača u tačkama A i B su slobodni (Slika 5.2a), moment savijanja i transverzalna sila u njima moraju biti jednaki nuli ( $M=T=0$ ).



Slika 5.1 Konačni nosač, kao deo beskonačnog nosača, sa aktivnim i fiktivnim silama

Presečne sile na beskonačnom nosaču, usled zadatog opterećenja, u tački A blisko desno (a-a) označiće se sa  $M_A$  i  $T_A$  a u tački B blisko levo (b-b) sa  $M_B$  i  $T_B$ .

Granični uslovi na slobodnom kraju nosača glase  $M(0)=T(0)=0$  i  $M(L)=T(L)=0$ . Da bi se zadovoljio granični uslov, pored zadatog opterećenja je potrebno u tačke A i B beskonačnog nosača, dodati i fiktivne sile  $M_{0A}$ ,  $T_{0A}$ ,  $M_{0B}$ ,  $T_{0B}$ .

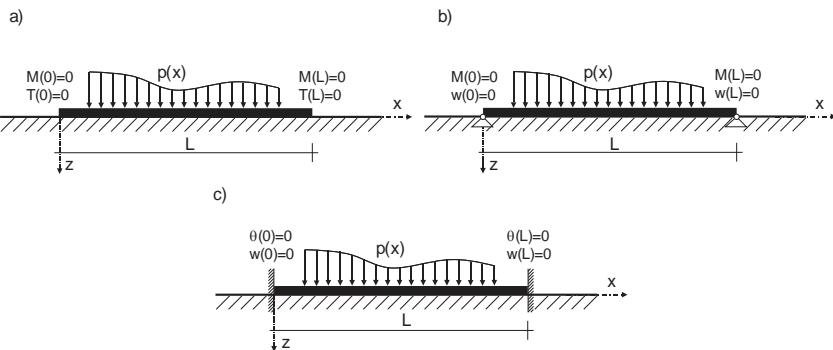
Ukupan moment savijanja u beskonačnom nosaču, u tački A blisko desno (a-a), usled zadatog opterećenja i fiktivnih sile  $T_{0A}$ ,  $T_{0B}$ ,  $M_{0A}$  i  $M_{0A}$ , na beskonačnom nosaču, mora biti jednak nuli:

$$M_A + \frac{M_{0A}}{2} D(0) - \frac{M_{0B}}{2} D(\lambda L) + \frac{T_{0A}}{4\lambda} C(0) + \frac{T_{0B}}{4\lambda} C(\lambda L) = 0 \quad (5.1)$$

Jednačine oblika (5.1) se mogu napisati i za ostale granične uslove: moment savijanja u tački B blisko levo (presek b-b), transverzalnu silu u tački A blisko desno (presek a-a) i transverzalnu silu u tački B blisko levo (presek b-b). Sve četiri uslovne jednačine za nosač na Vinklerovoj podlozi (za slobodne krajeve), mogu se pregledno napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ T_A \\ T_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{D(0)}{2} & -\frac{D(\lambda L)}{2} & \frac{C(0)}{4\lambda} & \frac{C(\lambda L)}{4\lambda} \\ \frac{D(\lambda L)}{2} & -\frac{D(0)}{2} & \frac{C(\lambda L)}{4\lambda} & \frac{C(0)}{4\lambda} \\ -\frac{\lambda A(0)}{2} & -\frac{\lambda A(\lambda L)}{2} & -\frac{4\lambda}{D(0)} & \frac{4\lambda}{D(\lambda L)} \\ -\frac{\lambda A(\lambda L)}{2} & -\frac{\lambda A(0)}{2} & -\frac{2}{D(\lambda L)} & \frac{2}{D(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{0A} \\ M_{0B} \\ T_{0A} \\ T_{0B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Rešenjem gornje jednačine, dobijaju se nepoznate fiktivne sile  $M_{0A}$ ,  $T_{0A}$ ,  $M_{0B}$  i  $T_{0B}$  koje zajedno sa aktivnim opterećenjem na beskonačnom nosaču zadovoljavaju uslove za slobodan kraj konačnog nosača. Pri proračunu uticaja u bilo kom preseku između tačaka A i B beskonačnog nosača, osim uticaja od aktivnog opterećenja uvek treba uzeti u obzir i fiktivno opterećenje. Uticaji koji se na prikazan način računaju za beskonačni nosač, odgovaraju uticajima za konačni nosač. Na sličan način, mogu se analizirati i drugačiji granični uslovi na slici 5.2.



Slika 5.2 Granični uslovi na krajevima nosača: a) Slobodan, b) Zglobno oslonjen, c) Uklješten

Ako je konačan nosač slobodno oslonjen na krajevima, u tačkama A i B (Slika 5.2b), moment savijanja i ugib moraju biti jednaki nuli. Da bi se zadovoljio granični uslov na kraju nosača konačne dužine, pored zadatog opterećenja, treba u tačke A i B beskonačnog nosača, dodati fiktivne sile  $T_{0A}$ ,  $T_{0B}$ ,  $M_{0A}$ ,  $T_{0B}$ .

Ukupan ugib  $w(0)$  beskonačnog nosača u tački A blisko desno (a-a), usled zadatog opterećenja i fiktivnih sile  $T_{0A}$ ,  $T_{0B}$ ,  $M_{0A}$ ,  $T_{0B}$  na beskonačnom nosaču, mora biti jednak nuli:

$$w_A + \frac{\lambda^2 M_{0A}}{Bk} B(0) - \frac{\lambda^2 M_{0B}}{Bk} B(\lambda L) + \frac{\lambda T_{0A}}{2Bk} A(0) + \frac{\lambda T_{0B}}{2Bk} A(\lambda L) = 0 \quad (5.3)$$

Jednačine oblika (5.3) se mogu napisati i za ostale granične uslove: ugib nosača u tački B blisko levo (presek b-b), moment savijanja u tački A blisko desno (presek a-a) i moment savijanja u tački B blisko levo (presek b-b).

Sve četiri uslovne jednačine za nosač na Vinklerovoj podlozi (za slobodno oslonjene krajeve), mogu se pregledno napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ w_A \\ w_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{D(0)}{2} & -\frac{D(\lambda L)}{2} & \frac{C(0)}{4\lambda} & \frac{C(\lambda L)}{4\lambda} \\ \frac{D(\lambda L)}{2} & -\frac{D(0)}{2} & \frac{C(\lambda L)}{4\lambda} & \frac{C(0)}{4\lambda} \\ \frac{\lambda^2 B(0)}{Bk} & -\frac{\lambda^2 B(\lambda L)}{Bk} & \frac{\lambda A(0)}{2Bk} & \frac{\lambda A(\lambda L)}{2Bk} \\ -\frac{\lambda^2 B(\lambda L)}{Bk} & \frac{\lambda^2 B(0)}{Bk} & \frac{\lambda A(\lambda L)}{2Bk} & \frac{\lambda A(0)}{2Bk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{0A} \\ M_{0B} \\ T_{0A} \\ T_{0B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Ako konačan nosač ima uklještene krajeve u tačkama A i B (Slika 5.2c), ugib i nagib na kraju nosača mora biti jednak nuli. Da bi se zadovoljili granični uslovi nosača, pored zadatog opterećenja, u tačke A i B beskonačnog nosača treba dodati fiktivne sile  $M_{0A}$ ,  $T_{0A}$ ,  $M_{0B}$ ,  $T_{0B}$ .

Ukupan nagib u tački A blisko desno (presek a-a), usled aktivnog-zadatog i fiktivnog opterećenja na beskonačnom nosaču, mora biti jednak nuli:

$$\theta_A + \frac{\lambda^3 M_{0A}}{Bk} C(0) + \frac{\lambda^3 M_{0B}}{Bk} C(\lambda L) - \frac{\lambda^2 T_{0A}}{Bk} B(0) + \frac{\lambda^2 T_{0B}}{Bk} B(\lambda L) = 0 \quad (5.5)$$

Sve četiri uslovne jednačine, za nosač na Vinklerovoj podlozi (za uklještene krajeve), mogu se pregledno napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ w_A \\ w_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda^3 C(0)}{Bk} & \frac{\lambda^3 C(\lambda L)}{Bk} & -\frac{\lambda^2 B(0)}{Bk} & \frac{\lambda^2 B(\lambda L)}{Bk} \\ \frac{\lambda^3 C(\lambda L)}{Bk} & \frac{\lambda^3 C(0)}{Bk} & \frac{\lambda^2 B(\lambda L)}{Bk} & \frac{\lambda^2 B(0)}{Bk} \\ \frac{\lambda^2 B(0)}{Bk} & -\frac{\lambda^2 B(\lambda L)}{Bk} & \frac{\lambda A(0)}{2Bk} & \frac{\lambda A(\lambda L)}{2Bk} \\ -\frac{\lambda^2 B(\lambda L)}{Bk} & \frac{\lambda^2 B(0)}{Bk} & \frac{\lambda A(\lambda L)}{2Bk} & \frac{\lambda A(0)}{2Bk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{0A} \\ M_{0B} \\ T_{0A} \\ T_{0B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Na sličan način se mogu ispisati i kombinovani granični uslovi za levi i desni kraj temeljnog nosača na Vinklerovoj podlozi.

## 5.2 Klasifikacija grede na Vinkler-ovoj podlozi

Klasifikacija temeljnih greda konačne dužine na Vinklerovoju podlozi, vrši se prema koeficijentu savitljivosti  $\lambda L$ . Ako je koeficijent savitljivosti temeljnog nosača veći tada je nosač savitljiviji i obrnuto (manje savitljiv, odnosno krući).

Na savitljivom nosaču (veliko  $\lambda L$ ), uticaji se prenose na malu udaljenost od sile, dok se kod krutih nosača (malo  $\lambda L$ ), uticaji prenose na veću udaljenost od sile.

Na primer, na udstojanju  $\lambda x = 3\pi/4 \approx 2.35$  od koncentrisane sile, ugib nosača je jednak nuli, što znači da je unutar navedene dužine podloga pritisnuta. Ako je nosač, čija je dužina  $\lambda L = 2.35 + 2.35 = 4.7$ , opterećena u sredini koncentrisanom silom, tada je cela podloga pritisnuta a na krajevima nosača je pritisak jednak nuli.

Ako je dužina nosača veća od  $\lambda L = 4.7$ , na krajevima se pojavljuje odizanje nosača od podloge i pojavljuju se naponi zatezanja. Treba imati u vidu da su naponi zatezanja u kontaktu, matematički rezultat. Fizički, naponi zatezanja u kontaktu nisu mogući, zbog čega se ukoliko postoje, moraju određenim iterativnim postupkom eliminisati na račun povećanja napona u pritisnutoj zoni.

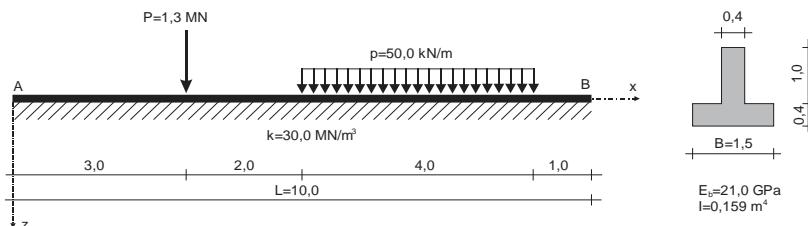
Uobičajena klasifikacija temeljnih nosača/greda na Vinklerovoju podlozi, u funkciji koeficijenta savitljivosti  $\lambda L$ , vrši se prema Hetenyiu ili prema Vesiću (1961), prema tabeli 5.1.

<b>Klasifikacija Hetenyi,1936)</b>	$\lambda L$	<b>Klasifikacija (Vesić,1961)</b>	$\lambda L$
Kratke (krute) grede	$< 0.80$	Kratke (krute) grede	$< 0.80$
Grede srednje dužine	$0.80 - \pi$	Grede srednje dužine	$0.80 - 2.25$
-	-	Srednje dugačke grede	$2.25 - 5.00$
Dugačke (savitljive) grede	$> \pi$	Dugačke (savitljive) grede	$> 5.00$

**Tabela 5.1** Klasifikacija grede na deformabilnoj podlozi prema parametru  $\lambda L$

## BROJNI PRIMER - 5.1

Dat je temeljni nosač konačne dužine na Vinklerovoj podlozi, dimenzija i opterećenja prema Slici 5.3. Potrebno je izračunati sleganje  $w$ , nagib elastične linije  $\theta$ , transverzalnu силу  $T$  i moment savijanja  $M$  nosača, ispod koncentrisane sile. Proračun izvršiti analitički, metodom superpozicije.



Slika 5.3 Opterećenje između tačaka A i B konačnog nosača

**Rešenje:**

Parametar krutosti sistema temeljni nosač – podloga (tlo), iznosi:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{KB}{4E_b I}} = \sqrt[4]{\frac{30,0 \cdot 1,5}{4 \cdot 21000 \cdot 0,159}} = 0,2409 \text{ m}^{-1}$$

$\lambda L = 0,2409 \cdot 10,0 \cong 2,41$  Prema klasifikaciji, greda je srednje dužine !

**Napomena:** Pri proračunu transverzalne sile i momenta savijanja u proizvoljnem preseku nosača na Vinklerovoj podlozi, ne uzimaju se u obzir (kao što je pravilo u statici) samo sile sa jedne strane preseka, već sve sile koje deluju na nosač. Razlog je u konceptu proračuna, u kojem ne figurišu kontaktni naponi, već sve aktivne sile na nosaču i po dve fiktivne sile na krajevima nosača. Ako bi se uticaj podloge zamenio kontaktnim naponom, presečne sile bi se mogle odrediti na osnovu aktivnih sila i kontaktnih napona koje deluju na nosač, sa jedne ili druge strane preseka.

Pored vrednosti presečnih sila dobijenih analitičkom metodom, u zagradi su date i vrednosti prema programu za statičko-dinamičku analizu konstrukcije (Tower)\*. Presečne sile od zadatog opterećenja na beskonačnom nosaču u tački A<sub>desno</sub> i B<sub>levo</sub>:

$$M_A = \frac{P}{4\lambda} C(3\lambda) - \frac{p}{4\lambda^2} [B(5\lambda) - B(9\lambda)]$$

$$M_A = \frac{1300.0}{0.964} 0.043 - \frac{50.0}{0.232} [0.280 - 0.095] = 18.028 \text{ kNm} \quad (11.59)^*$$

$$M_B = \frac{P}{4\lambda} C(7\lambda) - \frac{p}{4\lambda^2} [B(5\lambda) - B(\lambda)]$$

$$M_B = \frac{1300.0}{0.964} - 0.205 - \frac{50.0}{0.232} 0.280 - 0.188 = -257.049 \text{ kNm} \quad (-257,20)^*$$

$$T_A = \frac{P}{2} D(3\lambda) + \frac{p}{4\lambda} [C(5\lambda) - C(9\lambda)]$$

$$T_A = \frac{1300.0}{2} 0.364 + \frac{50.0}{0.964} [-0.173 - (-0.159)] = 235.914 \text{ kN} \quad (228.08)^*$$

$$T_B = -\frac{P}{2} D(7\lambda) + \frac{p}{4\lambda} [C(5\lambda) - C(\lambda)]$$

$$T_B = -\frac{1300.0}{2} (-0.021) + \frac{50.0}{0.964} [-0.173 - 0.576] = -24.930 \text{ kN} \quad (-23.92)^*$$

Uslovne jednačine (5.2) za krajeve A i B nosača konačne dužine (slobodan kraj) glase:

$$\begin{bmatrix} 18.028 \\ -257.049 \\ 235.914 \\ -24.930 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.033419 & 1.037366 & -0.033419 \\ -0.033419 & -0.5 & -0.131713 & 1.037366 \\ -0.120463 & 0.000812 & -0.5 & -0.033419 \\ 0.000812 & -0.120463 & 0.033419 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{oA} \\ M_{oB} \\ T_{oA} \\ T_{oB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fiktivne sile u tačkama A i B beskonačne grede iznose:

$$M_{oA} = -2112.385 \text{ kNm} \quad M_{oB} = -1329.643 \text{ kNm}$$

$$T_{oA} = 1000.917 \text{ kN} \quad T_{oB} = -333.954 \text{ kN}$$

Proračun ugiba w, ispod koncentrisane sile P, na odstojanju x=3.0 m :

$$w(3.0) = \frac{P\lambda}{2Bk} 1.0 + \frac{p}{2Bk} [D(2\lambda) - D(6\lambda)] + \frac{T_{oA}\lambda}{2Bk} A(3\lambda) + \frac{T_{oB}}{2Bk} A(7\lambda) + \frac{M_{oB}\lambda^2}{Bk} B(3\lambda) - \frac{M_{oB}\lambda^2}{Bk} B(7\lambda)$$

$$w(3.0) = \frac{1300.0 \cdot 0.241}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} 1.0 + \frac{50.0}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [0.547 - 0.029] + \frac{100.917 \cdot 0.241}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} 0.685 + \frac{-333.954 \cdot 0.241}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} 0.163 + \frac{2112.385 \cdot 0.241^2}{1.5 \cdot 30000} 0.321 + \frac{1329.643 \cdot 0.241^2}{1.5 \cdot 30000} 0.184 = 4.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Proračun nagiba  $\theta$ , ispod koncentrisane sile P, na odstojanju x=3.0 m :

$$\theta(3.0) = \frac{P\lambda^2}{Bk} B(0) + \frac{p\lambda}{2Bk} [A(2\lambda) - A(6\lambda)] - \frac{T_{0A}\lambda^2}{Bk} B(3\lambda) + \frac{T_{0B}\lambda^2}{Bk} B(7\lambda) + \frac{M_{0A}\lambda^3}{Bk} C(3\lambda) - \frac{M_{0B}\lambda^3}{Bk} C(7\lambda)$$

$$\theta(3.0) = \frac{1300.0 \cdot 0.241^2}{1.5 \cdot 30000} 0.0 + \frac{50.0 \cdot 0.241}{2 \cdot 1.5 \cdot 30000} [0.834 - 0.263] - \frac{1000.917 \cdot 0.241^2}{1.5 \cdot 30000} 0.321 + \frac{-333.954 \cdot 0.241^2}{1.5 \cdot 30000} 0.184 + \frac{2112.385 \cdot 0.241^3}{1.5 \cdot 30000} 0.043 - \frac{1329.643 \cdot 0.241^3}{1.5 \cdot 30000} (-0.205) = -0.000361 \text{ rad}$$

Proračun momenta M, ispod koncentrisane sile P, na odstojanju x=3.0 m :

$$M(3.0) = \frac{P}{4\lambda} C(0) - \frac{p}{4\lambda^2} [B(2\lambda) - B(6\lambda)] + \frac{T_{0A}}{4\lambda} C(3\lambda) + \frac{T_{0B}}{4\lambda} C(7\lambda) + \frac{M_{0A}}{2} D(3\lambda) + \frac{M_{0B}}{2} D(7\lambda)$$

$$M(3.0) = \frac{1300.0}{4 \cdot 0.241} 1.0 - \frac{50.0}{40.241^2} [0.286 - 0.234] + \frac{2112.385}{4 \cdot 0.241} 0.043 + \frac{1329.643}{4 \cdot 0.241} \cdot (-0.205) + \frac{-2111.39}{2} 0.364 + \frac{-1329.64}{2} (-0.021) = 1054.723 \text{ kNm}$$

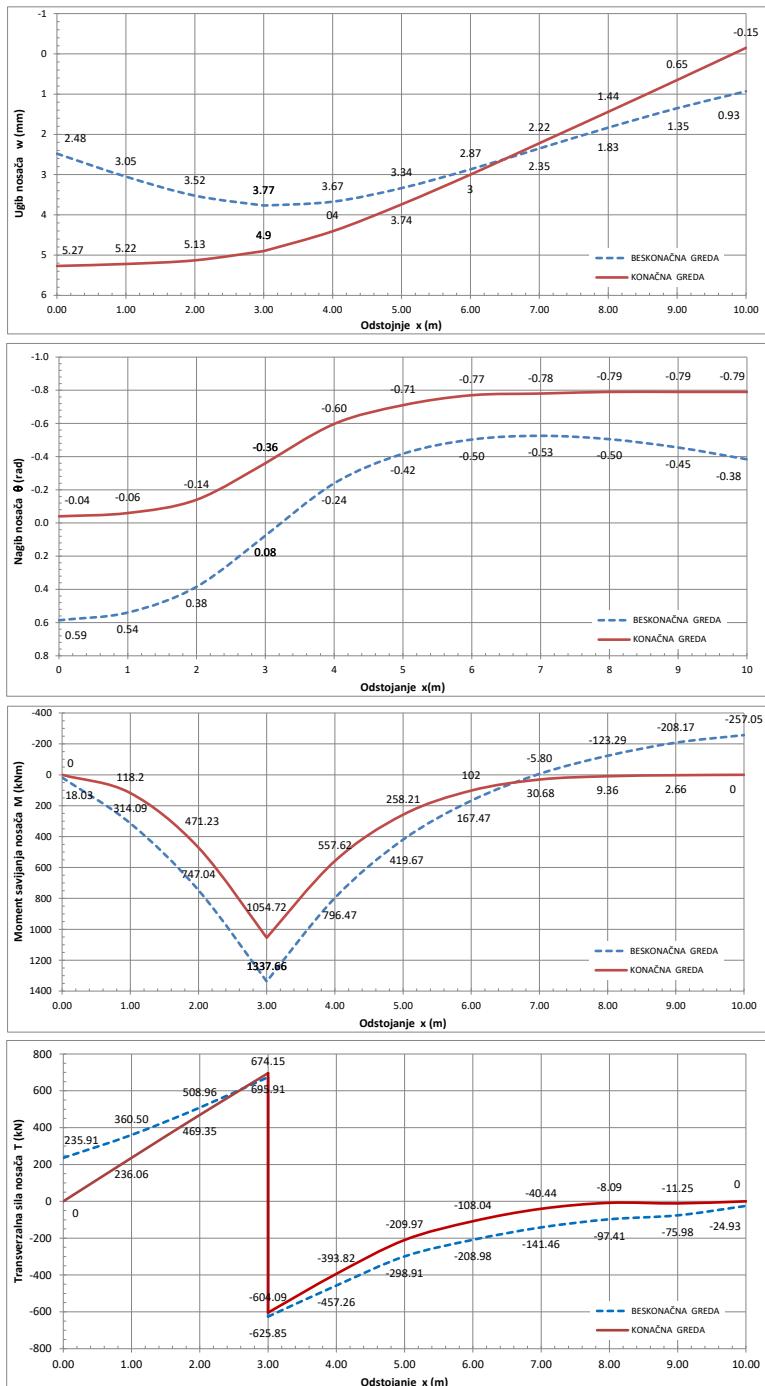
Proračun transverzalne sile  $T_l$  blisko levo ispod koncentrisane sile P, na x=2.9999 m :

$$T_l(3.0) = \frac{P}{2} D(0) + \frac{p}{4\lambda} [C(2\lambda) - C(6\lambda)] - \frac{T_{0A}}{2} D(3\lambda) + \frac{T_{0B}}{2} D(7\lambda) - \frac{M_{0A}\lambda}{2} A(3\lambda) + \frac{M_{0B}\lambda}{2} A(7\lambda)$$

$$T_l(3.0) = \frac{1300}{2} 1 + \frac{50.0}{4 \cdot 0.241} [0.261 - 0.043] - \frac{1000.917}{2} 0.364 + \frac{-333.954}{2} (-0.021) - \frac{-2112.385 \cdot 0.241}{2} 0.685 + \frac{-1329.643 \cdot 0.241}{2} 0.163 = 695.906 \text{ kN}$$

Proračun transverzalne sile  $T_d$  blisko desno od sile P, na odstojanju x=3.0001 m:

$$T_d(3.0) = T_l(3.0) - P = 695.906 - 1300.0 = -604.094 \text{ kN}$$



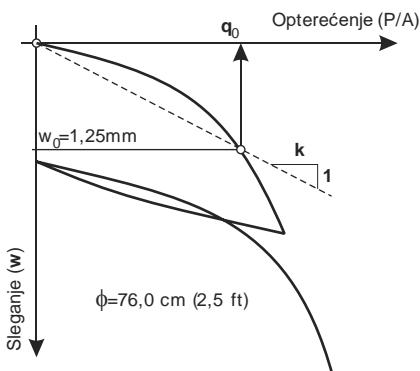
Slika 5.4 Grafički prikaz rezultata proračuna za temeljni nosač iz Primera 4.1 i Primera 5.1

### 5.3 Terensko određivanje modula reakcije tla

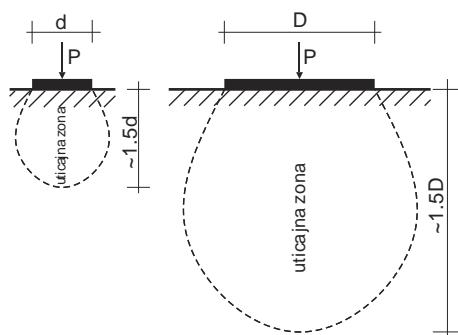
Modul reakcije tla, kao odnos kontaktnog napona i sleganja nije fundamentalna fizička karakteristika, jer osim vrste tla i nivoa opterećenja, zavisi od oblika i dimenzije opterećene površine. Za razliku od modula reakcije tla, deformacijski parametri tla kao npr. modul elastičnosti i Poisson-ov koeficijent su fundamentalne karakteristike jer ne zavise od oblika i dimenzije opterećene površine.

Modul reakcije se određuje pomoću kružne ploče  $\phi 762\text{mm}$  (2.5ft) ili  $\phi 305\text{mm}$  (1ft). Osim modula reakcije, na osnovu rezultata opita se može odrediti i modul stišljivosti  $M_s$  kao i statički modul deformacije za kompresiju  $E_{v1}$  i rekompresiju  $E_{v2}$ . Prema izvornom standardu (ASTM), modul reakcije se određuje kružnom pločom  $\phi 76.2\text{cm}$  (2.5ft) i predstavlja nagib sekante na dijagramu (Slika 5.5a), za sleganje od 1.0 in/20. Veličine stopa (ft) i palac (in) = ft/12=25.4mm su imperijalne jedinice za dužinu.

a)



b)



Slika 5.5

a) Definicija modula reakcije  $k$ , b) Efekat veličine temelja

Prema EC7 standardu (Evrokod), modul reakcije tla i statički moduli deformacije za kompresiju i rekompresiju, određuju se na osnovu interpolacionog polinoma oblika:

$$s = a_0 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2$$

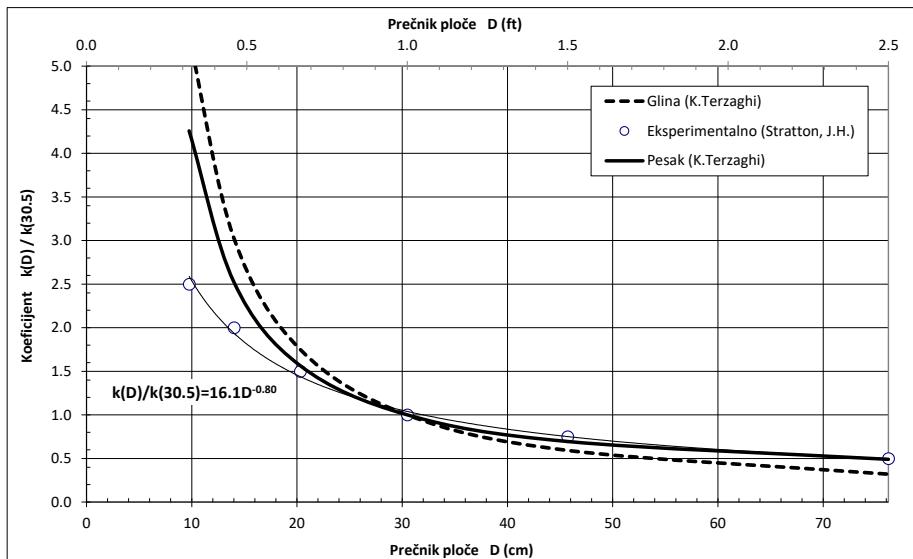
Koeficijenti  $a_0$ ,  $a_1$  i  $a_2$  polinoma se određuju Gaus-ovom metodom najmanjih kvadrata. Nakon proračuna koeficijenata polinoma za granu kompresije i rekompresije, modul reakcije tla i statički modul deformacije (u intervalu opterećenja 0- $q_{\max}$ ), se određuje prema:

$$k_0 = \frac{1}{a_1 + 0.25\sqrt{a_1^2 + 5a_2}} \quad , \quad E_v = 0.75 \frac{d}{a_1 + a_2 \cdot q_{\max}}$$

Da bi se na lokaciji uopšte mogla uspostaviti veza između veličine i oblika opterećene površine, tlo u zoni dejstva opterećenja (Slika 5.5b) mora da bude homogeno!

Detaljan opis postupka određivanja modula reakcije tla/podloge/posteljice u funkciji vrste tla i veličine opterećene površine, dali su Terzaghi (1955), Teng (1962), Nair (1974), Bowles (1977) i dr. Generalni je zaključak da modul reakcije tla nije konstanta veličina, već da zavisi od vrste tla (vlažnosti i zbijenosti), nivoa opterećenja, veličine i oblika opterećene površine i dubine fundiranja.

Grafički prikaz odnosa modula reakcije tla  $k(D)$  za ploču prečnika  $D$ , i prečnika opitne ploče 30.5cm, prikazan je na Slici 5.6. Na slici su prikazane empirijske vrednosti po Terzaghi-i eksperimentalne vrednosti prema Stratton-u. Evidentno je, da se pri ispitivanju podloge sa kružnom pločom većeg prečnika od 30.5cm dobijaju niže vrednosti modula reakcije tla i obrnuto. Zbog toga, uz vrednost modula reakcije uvek treba navesti i prečnik kružne ploče kojom je vršeno ispitivanje.

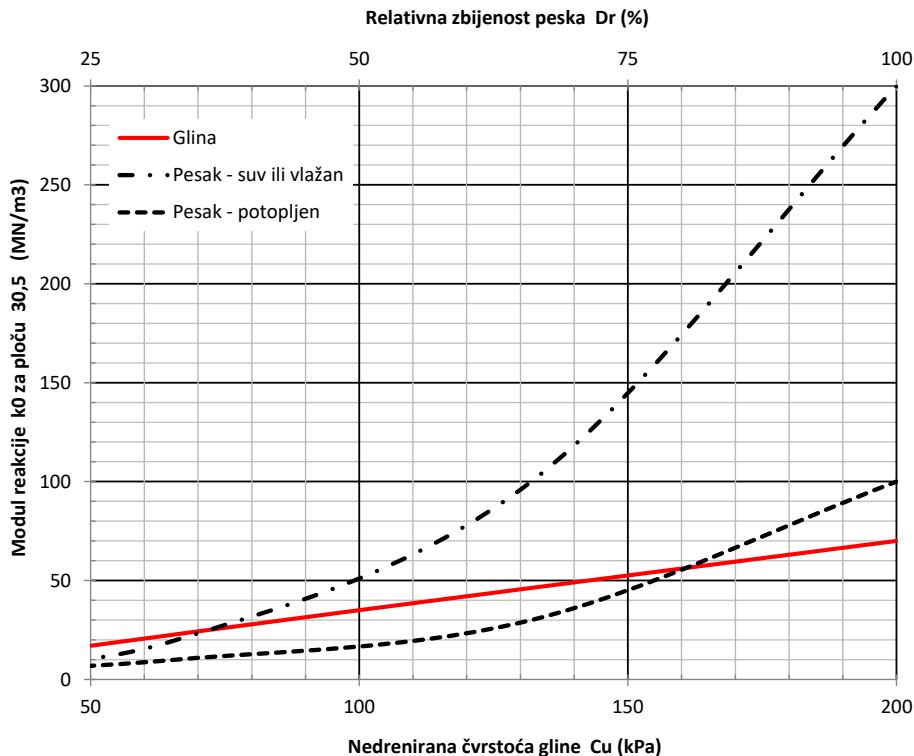


Slika 5.6 Zavisnost modula reakcije od prečnika opitne ploče za homogen sloj

Određivanje modula reakcije kružnom pločom je spor i ne ekonimičan opit, pa se u praksi danas ređe koristi. Kao parametar za dimenzionisanje kolovoza, piste za aerodrome i industrijski pod, modul reakcije se češće određuje korelacijom sa drugim terenskim opitim (CBR opit, opit penetracije, opit sa padajućim tegom i sl.).

## 5.4 Određivanje modula reakcije tla korelacijom

U nedostatku eksperimentalnih podataka za preliminarni proračun, Terzaghi (1955) predlaže orientacione vrednosti modula reakcije  $k_0$  za ploču  $\varnothing 30.5\text{cm}$ . Za gline, modul reakcije se može proceniti na osnovu nedrenirane čvrstoće, dok se za peskove modul reakcije može proceniti na osnovu relativne zbijenosti. Zavisnost se može prikazati tabelarno ili grafički pomoću dijagrama (Slika 5.7).



Slika 5.7

Orientacione veličine modula reakcije tla (Terzaghi, 1955)

Pošto modul reakcije zavisi od oblika i dimenzije opterećene površine, neophodno je pre proračuna, izvršiti korekciju standardne vrednosti koja se odnosi na ploču  $\varnothing 30.5\text{cm}$ . U tom smislu, Terzaghi (1955) je predložio dva nalaitička izraza.

Za temeljni nosač na homogenom sloju gline ili prašine (sitnozrno ili koherentno tlo), predlaže se zavisnost između modula reakcije  $k$  za pravougaoni temelj dužine  $L$  i širine  $B$  u  $\text{m}^1$  i modula reakcije  $k_0$  za kružnu ploču prečnika  $0.305\text{m}$ , u obliku:

$$k = k_0 \frac{0.305}{B} \frac{L + 0.305/2}{1.5L} \approx k_0 \frac{0.3}{B} \frac{L + 0.15}{1.5L} \quad (5.7)$$

Kod mekih (normalno konsolidovanih i senzitivnih) glina ( $c_u < 50\text{kPa}$ ), zbog velike relativa krutosti  $\lambda L$ , proračun se vrši prema pravolinijskoj raspodeli kontaktnog napona.

Ako temelj leži na homogenom sloju peska (krupnozrno ili nekoherenčno tlo), modul reakcije zavisi samo od širine temelja  $B$  i dubine fundiranja  $D_f$  prema izrazu:

$$k = k_0 \xi \left( \frac{B + 0.305}{2B} \right)^2 \approx k_0 \xi \left( \frac{B + 0.3}{2B} \right)^2 , \quad \xi = 1 + 2 \frac{D_f}{B} \leq 2 \quad (5.8)$$

Iz uslova jednakosti momenta savijanja ispod koncentrisane sile koja opterećuje beskonačnu gredu na Vinklerovoj podlozi i beskonačnu gredu na elastičnom poluprostoru, Biot (1937) je izveo sledeći analitički izraz:

$$k = \frac{0.95}{1 - \nu_s^2} \frac{E_s}{B} \left( \frac{1}{1 - \nu_s^2} \frac{E_s B^4}{E_b I} \right)^{0.108} \approx \frac{E_s}{B} \quad (5.9)$$

Slično, Iz uslova jednakosti ugiba ispod koncentrisane sile koja opterećuje beskonačnu gredu na Vinklerovoj podlozi i beskonačnu gredu na elastičnom poluprostoru Vesić (1961) je izveo sledeći analitički izraz:

$$k = \frac{0.65}{1 - \nu_s^2} \frac{E_s}{B} \left( \frac{E_s B^4}{E_b I} \right)^{1/12} \approx \frac{0.65}{1 - \nu_s^2} \cdot \frac{E_s}{B} \quad (5.10)$$

## BROJNI PRIMER - 5.2

Odrediti modul reakcije podloge temeljnog nosača dimenzija  $B/L=1.8/12.0\text{m}$ , krutosti  $E_b/l=250.0\text{MNm}^2$ , koji je fundiran na dubini od  $D_f = 0.8\text{m}$ . Ispod temeljnog nosača se nalazi homogen sloj debljine oko  $8.0\text{m}$ . Prepostaviti da se homogen sloj sastoji od:

- a) zbijenog, potopljenog peska, relativne zbijenosti  $D_r = 70\%$ ,  $\nu_s = 0.3$
- b) zbijenog, vlažnog peska, relativne zbijenosti  $D_r = 70\%$ ,  $\nu_s = 0.3$
- c) prekonsolidovane gline, jednoaksijalne čvrstoće  $q_u = 280.0 \text{ kPa}$ ,  $\nu_u = 0.5$
- d) prekonsolidovane gline, koja ima modul elastičnosti za efektivne napone (drenirani modul) u iznosu od  $E_s = 20.0 \text{ MPa}$  i Poissonov koeficijent  $\nu_s = 0.3$ .

Modul reakcije tla za ploču  $\varnothing 30.5\text{cm}$ , za površinu terena, proceniti na osnovu dijagrama na Slici 5.7. Proračune izvršiti prema odgovarajućim izrazima (5.7)-(5.10).

**Rešenje:**

a) zbijen, potopljen pesak       $D_r = 70\% \rightarrow k_0 \approx 35.0 \text{ MN/m}^3$

$$k = k_0 \left( \frac{B+0.3}{2B} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{D_f}{B} \right) = 35.0 \left( \frac{1.8+0.3}{2 \cdot 1.8} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{0.8}{1.8} \right) = 22.6 \text{ MN/m}^3$$

b) srednje zbijen, vlažan pesak     $D_r = 70\% \rightarrow k_0 \approx 120.0 \text{ MN/m}^3$

$$k = k_0 \left( \frac{B+0.3}{2B} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{D_f}{B} \right) = 120.0 \left( \frac{1.8+0.3}{2 \cdot 1.8} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{0.8}{1.8} \right) = 77.4 \text{ MN/m}^3$$

c) prekonsolidovana gлина       $q_u = 280 \text{ kPa} \rightarrow k_0 \approx 50.0 \text{ MN/m}^3$

$$k = k_0 \frac{0.3}{B} \frac{L+0.15}{1.5L} = 50.0 \frac{0.3}{1.8} \frac{12.0+0.15}{1.5 \cdot 12.0} = 5.8 \text{ MN/m}^3$$

d) prekonsolidovana (OC) gлина       $E_s = 20.0 \text{ MPa}, \nu_s = 0.30$

Biot:    
$$\frac{0.95}{1-0.3^2} \left( \frac{1}{1-0.3^2} \cdot \frac{20.0 \cdot 1.8^4}{250.0} \right)^{0.108} = 1.035 \rightarrow k \approx \frac{E_s}{B} = 11.1 \frac{\text{MN}}{\text{m}^3}$$

Vesić:    
$$\left( \frac{20.0 \cdot 1.8^4}{250.0} \right)^{1/12} = 0.985 \rightarrow k \approx \frac{0.65}{1-0.3^2} \frac{E_s}{B} = 7.9 \frac{\text{MN}}{\text{m}^3}$$

## 5.5 Modul reakcije za proračun ploče na Vinklerovoj podlozi

U poglavlju 1.1 je pokazano, da delovi grede koji su na odstojanju većem od  $|\lambda x| \geq 2.5$ , nemaju bitan uticaj na sleganje i moment savijanja grede. Može se pokazati da isti zaključak važi i za kružnu ploču opterećenu koncentrisanom silom u sredini, stim što se umesto  $|\lambda x| \geq 2.5$ , uvodi  $|\beta r| \geq 2.5$ . Karakterističan broj  $\beta$  se određuje prema izrazu:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{D}} \quad , \quad D = \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} \quad (5.11)$$

gde je:  $D$  - cilindrična krutost temeljne ploče u MNm  
 $h$  - debljina temeljne ploče u m  
 $E_b, \nu_b$  - modul elastičnosti (MPa) i Poissonov koeficijent betona (0.15)

U slučaju kada je ploča vrlo velikih dimenzija, ako bi se koristila širina i dužina ploče, dobila bi se vrlo niska vrednost modula reakcije tla. Zbog toga, ako na ploču deluju koncentrisana opterećenja, u relativno pravilnom rasporedu, za proračun modula reakcije tla, umesto širine i dužine ploče, treba koristiti efektivni radijus  $r_{ef} \approx 2.5/\beta$ . Ovo važi uvek kada je efektivni radijus manji od polovine rastojanja između susednih stubova koji prenose opterećenje na ploču.

Isti princip treba primeniti i za proračun uticaja u krutoj kolovoznoj ploči (cement-beton) debljine  $h$ , koja leži na deformabilnoj podlozi (Vinklerov model), usled sile intenziteta  $P$  na površini radijusa  $a$ . Proračun uticaja se vrši prema Vestergardu. Postoji više varijacija Vestergardovih jednačina, s manjim odstupanjima, stim što se proračun uvek vrši za 3 položaja sile: unutar ploče ( $\sigma_i$ ), na ivici ( $\sigma_e$ ) i na uglu ( $\sigma_c$ ), pri čemu se modul reakcije određuje za efektivni radius. Maksimalni napon zatezanja u ploči je:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 0.316 \frac{P}{h^2} \left[ 4 \log\left(\frac{I}{b\beta}\right) + 1.069 \right] \\ \sigma_e &= 0.572 \frac{P}{h^2} \left[ 4 \log\left(\frac{I}{b\beta}\right) + 0.359 \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\sigma_c = 3 \frac{P}{h^2} \left[ 1 - \left( a\beta\sqrt{2} \right)^{0.6} \right]$$

gde je:  $a < 1.724h \rightarrow b = \sqrt{1.6a^2 + h^2} - 0.675h$   
 $a \geq 1.724h \rightarrow b = a$

Za ploču na prekonsolidovanoj glini, za efektivni radius  $r_{ef}=2.5/\beta$ , modul reakcije je:

$$k = k_0 \frac{0.3}{2r_{ef}} \frac{2r_{ef} + 0.15}{1.5 \cdot 2r_{ef}} = k_0 \frac{0.3}{5/\beta} \frac{5/\beta + 0.15}{1.5 \cdot 5/\beta} \approx \frac{\beta}{25} k_0 \quad (5.13)$$

Za ploču na pesku, za efektivni radius  $r_{ef}=2.5/\beta$ , modul reakcije je:

$$k = k_0 \left( \frac{2r_{ef} + 0.3}{2 \cdot 2r_{ef}} \right)^2 = k_0 \left( \frac{5/\beta + 0.3}{2 \cdot 5/\beta} \right)^2 \approx (0.5 + 0.03\beta)^2 k_0 \quad (5.14)$$

Iz prethodnih jednačina se vidi da je odgovarajući modul reakcije podloge funkcija efektivnog radiusa koji je funkcija karakterističnog broja  $\beta$ , a karakterističan broj je opet funkcija modula reakcije podloge, ili matematički  $k = k_0 f(k)$ . Pošto je jednačina implicitnog oblika, odgovarajući modul reakcije se može odrediti samo iterativno, metodom direktnе zamene (supstitucije). Za iteraciju "m", iterativna jednačina je:

$$\beta_m = \sqrt[4]{k_m/D} \rightarrow k_{m+1} = k_0 \cdot f(\beta_m) \rightarrow \beta_{m+1} = \sqrt[4]{k_{m+1}/D} \quad (5.15)$$

### BROJNI PRIMER - 5.3

Betonska ploča, kvaliteta C25/30, dimenzija  $10 \times 10\text{m}$ , debljine  $15\text{cm}$ ,  $E_b=30.2 \text{ GN/m}^2$ , opterećena je točkom vozila silom od  $25.0\text{kN}$ , na površini prečnika  $a=40\text{cm}$ . Opitim pomoći kružne ploče, dobijen je modul reakcije podloge od  $k_0= 32.5 \text{ MNm}^3$ . Odrediti uticaje u ploči po metodi Vestergarda, pod pretpostavkom da je podloga (posteljica) homogena po dubini i da je izgrađena od sloja prekonsolidovane gline i alternativno od sloja peska.

**Rešenje:**

Cilindrična krutost ploče:  $D = \frac{E_b h^3}{12(I - \nu_b^2)} = \frac{302000 \cdot 0.15^3}{12(I - 0.15^3)} = 8.70 \text{ MNm}$

1a) Modul reakcije ispod ploče na sloju prekonsolidovane gline prema (5.12)

Iteracija-1      $\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{k_0}{D}} = 1.39 \text{ m}^{-1} , \quad k_1 = k_0 \frac{\beta_1}{25} = 1.81 \text{ MN/m}^3$

Iteracija-2      $\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{k_1}{D}} = 0.68 \text{ m}^{-1} , \quad k_2 = k_0 \frac{\beta_2}{25} = 0.88 \text{ MN/m}^3$

Iteracija-3      $\beta_3 = \sqrt[4]{\frac{k_2}{D}} = 0.56 \text{ m}^{-1} , \quad k_3 = k_0 \frac{\beta_3}{25} = 0.73 \text{ MN/m}^3$

$$\text{Iteracija-4} \quad \beta_4 = \sqrt[4]{\frac{k_3}{D}} = 0.54 m^{-1} \quad , \quad k_4 = k_0 \frac{\beta_4}{25} = 0.70 MN/m^3$$

$$\text{Iteracija-5} \quad \beta_5 = \sqrt[4]{\frac{k_4}{D}} = 0.53 m^{-1} \quad , \quad k_5 = k_0 \frac{\beta_5}{25} = 0.69 MN/m^3$$

Efektivni radijus ploče iznosi:  $r_{ef} = 2.5/\beta = 2.5/0.53 \approx 4.7m$

Pošto je efektivni radijus manji od polovine širine ploče  $B/2$ , odnosno  $10.0/2=5.0m$ , za određivanje modula reakcije podloge treba koristiti efektivni radijus. U suprotnom se za određivanje modula reakcije koristi širina ploče  $B$ .

- 1b) Napon zatezanja u betonskoj ploči na sloju OC gline, usled koncentrisane sile, za modul reakcije ploče koji odgovara efektivnom radijusu iznosi:

$$a < 1.724h \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{1.6 \cdot 0.2^2 + 0.15^2} - 0.675 \cdot 0.15 = 0.19m$$

$$\sigma_i = 0.316 \frac{0.025}{0.15^2} \left[ 4 \log \left( \frac{1}{0.19 \cdot 0.53} \right) + 1.069 \right] = 1.8 MPa$$

$$\sigma_e = 0.572 \frac{0.025}{0.15^2} \left[ 4 \log \left( \frac{1}{0.19 \cdot 0.53} \right) + 0.359 \right] = 2.7 MPa$$

$$\sigma_c = 3 \frac{0.025}{0.15^2} \left[ 1 - \left( 0.20 \cdot 0.53 \sqrt{2} \right)^{0.6} \right] = 3.3 MPa$$

- 2a) Modul reakcije ispod ploče na sloju peska prema (5.13)

$$\text{Iteracija-1} \quad \beta_1 = \sqrt[4]{\frac{k_0}{D}} = 1.39 m^{-1} \quad , \quad k_1 = 0.5 + 0.03 \beta_1^2 k_0 = 9.54 MN/m^3$$

$$\text{Iteracija-2} \quad \beta_2 = \sqrt[4]{\frac{k_1}{D}} = 1.02 m^{-1} \quad , \quad k_2 = 0.5 + 0.03 \beta_2^2 k_0 = 9.15 MN/m^3$$

$$\text{Iteracija-3} \quad \beta_3 = \sqrt[4]{\frac{k_2}{D}} = 1.01 m^{-1} \quad , \quad k_3 = 0.5 + 0.03 \beta_3^2 k_0 = 9.14 MN/m^3$$

Relativna greška iteracije:  $\Delta = |k_3 - k_2|/k_2 = |9.14 - 9.15|/9.15 = 0.001$

Efektivni radijus ploče iznosi:  $r_{ef} = 2.5/\beta = 2.5/1.01 \approx 2.5m < 10.0 / 2$

- 2b) Napon zatezanja u betonskoj ploči na sloju peska, usled koncentrisane sile, za modul reakcije ploče koji odgovara efektivnom radijusu iznosi:

$$\sigma_i = 0.316 \frac{0.025}{0.15^2} \left[ 4 \log\left(\frac{1}{0.19 \cdot 1.01}\right) + 1.069 \right] = 1.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = 0.572 \frac{0.025}{0.15^2} \left[ 4 \log\left(\frac{1}{0.19 \cdot 1.01}\right) + 0.359 \right] = 2.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = 3 \frac{0.025}{0.15^2} \left[ 1 - \left(0.20 \cdot 1.01\sqrt{2}\right)^{0.6} \right] = 1.8 \text{ MPa}$$

Napomena: Za nearmirani beton C25/30, računska čvrstoća na zatezanje usled savijanja iznosi oko  $f_{bz} = 4.0 \text{ MPa}$ .

## PRIBLIŽNO REŠENJE GREDE NA DEFORMABILNOJ PODLOZI

### 6.1 Jednačina savijanja grede u diferencnom obliku

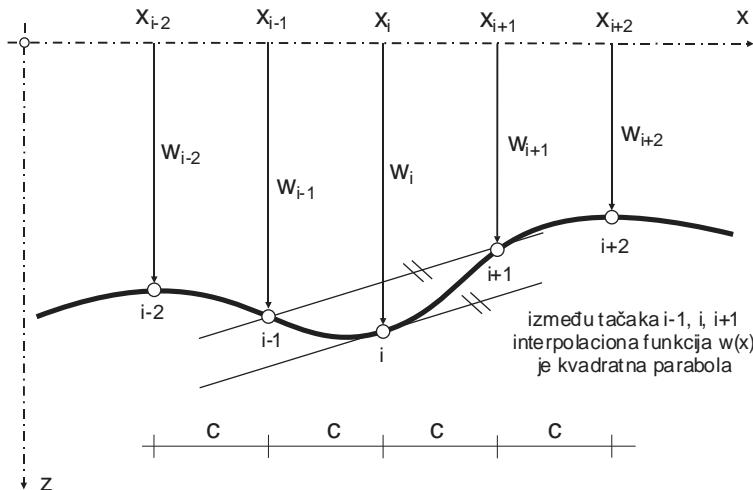
Analitički metode za rešenje temeljnog nosača na deformabilnoj podlozi ograničena su na najjednostavnije primere. Ukoliko je temeljni nosač promenljivog poprečnog preseka i širine i ako su deformacijske karakteristike podloge promenljive, problem se može rešiti samo približnim metodama za rešavanje diferencijalne jednačine.

U inženjerskoj praksi, uglavnom su u primeni dva postupka: Metoda konačnih razlika odnosno diferencna metoda (skraćeno: MKR) i metoda konačnih elemenata (MKE). U okviru ovog predmeta, biće obrađena samo metoda konačnih razlika.

Metoda konačnih razlika predstavlja približan "numerički" postupak rešavanja diferencijalne jednačine u određenoj tački odnosno nizu tačaka. Tačke se u MKR uglavnom biraju na istom međusobnom rastojanju (ekvidistantne tačke), kako bi konačni izrazi bili jednostavniji.

Geometrijski posmatrano, metoda konačnih razlika pretstavlja zamenu svih izvoda funkcije (prvog, drugog, ... , $n$ -tog) u posmatranoj tački, preko pomeranja u susednih simetričnih tačaka. Rešenje diferencijalne jednačine se konačno svodi na rešavanje sistema algebarskih jednačina po nepoznatim pomeranjima.

Tačnost rešenja metodom konačnih razlika, zavisi od gustine mreže, odnosno broja podele nosača. Na slici 6.1 je geometrijski prikazan postupak zamene prvog izvoda funkcije, nagibom sečice kroz susedne tačke. Viši izvodi se dobijaju na sličan način.



Slika 6.1

Interpolaciona funkcija (kvadratna parabola) sleganja u MKR

Ako je broj podele nosača  $n$ , broj uslovnih jednačina i nepoznatih pomeranja  $V_i$  je za jedan veći i iznosi  $n+1$ . Veći broj podela znači po pravilu tačnije rešenje i obimniji proračun.

Prema slici 6.1, polazeći od osobine kvadratne parabole, prvi izvod funkcije  $w(x)$  u tački  $i$  ili nagib tangente u tački  $i$  je paralelan sa sečicom kroz tačke  $i-1$  i  $i+1$ , odnosno matematički:

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)_i \cong \frac{-w_{i-1} + w_{i+1}}{2c} \quad (6.1a)$$

Drugi izvod funkcije u tački  $i$  se može izraziti preko prvog izvoda funkcije  $w'(x)$  u tačkama  $i-0.5$  i  $i+0.5$ , odnosno matematički:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)_i &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \right)_i \cong \frac{-w'_{i-0.5} + w'_{i+0.5}}{c} = \\ &= \frac{I}{c} \left( -\frac{w_i - w_{i-1}}{c} + \frac{w_{i+1} - w_i}{c} \right) = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{c^2} \end{aligned} \quad (6.1b)$$

Treći izvod funkcije u tački  $i$  se može izraziti preko prvog izvoda funkcije  $w''(x)$  u tačkama  $i-1$ ,  $i+1$ , odnosno matematički:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^3w}{dx^3} \right)_i &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)_i \cong \frac{-w''_{i-1} + w''_{i+1}}{2c} = \\ &= \frac{I}{2c} \left( -\frac{w_i - 2w_{i-1} - w_{i-2}}{c^2} + \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} - w_i}{c^2} \right) = \frac{-w_{i-2} + 2w_{i-1} - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{2c^3} \end{aligned} \quad (6.1c)$$

Četvrti izvod funkcije u tački  $i$  se može izraziti preko drugog izvoda funkcije  $w''(x)$  u tačkama  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ , odnosno matematički:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4w}{dx^4} \right)_i &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)_i \cong \frac{w''_{i-1} - 2w''_i + w''_{i+1}}{c^2} = \\ &= \frac{I}{c^2} \left( \frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} - w_{i-2}}{c^2} - 2 \frac{w_{i+1} - 2w_i - w_{i-1}}{c^2} + \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i}{c^2} \right) = \\ &= \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{c^4} \end{aligned} \quad (6.1d)$$

Ako se u diferencijalnoj jednačini savijanja nosača na deformabilnoj podlozi (3.1) za tč. "i" izvrši zamena konačnim razlikama prema (6.1), dobija se diferencna jednačina:

$$E_b I \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{c^4} = p_i - B \cdot q_i \quad (6.2)$$

Na sličan način, presečne sile nosač (3.5) u tački i, izražene konačnim razlikama glase:

$$M_i = -E_b I \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i \Rightarrow M_i = -E_b I \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{c^2} \quad (6.3a)$$

$$T_i = -E_b I \left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_i \Rightarrow T_i = -E_b I \frac{-w_{i-2} + 2w_{i-1} - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{2c^3} \quad (6.3b)$$

Podelom nosača na n jednakih delova dobija se n+1 jednačina oblika (6.2) po nepoznatim sleganjima  $V_i$  i ordinata reaktivnih opterećenja  $q_i$ . Dodatnih n+1 jednačina za eliminaciju nepoznatih  $q_i$  dobija se izborom tipa deformabilne podloge.

U uslovnim jednačinama za tačke 0, 1, n-1, n pojavljuju se "fiktivna" sleganja izvan nosača  $V_{i-2}$ ,  $V_{i-1}$ ,  $w_{n+1}$ ,  $w_{n+2}$  koje treba odrediti iz graničnih uslova na kraju grede.

Ako su krajevi grede slobodni, granični uslovi su homogeni po silama ( $M_0=0$ ,  $T_0=0$  i  $M_n=0$ ,  $T_n=0$ ), odnosno:

Granični uslovi na levom kraju nosača daju sledeće fiktivne ugibe  $w_{-1}$  i  $w_{-2}$ :

$$M_0 = 0 \Rightarrow -E_b I \frac{w_{-1} - 2w_0 + w_1}{c^2} = 0 \Rightarrow w_{-1} = 2w_0 - w_1 \quad (6.4a)$$

$$T_0 = 0 \Rightarrow -E_b I \frac{w_{-2} + 2w_{-1} - 2w_1 + w_2}{2c^3} = 0 \Rightarrow w_{-2} = 2w_{-1} - 2w_1 + w_2$$

$$w_{-2} = 4w_0 - 4w_1 + w_2 \quad (6.4b)$$

Granični uslovi na desnom kraju nosača daju sledeće fiktivne ugibe  $w_{n+1}$  i  $w_{n+2}$ :

$$M_n = 0 \Rightarrow -E_b I \frac{w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}}{c^2} = 0 \Rightarrow w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} \quad (6.4c)$$

$$T_n = 0 \Rightarrow -E_b I \frac{-w_{n-2} + 2w_{n-1} - 2w_{n+1} + w_{n+2}}{2c^3} = 0 \Rightarrow w_{n+2} = w_{n-2} - 2w_{n-1} + 2w_{n+1}$$

$$w_{n+2} = 4w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2} \quad (6.4d)$$

Ako se diferencna jednačina (6.2) ispiše za sve tačke od 0 do n, vodeći računa o izrazima za fiktivne ugibe (6.4), dobija se sistem diferencnih jednačina, koji u matričnom obliku glasi:

$$\frac{E_b I}{c^4} [D] \{w\} = \{p\} - B \{q\} \quad (6.5)$$

U jednačini (6.5), sa  $\{w\}$  je označen vektor pomeranja, sa  $\{p\}$  vektor aktivnog opterećenja, sa  $\{q\}$  vektor totalnog kontaktnog napona, a sa  $[D]$  matrica diferencnog operatora, čiji su koeficijenti za podelu nosača na  $n=10$  jednakih delova, pregledno prikazani u razvijenoj formi:

$$[D] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Slična matrica diferencnog operatora se može napisati za slobodno oslonjene ili uklještene krajeve nosača.

Matrica diferencnog operatora je trakasta (bendirana), sa maksimalnom širinom trake od 5 elemenata. Članovi izvan trake su jednaki nuli i nisu prikazani.

U matričnoj jednačini (6.5) postoje dve nepoznate, ugib  $\{w\}$  i reaktivno opterećenje ili kontaktni napon  $\{q\}$ . Za rešenje jednačine je potrebno uvesti dodatne uslove izborom modela deformabilne podloge koja definiše vezu između ugiba i reaktivnog opterećenja.

Pre nego što se pristupi rešavanju jednačine koja se odnosi samo na čvorne tačke nosača, potrebno je zadato opterećenje  $\{p\}$  na nosaču, transformisati u statički ekvivalentno opterećenje koje deluje samo u čvornim tačkama nosača.

Transformacija zadatog opterećenja u statički ekvivalentno čvorno opterećenje, vrši se na način kako je to prikazano u sledećem poglavlju.

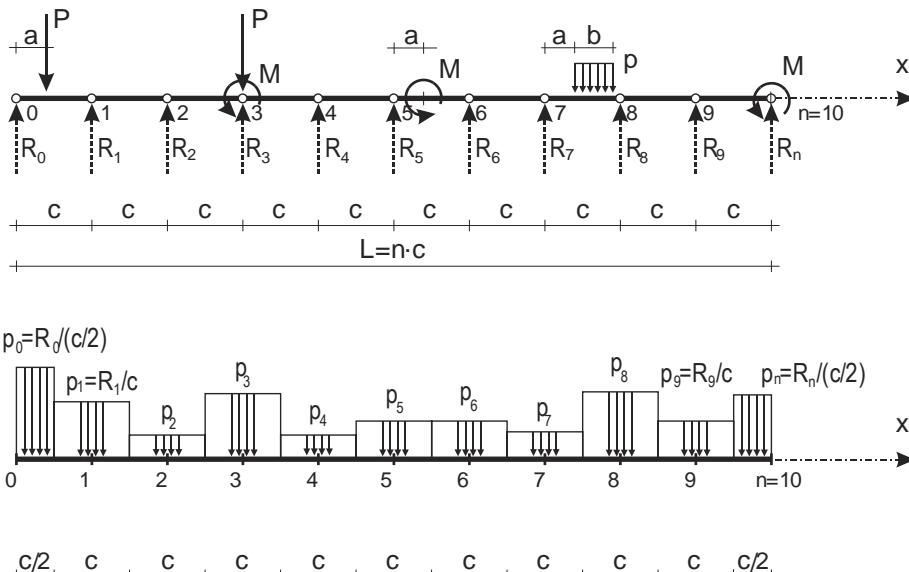
## 6.2 Određivanje statički ekvivalentnog čvornog opterećenja

Pošto se prema MKR rešenje određuje za čvorne tačke  $i=0,1,\dots,n$  diskretizovanog nosača, potrebno je i zadato opterećenje na nosaču zameniti koncentrisanim silama u čvornim tačkama nosača. U statici konstrukcija, ove sile se nazivaju elastičnim težinama ili ekvivalentnim čvornim silama.

Ekvivalentne čvorne sile-opterećenje, koje deluju u čvornim tačkama nosača, treba u čvornim tačkama nosača da proizvede iste uticaje (moment savijanja i transverzalne sile) kao i zadato opterećenje. Prethodni uslov se može zadovoljiti za koncentrisane sile i kontinualno opterećenje ali ne i za spregove sile na nosaču. Međutim, treba imati u vidu, da se sa povećanjem broja podela nosača (finija podela) greška usled diskretizacije zadatog opterećenja smanjuje.

Između čvornih tačaka nosača, uticaji od zadatog opterećenja i ekvivalentnih čvornih sila se razlikuju ali u datom slučaju to nije bitno, pošto se uticaji-rešenje traži samo za čvorne tačke (za diskretni sistem). Vrednosti između čvornih tačaka se interpoluju.

Umesto stvarnog nosača, za proračun ekvivalentnog čvornog opterećenja se koristi fiktivni nosač, koji u čvornim tačkama ima vertikalni oslonac i zglob, odnosno sistem zglobno vezanih prostih greda. Za tako usvojen fiktivan nosač, treba odrediti reakcije oslonaca  $\{R\}$  od zadatog opterećenja. Postupak za određivanje statički ekvivalentnog čvornog opterećenja, za proizvoljno opterećen nosač, prikazan je na slici 6.2.



Slika 6.2

Određivanje statički ekvivalentnog čvornog (nodalnog) opterećenja  $\{p\}$

Posebnu pažnju treba obratiti na uticaje od momenta savijanja. Kada moment čiji je intenzitet  $M$ , deluje između dve čvorne tačke, mora se razložiti na dve paralelne sile intenziteta  $M/c$ , koje deluju u susednim čvornim tačkama na rastojanju  $c$ .

Međutim, kada moment intenziteta  $M$ , deluje u čvornoj tački, mora se razložiti na dve paralelne sile intenziteta  $M/2c$ , koje deluju u čvornoj tački ispred i nakon čvorne tačke u kojoj deluje moment savijanja. Od ovog pravila se izuzimaju momenti koji deluju na levom odnosno desnom kraju nosača. U tom slučaju, moment se razlaže na dve paralelne sile na rastojanju  $c$ . Treba imati u vidu, da u slučaju sprega sila nije moguće postići ekvivalentne statičke uticaje u čvornim tačkama.

Ekvivalentno jednako podeljeno čvorno opterećenje  $\{p\}$  se dobija deljenjem reakcije fiktivnih oslonca  $R_i$  odgovarajućom dužinom elementa, koji je za unutrašnje ( $0 < i < n$ ) tačke  $c$ , a za ivične ( $i=0, i=n$ ) tačke  $c/2$ . Pošto krajnje tačke nemaju susedni čvor izvan nosača, pripada im samo polovina unutrašnjeg elementa.

Elementi vektora fiktivnih reakcija oslonaca  $\{R\}$ , odnosno ekvivalentnog čvornog (nodalnog) jednako podeljenog opterećenja  $\{p\}$ , za opterećenje na slici 6.2 glase:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} P(c-a)/c \\ Pa/c \\ M/2c \\ P \\ -M/2c \\ M/c \\ -M/c \\ pb[c-(a+b/2)]/c \\ pb(a+b/2)/c \\ M/c \\ -M/c \end{Bmatrix} (kN), \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} R_0/(c/2) \\ R_1/c \\ R_2/c \\ R_3/c \\ R_4/c \\ R_5/c \\ R_6/c \\ R_7/c \\ R_8/c \\ R_9/c \\ R_{10}/(c/2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P(c-a)/c^2 \\ Pa/c^2 \\ M/2c^2 \\ P/c^2 \\ -M/2c^2 \\ M/c^2 \\ -M/c^2 \\ pb[c-(a+b/2)]/c^2 \\ pb(a+b/2)/c^2 \\ M/c^2 \\ -2M/c^2 \end{Bmatrix} \left( \frac{kN}{m} \right) \quad (6.7)$$

### 6.3 Približan proračun grede na Vinkler-ovoj podlozi

Jednačina (3.2), koja povezuje kontaktni napon i sleganja podloge, može se napisati u sledećem matričnom obliku:

$$\{q\} = [k]\{w\} \quad (6.8)$$

U gornjoj jednačini, sa  $[k]$  je označena dijagonalna matrica modula reakcije tla duž nosača (vandijagonalni članovi su nula). Smenom jednačine (6.8) u (6.5), dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim čvornim pomeranjima:

$$\frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} = \{p\} - B\{q\} \Rightarrow \frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} = \{p\} - B[k]\{w\}$$

$$\frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} + B[k]\{w\} = \{p\} / \cdot c \Rightarrow \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{Bc^4}{E_b I} [k] \right) \{w\} = c\{p\}$$

$$[K_t] = \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{Bc^4}{E_b I} [k] \right), \quad \{P\} = c\{p\}$$

$$[K_t]\{w\} = \{P\} \Rightarrow \{w\} = [K_t]^{-1}\{P\} = [F_t]\{P\} \quad (6.9)$$

Umesto vektora ekvivalentnog jednolikog čvornog opterećenja  $\{p\}$ , u uobičajeno je da se za proračun sleganja koristi vektor ekvivalentnih čvornih sila  $\{P\} = c\{p\}$

Jednačina (6.9) pretstavlja matričnu formulaciju metode konačnih razlika (MKR) primjenjenu na problem grede (temeljnog nosača) na Vinkler-ovoj podlozi. U gornjoj jednačini,  $[K_t]$  pretstavlja matricu krutosti temeljnog nosača i podloge, koja u sebi objedinjuje: geometriju nosača (dužinu  $L$ , širinu  $B$ , i moment inercije  $I$ ), modul elastičnosti nosača  $E_b$  i modul reakcije podloge  $k$ .

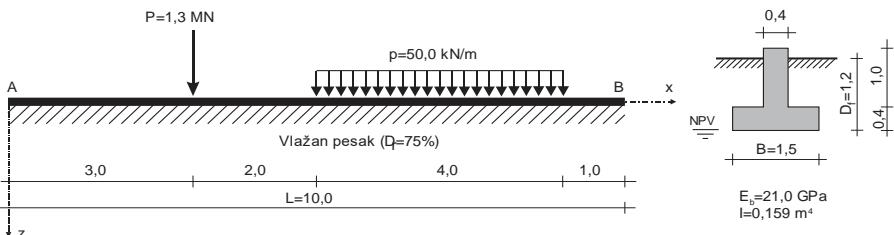
Članovi matrice krutosti imaju dimenziju  $kN/m$ , čvorna pomeranja  $\{w\}$  dimenziju  $m$ , čvorna opterećenja  $\{p\}$  dimenziju  $kN/m$ , a čvorne sile  $\{P\}$  dimenziju  $kN$ .

U matrici krutosti  $[K_t]$  osim modula reakcije tla, promenljiva može biti i širina nosača i i moment inercije nosača. U tom slučaju, konstantne veličine  $B$  i  $I$ , u izrazu za matricu krutosti treba staviti dijagonalnu matricu širine  $[B]$  i momenta inercije nosača  $[I]$ .

$$[K_t] = \frac{E_b}{c^3} [I][D] + c[B][k]$$

### BROJNI PRIMER - 6.1

Armirano betonski temeljni nosač (slika 6.3), fundiran je na dubini od  $D_f = 1.5\text{m}$ , u sloju potopljenog peska relativne zbijenosti  $D_r \approx 75\%$ . Odrediti sleganje  $w$ , nagib  $\theta$ , transverzalnu silu  $T$ , moment savijanja  $M$ , i totalni kontaktni napon  $q$ , u čvornim tačkama nosača na  $\frac{1}{10}$  dužine ( $n=10$ ). Pesak aproksimirati Vinkler-ovim modelom. Proračun izvršiti numerički, MKR.



Slika 6.3 Temeljni nosač na sloju peska

**Rešenje:**

Ekvivalentni modul reakcije podloge/peska k i parametar krutosti  $\lambda$  :

$$\xi = \left( I + 2 \frac{D_f}{B} \right) = \left( I + 2 \frac{1.2}{1.5} \right) = 2.6 > 2 \rightarrow \xi = 2$$

$$D_r = 75\% \xrightarrow{\text{Slika 5.7}} k_0 = 41.4 \text{ MN/m}^2$$

$$k = \xi k_0 \left( \frac{B + 0.305}{2B} \right)^2 = 2 \cdot 41.4 \left( \frac{1.5 + 0.305}{2 \cdot 1.5} \right)^2 = 30.0 \text{ MN/m}^2$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kB}{4E_bI}} = \sqrt[4]{\frac{30.0 \cdot 1.5}{4 \cdot 21000 \cdot 0.159}} = 0,2409 \text{ m}^{-1} , \quad \lambda L = 0,2409 \cdot 10,0 \equiv 2,41$$

Elementi matrice krutosti nosača i tla iznose:

$$E_b I = 21.0 \cdot 10^6 \cdot 0.159 = 3.339 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2 , \quad c = \frac{L}{n} = \frac{10.0}{10} = 1.0 \text{ m}$$

$$K_{t,ii} = \frac{E_b I}{c^3} \left( D_{ii} + \frac{Bc^4}{E_b I} k \right) \dots (kN/m)$$

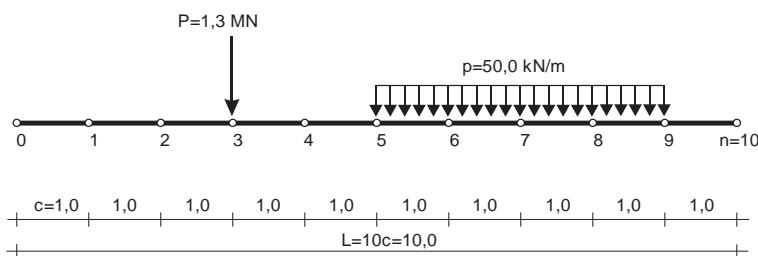
$$K_{t,ii} = \frac{3.339 \cdot 10^6}{1.0^3} \left( D_{ii} + \frac{1.5 \cdot 1.0^4}{3.339 \cdot 10^6} 30.0 \cdot 10^3 \right) = 3.339 \cdot 10^6 \left( D_{ii} + 1.35 \cdot 10^{-2} \right)$$

$$K_{t,ij} = 3.339 \cdot 10^6 D_{ij} \quad i \neq j$$

Greda je srednje dužine (Vesić, 1961). Na osnovu prethodnih izraza, ispis elemenata matrice krutosti, za podelu temeljnog nosača na n=10 jednakih delova, glasi:

$$[K_t] = 3.339 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 2.0135 & -4 & 2 & & & & & & & \\ -2 & 5.0135 & -4 & 1 & & & & & & \\ 1 & -4 & 6.0135 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6.0135 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6.0135 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6.0135 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6.0135 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6.0135 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 5.0135 & -2 & & & & & & \\ 2 & -4 & 2.0135 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Vektori čvornog opterećenja  $\{p\}$  odnosno  $\{P\}$ , određeni su na osnovu donje slike :



$$P_0 = cp_0 = P_1 = cp_1 = 0$$

$$P_2 = cp_2 = 1.0 \cdot 1300.0 (1.0 - 1.0) / 1.0^2 = 0$$

$$P_3 = cp_3 = 1.0 \cdot 1300.0 \cdot 1.0 / 1.0^2 = 1300.0 \text{ kN}$$

$$P_4 = cp_4 = 0$$

$$P_5 = cp_5 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 [1.0 - (0 + 1.0/2)] / 1.0^2 = 25.0 \text{ kN}$$

$$P_6 = cp_6 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 (0 + 1.0/2) / 1.0^2 + 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 [1.0 - (0 + 1.0/2)] / 1.0^2 = 50.0 \text{ kN}$$

$$P_7 = cp_7 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 (0 + 1.0/2) / 1.0^2 + 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 [1.0 - (0 + 1.0/2)] / 1.0^2 = 50.0 \text{ kN}$$

$$P_8 = cp_8 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 (0 + 1.0/2) / 1.0^2 + 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 [1.0 - (0 + 1.0/2)] / 1.0^2 = 50.0 \text{ kN}$$

$$P_9 = cp_9 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 [1.0 - (0 + 1.0/2)] / 1.0^2 = 25.0 \text{ kN}$$

$$P_{10} = cp_{10} = 0$$

Rešenje jednačine (6.9) daje sleganje  $\{w\}$  a jednačine (6.1 i 6.8) nagib  $\{\theta\}$  i napon  $\{q\}$ .

$$\{w\} = \begin{cases} 5.19 \\ 5.17 \\ 5.12 \\ 4.93 \\ 4.42 \\ 3.75 \\ 3.01 \\ 2.24 \\ 1.46 \\ 0.69 \\ -0.09 \end{cases} mm, \quad \{q\} = \begin{cases} 155.62 \\ 155.11 \\ 153.51 \\ 147.79 \\ 132.64 \\ 112.58 \\ 90.29 \\ 67.17 \\ 43.87 \\ 20.56 \\ -2.74 \end{cases} \frac{kN}{m^2}, \quad \{\theta\} = \begin{cases} -0.02 \\ 0.03 \\ -0.12 \\ -0.35 \\ -0.59 \\ -0.71 \\ -0.76 \\ -0.77 \\ -0.78 \\ -0.78 \\ -0.78 \end{cases} 10^{-3} rad$$

Kontrola tačnosti rezultata, može se izvršiti na osnovu jednačina ravnoteže  $\Sigma Z=0$  i  $\Sigma M=0$  :

$$\int_0^L [p(x) - Bq(x)] dx = \sum_0^n P_i - Bc \left[ \frac{q_0}{2} + \sum_1^{n-1} q_i + \frac{q_n}{2} \right] = 0$$

$$\int_0^L [p(x) - B \cdot q(x)] dx = \sum_0^n P_i c \cdot i - Bc^2 \left[ \frac{q_0}{8} + \sum_1^{n-1} q_i \cdot i + \frac{q_n}{8} (4n-1) \right] = 0$$

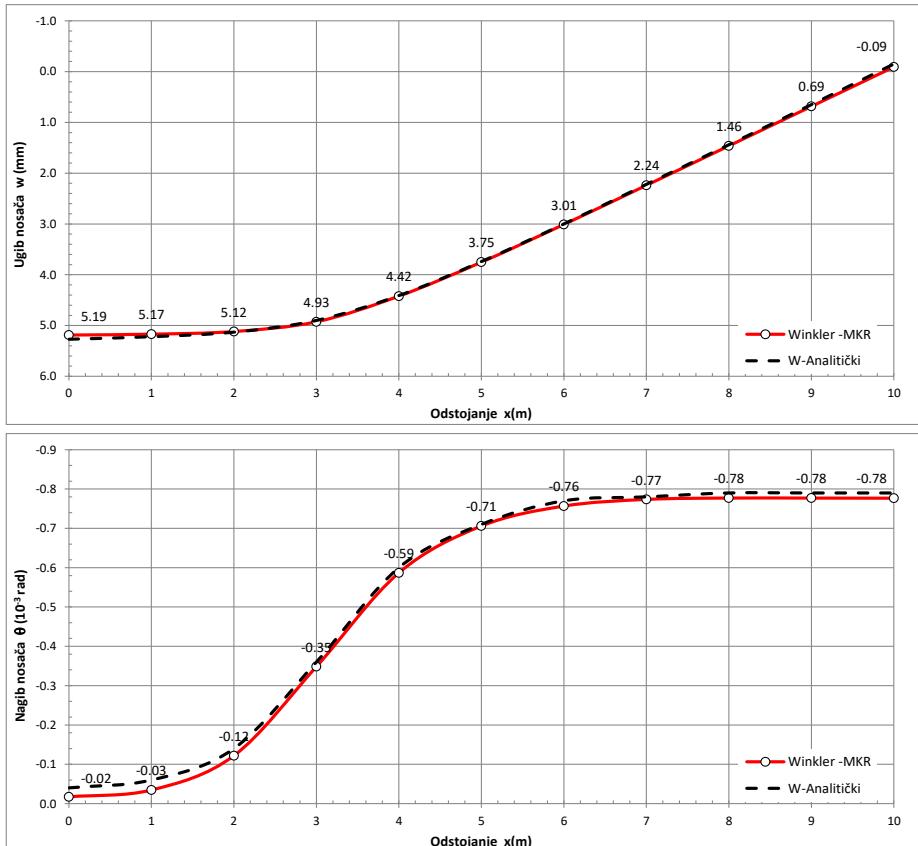
Grafički prikaz rezultata proračuna prema MKR, dat je na slici 6.4, i može se uporediti sa rezultatima analitičke metode (slika 5.4). Greška približne metode proračuna po MKR, za podelu nosača na  $n=10$  jednakih delova je zanemarljiva.

Presečne sile se mogu odrediti preko ugiba nosača (6.3) ili što je tačnije, direktno na osnovu zadatog opterećenja i reaktivnog opterećenja  $\{q\}$ .

Može se zapaziti, da se značajno odstupanje se javlja u dijagramu transverzalnih sila (slika 6.4b), na mestu dejstva koncentrisane sile, gde je na osnovu ugiba dobijen zbir transverzalne sile levo i desno od napadne tačke sile. Ova greška se može izbeći proračunom presečnih sila direktno na osnovu zadatog i reaktivnog opterećenja.

Dijagram transverzalnih sila nije definisan (nema vrednost) u tački u kojoj deluje koncentrisana sila, već samo u preseku beskonačno blisko levo i desno od napadne tačke sile. Sličan problem postoji i kod dijagrama momenta savijanja, u tački u kojoj deluje spreg sila.

Na dijagramima na slici 6.4a-b, punom linijom su prikazani rezultati dobijeni MKR, a isprekidanom linijom su prikazane tačne vrednosti dobijene analitičkom metodom.



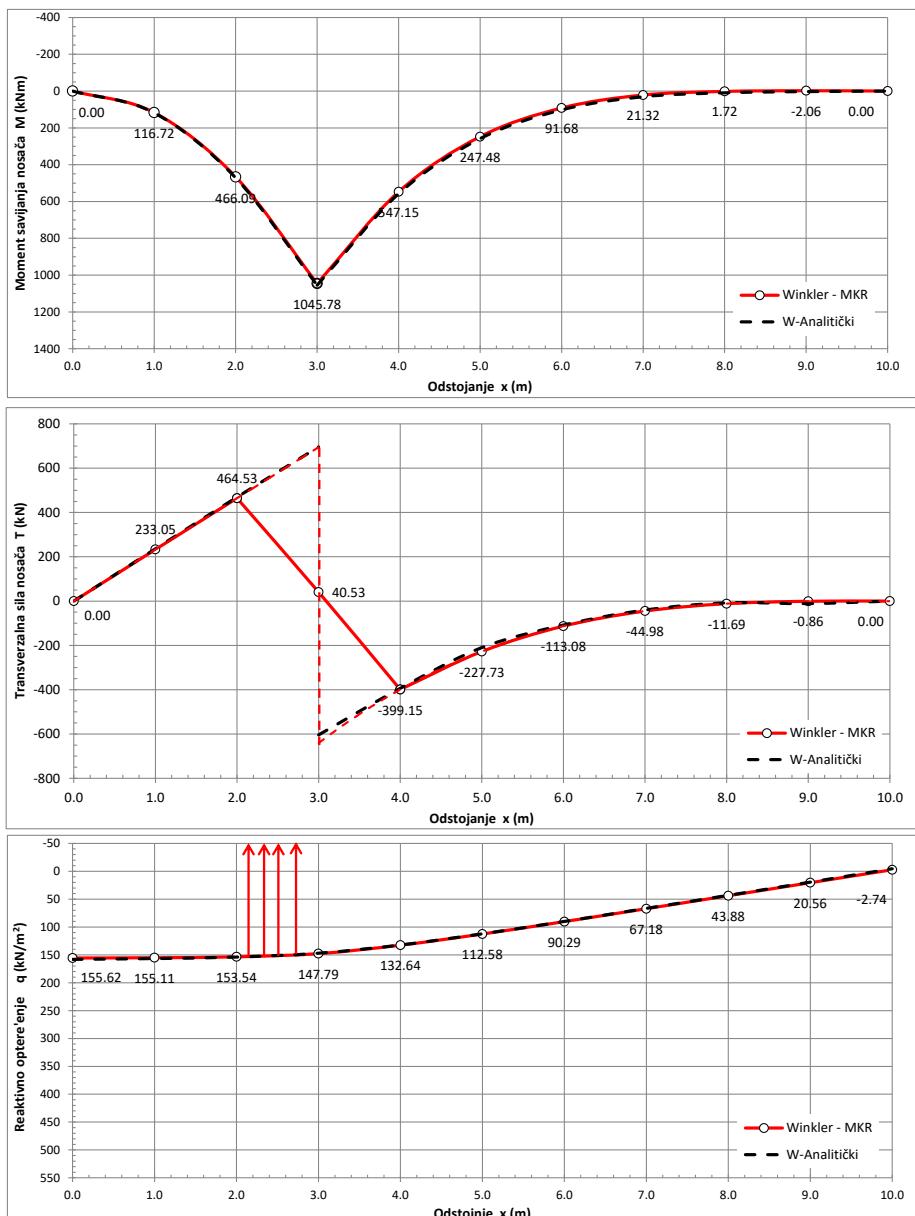
Slika 6.4a Uporedni rezultati proračuna ugiba i nagiba elastične linije nosača (MKR i Analitički)

Može se zaključiti da je za podelu nosača na n=10 delova, greška numeričke metode zanemarljivo mala. Konkretno, greška je najmanja kod proračuna ugiba nosača i raste pri višim izvodima funkcije, što znači da su najveća odstupanja na dijagramu transverzalnih sile. Tačnost proračuna se može poboljšati usvajanjem finije podele nosača odnosno povećanjem broja čvornih tačaka.

Numerička vrednost transverzalne sile ispod koncentrisane sile je jednaka srednjoj vrednosti između transverzalne sile blisko levo i desno od sile. Pošto je apsolutni zbir transverzalne sile levo i desno jednak intenzitetu sile, transverzalne sile levo i desno od napadne tačke sile P se može odrediti prema sledećem izrazu:

$$T_{3l} + T_{3d} = T_3 = 40.53, \quad T_{3l} - T_{3d} = P = 13000 \Rightarrow T_{3l} = 670.26 \text{ kN}, \quad T_{3d} = -629.74 \text{ kN}$$

Na dijagramu transverzalnih sila na slici 6.4b, puna linija prikazuje rezultat linearne interpolacije između čvornih tačaka. Isprekidana linija prikazuje dijagram kakav on stvarno mora biti. Sa povećanjem broja podele nosača, odnosno broja čvornih tačaka, greška interpolacije se smanjuje.



Slika 6.4b Uporedni rezultati proračuna presečnih sila i kontaktnog napona (MKR i Analitički)

## 6.4 Približan proračun grede na Pasternak-ovoj podlozi

Jednačina (3.7), koja povezuje kontaktni napon i sleganja podloge, može se napisati u sledećem matričnom obliku:

$$\{q\} = [k]\{w\} - [G]\{w\} \quad (6.10)$$

Drugi izvod vektora pomeranja  $\{w\}''$ , može se izraziti metodom konačnih razlika:

$$\{w\}'' = \frac{I}{c^2} [D^*] \{w\} \quad (6.11)$$

U gornjoj jednačini, sa  $[D^*]$  je označena matrica diferencnog operatora za drugi izvod funkcije pomeranja. Koeficijenti matrice, za gredu sa slobodnim krajevima, glase:

$$[D^*] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Smenom jednačine (6.10) i (6.11) u jednačinu (6.5), dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim čvornim pomeranjima:

$$\begin{aligned} \frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} &= \{p\} - B \left( [k] - \frac{I}{c^2} [G][D^*] \right) \{w\} \\ \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{Bc^4}{E_b I} \left( [k] - \frac{I}{c^2} [G][D^*] \right) \right) \{w\} &= c\{p\} \\ [K_t]\{w\} &= \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{Bc^4}{E_b I} \left( [k] - \frac{I}{c^2} [G][D^*] \right) \right) , \quad \{P\} = c\{p\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Smenom matrice krutosti temeljnog nosača i podloge i vektora čvornih sila u gornje jednačine, dobija se sledeća jednačina za proračun grede na Pasternak-ovoj podlozi:

$$[K_t]\{w\} = \{P\} \quad (6.14)$$

## **BROJNI PRIMER - 6.2**

Odrediti sleganje  $w$ , kontaktni napon  $q$  i moment savijanja  $M$ , u čvornim tačkama temeljnog nosača (slika 6.3) iz primera 6.1, na 1/10 dužine. Podlogu aproksimirati Pasternakovim modelom ( $k=30.0 \text{ MN/m}^3$ ,  $G=250.0 \text{ MPa}$ ) i ( $k=30.0 \text{ MN/m}^3$ ,  $G=500.0 \text{ MPa}$ ). Proračun izvršiti numerički MKR. Uporediti dobijene rezultate za Pasternakovu podlogu, sa rezultatima za Vinklerovu podlogu sa  $k=30.0 \text{ MN/m}^3$ .

### Rešenje:

Krutost na savijanje, koeficijent uz imaginarni član korena karakterističnog polinoma diferencijalne jednačine i parametri krutosti Pasternakove podloge ( $G=250.0 \text{ MPa}$ ) su:

$$E_b I = 3339.0 \text{ MNm}^2 \quad \frac{GB}{2\sqrt{kBE_b I}} = \frac{250.0 \cdot 1.5}{2\sqrt{30.0 \cdot 1.5 \cdot 3339.0}} = 0.484 < 1$$

$$\lambda = 0.241 \text{ m}^{-1}, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{G}{4E_b I}} = 0.277 \text{ m}^{-1}, \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{G}{4E_b I}} = 0.198 \text{ m}^{-1}$$

Elementi matrice krutosti nosača i tla iznose:

$$i=j \quad K_{t,ii} = \frac{E_b I}{c^3} \left( D_{ii} + \frac{Bc^4}{E_b I} \left( k - \frac{G}{c^2} D_{ii}^* \right) \right) \dots (kN/m)$$

$$i \neq j \quad K_{t,ij} = \frac{E_b I}{c^3} \left( D_{ij} - \frac{Bc^2}{E_b I} G \cdot D_{ij}^* \right) \dots (kN/m)$$

Na osnovu prethodnih izraza, ispis elemenata matrice krutosti, za podelu temeljnog nosača na  $n=10$  jednakih delova, glasi:

$$\left[ K_t \right] = 3.34 \cdot 10^6$$

$$\begin{bmatrix} 2.01 & -4 & 2 \\ -2.11 & 5.24 & -4.11 & 1 \\ 1 & -4.11 & 6.24 & -4.11 & 1 \\ 1 & -4.11 & 6.24 & -4.11 & 1 \\ 1 & -4.11 & 6.24 & -4.11 & 1 \\ 1 & -4.11 & 6.24 & -4.11 & 1 \\ 1 & -4.11 & 6.24 & -4.11 & 1 \\ 1 & -4.11 & 5.24 & -2.11 & 1 \\ 2 & -4 & 2.01 \end{bmatrix}$$

Vektori čvornog opterećenja  $\{P\}$ , identični su vrednostima iz primera 6.1. Rešenje matrične jednačine (6.14) daje sleganje  $\{w\}$  a jednačina (6.10) kontaktni napon  $\{q\}$ .

$$\{P\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1300.0 \\ 0 \\ 25.0 \\ 50.0 \\ 50.0 \\ 50.0 \\ 25.0 \\ 0 \end{pmatrix} kN, \{w\} = \begin{pmatrix} 4.25 \\ 4.26 \\ 4.25 \\ 4.11 \\ 3.69 \\ 3.15 \\ 2.54 \\ 1.91 \\ 1.28 \\ 0.65 \\ 0.01 \end{pmatrix} mm, \{q\} = \begin{pmatrix} 127.63 \\ 135.10 \\ 156.88 \\ 192.74 \\ 144.58 \\ 108.60 \\ 81.24 \\ 58.66 \\ 38.76 \\ 19.42 \\ 0.40 \end{pmatrix} kPa, \{M\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 95.72 \\ 394.10 \\ 927.79 \\ 450.60 \\ 190.28 \\ 67.86 \\ 17.30 \\ 4.73 \\ 0.30 \\ 0 \end{pmatrix} kNm$$

Krutost na savijanje, koeficijent uz imaginarni član korena karakterističnog polinoma diferencijalne jednačine i parametri krutosti Pasternakove podloge ( $G=500.0 \text{ MPa}$ ) su:

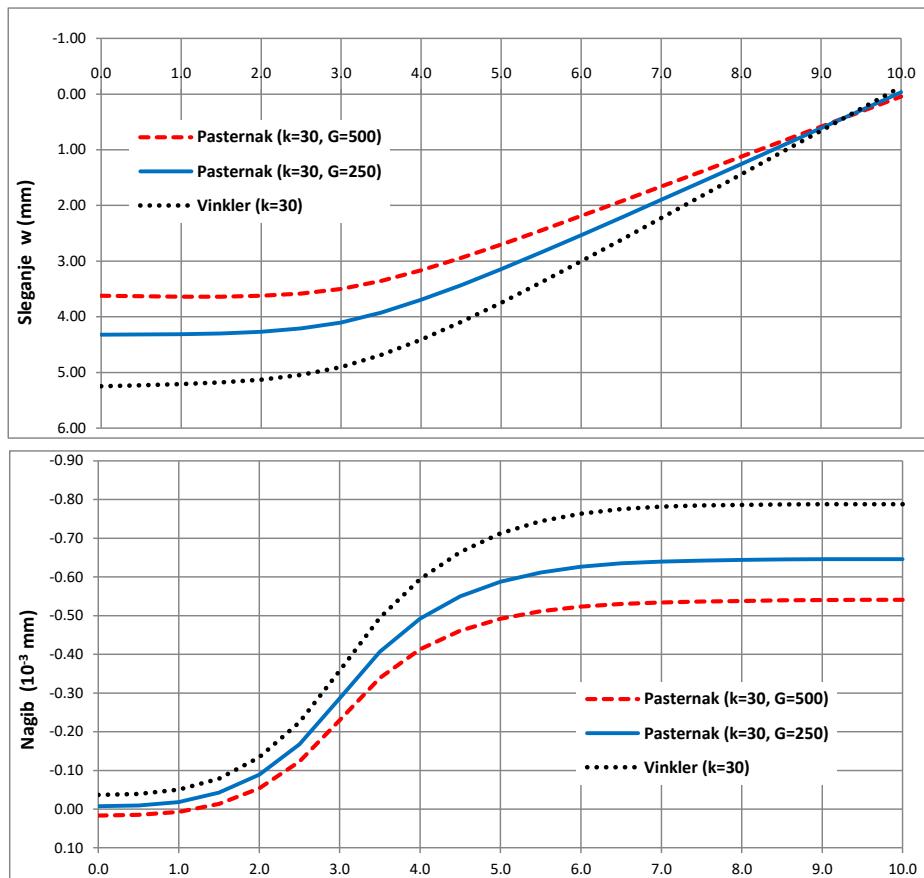
$$E_b I = 3339.0 \text{ MNm}^2 \quad \frac{GB}{2\sqrt{kBE_b I}} = \frac{500.0 \cdot 1.5}{2\sqrt{30.0 \cdot 1.5 \cdot 3390.0}} = 0.967 < 1$$

$$\lambda = 0.241 \text{ m}^{-1}, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{G}{4E_b I}} = 0.309 \text{ m}^{-1}, \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{G}{4E_b I}} = 0.144 \text{ m}^{-1}$$

Rezultati proračuna su sledeći:

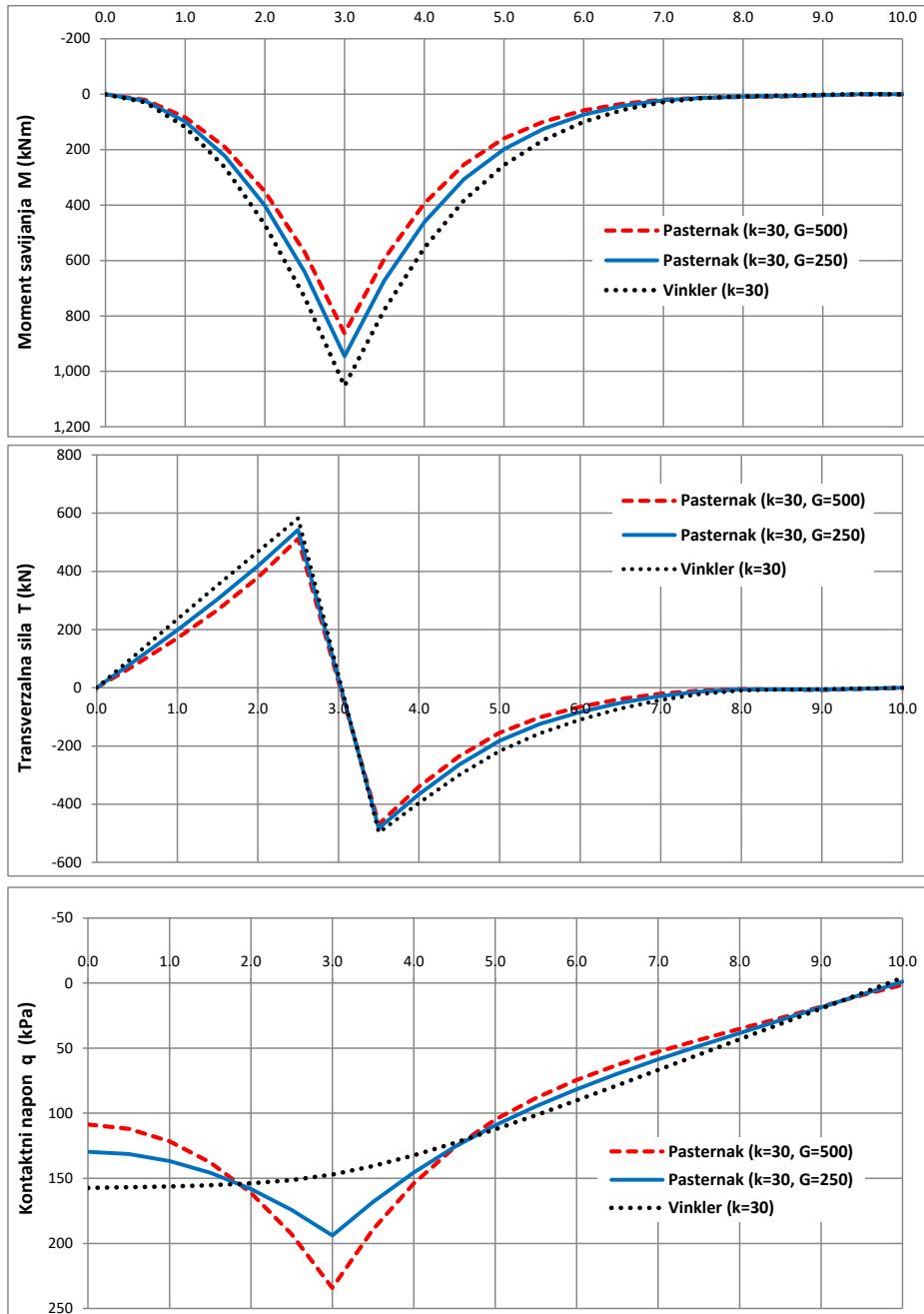
$$\{P\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1300.0 \\ 0 \\ 25.0 \\ 50.0 \\ 50.0 \\ 50.0 \\ 25.0 \\ 0 \end{pmatrix} kN, \{w\} = \begin{pmatrix} 3.47 \\ 3.59 \\ 3.60 \\ 3.50 \\ 3.16 \\ 2.70 \\ 2.19 \\ 1.67 \\ 1.15 \\ 0.62 \\ 0.09 \end{pmatrix} mm, \{q\} = \begin{pmatrix} 106.75 \\ 119.68 \\ 158.77 \\ 230.48 \\ 151.76 \\ 103.71 \\ 73.84 \\ 52.59 \\ 35.53 \\ 18.89 \\ 2.73 \end{pmatrix} kPa, \{M\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80.06 \\ 339.65 \\ 837.40 \\ 380.87 \\ 151.98 \\ 53.65 \\ 16.09 \\ 7.42 \\ 2.05 \\ 0 \end{pmatrix} kNm$$

Na slici 6.5a-b su prikazani rezultati proračuna temeljnog nosača, za slučaj da se podloga aproksimira Vinklerovim modelom sa modulom reakcije  $k=30.0 \text{ MN/m}^3$  i Pasternakovim modelom sa  $k=30.0 \text{ MN/m}^3$  i modulom  $G=250.0 \text{ MPa}$  i  $G=500.0 \text{ MPa}$ . Povećanjem modula  $G$ , raste krutost podloge a smanjuje se relativna krutost nosača. Kao rezultat, manji su ugibi nosača i moment savijanja nosača ispod sile.



Slika 6.5a Uporedni rezultati proračuna ugiba i nagiba e-linije nosača (Pasternak - Vinkler),  $n=20$

Kao posledica smanjenja relativne krutosti nosača, zbog povećanja absolutne krutosti podloge, povećava se kontaktni napon ispod sile. Za slučaj kada je modul  $G=250.0$  i  $500.0 \text{ MPa}$ , koeficijenti uz imaginarni član karakteristične jednačine su  $0.484$  i  $0.967$ . Prema jednačini (3.8), rešenja su validna, jer je koeficijent  $\leq 1$ .



Slika 6.5b Uporedni rezultati proračuna presečnih sila i kont-napona (Pasternak - Vinkler),  $n=20$

## GREDNA NA NELINEARNOJ VINKLEROVOJ PODLOZI

Treba imati u vidu, da rešenje jednačine (6.9) ima fizičkog smisla samo ukoliko je podloga u svim tačkama pritisnuta  $q_i \geq 0$ . Ako se u nekim tačkama dobije kontaktni napon zatezanja odnosno  $q_i < 0$ , potrebno ih je iterativnim putem svesti na  $q_i \geq 0$ , tako što će se u tačkama u kojim je  $q_i < 0$  u narednoj iteraciji u jednačinu 6.9 staviti modul reakcije  $k_i = 0$ . Ovaj postupak rešavanja nelinearne jednačine se zove metoda proste zamene ili direktnе supsticije. Postupak je vrlo jednostavan i kod ovakvih problema je uglavnom konvergenat, a kada to nije slučaj, treba primeniti neku drugu metodu.

$$[K_t(k)]\{w\} = \{P\} \quad \text{gde je } k_i = \begin{cases} k_i & \text{za } q_i \geq 0 \\ 0 & \text{za } q_i < 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Kod Vinklerove podloge, na vrlo jednostavan način se može uvesti i nelinearna veza između sleganja podloge i efektivnog kontaktnog napona, uključujući i isključenje zatezanja. Jednačina koja se često primenjuje za opisu nelinearne veze između sila i pomeranja je hiperbolička funkcija oblika:

$$q_i = \frac{w_i}{a + b \cdot w_i} , \quad \text{gde su: } a = \frac{1}{k(0)} , \quad b = \frac{1}{q_f} \quad (7.2)$$

gde je:  $k(0)$  početna/inicijalnu krutost  
 $q_f$  granični kontaktni napon u temeljnoj spojnici

Kada se gornja funkcija uvrsti u jednačinu (6.9), dobija se sledeća matrična jednačina:

$$[K_t(k)]\{w\} = \{P\} \quad \text{gde je } k_i = \begin{cases} (a + b \cdot w_i)^{-1} & \text{za } w_i \geq 0 \\ 0 & \text{za } w_i < 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

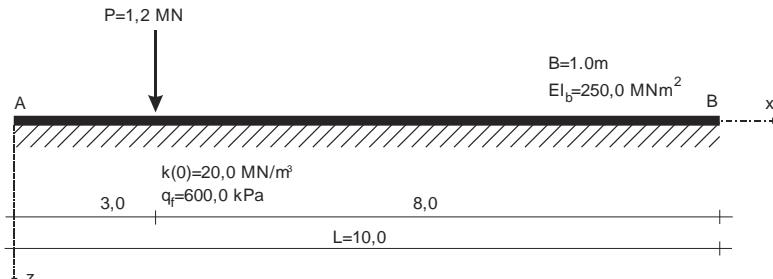
U matematičkom smislu, prethodnim postupkom je izvršena dijagonalizacija matrice (6.12) koja uspostavlja vezu između kontaktnih napona i sleganja, odnosno:

$$\{q\} = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \frac{1}{B} [f]^{-1} \{w\} \quad \rightarrow \quad k_{ii} = \frac{q_i}{w_i} \quad \rightarrow \quad \{q\} = [k] \{w\} \quad (7.4)$$

Matrica modula reakcije  $[k]$  dobijena prema gornjem izrazu, važi isključivo za datu geometriju, parametre deformabilnosti kontinuuma i zadato opterećenje na nosaču. Ako se promeni bilo koji od gore navedenih podataka, prethodno određena matrica  $[k]$  više ne važi, već se mora odrediti nova.

## BROJNI PRIMER - 7.1

Izračunati sleganja temeljnog nosača, dimenzija i opterećenja prema donjoj slici, primjenjujući isključenje zatezanja u temeljnoj spojnici. Tlo aproksimirati nelinearnim Vinklerovim modelom. Inicijalni modul reakcije podloge je  $k_0=20.0 \text{ MN/m}^3$  a granični kontaktni napon  $q_f=600.0 \text{ kPa}$ . Proračun izvršiti numerički, koristeći MKR. Pored nelinearnog rešenja, prikazati i standardno rešenje po Vinkleru.

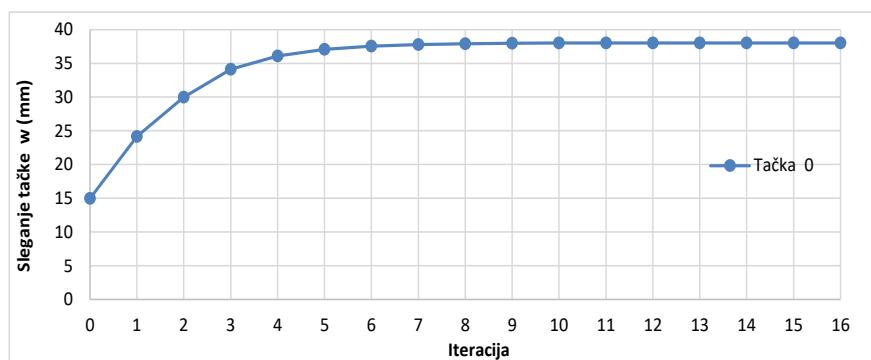


Rešenje:

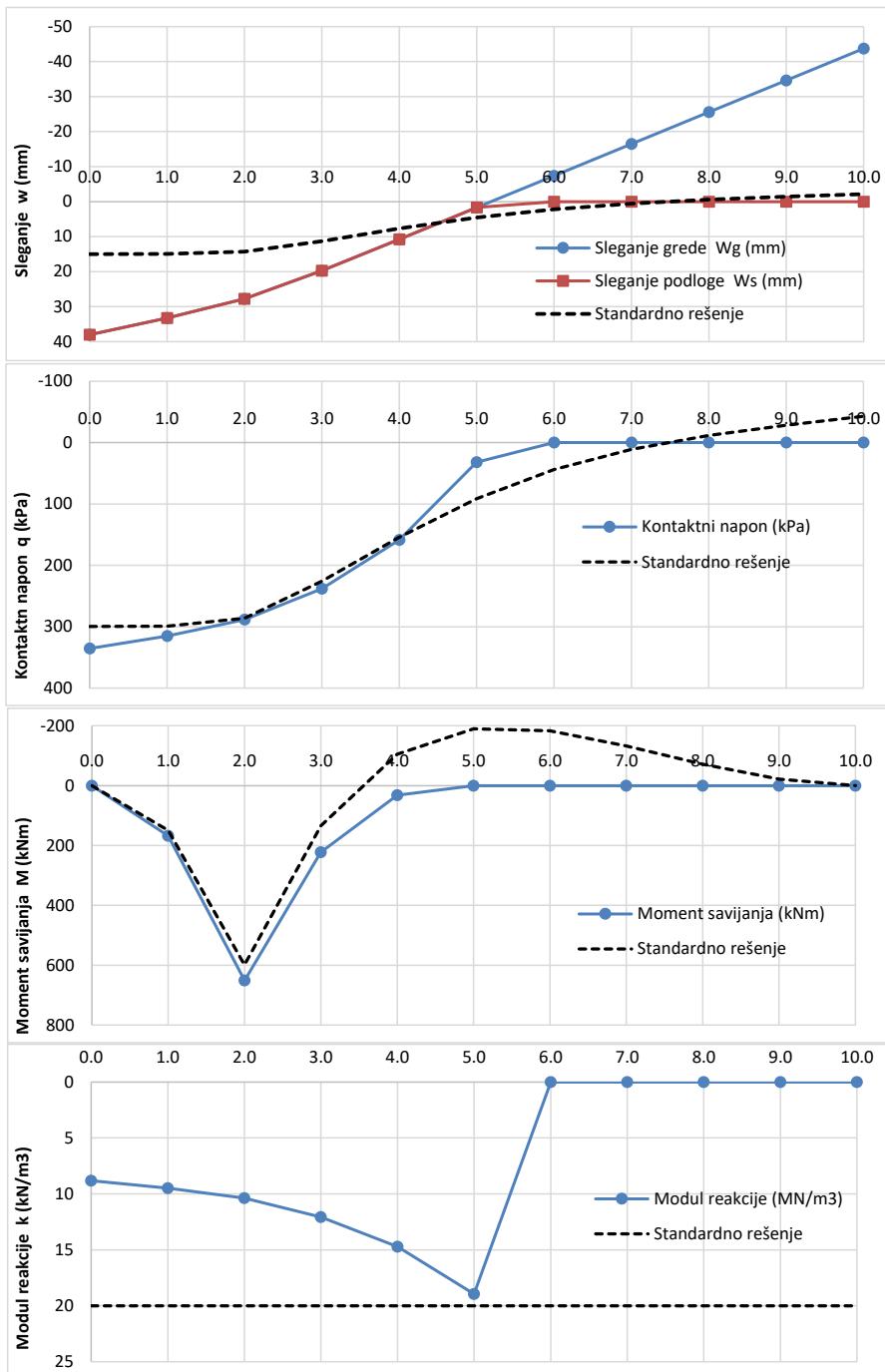
Parametri hiperboličke funkcije:

$$a = \frac{I}{k(0)} = \frac{I}{20.0} = 0.05 \text{ m}^3 / kN \quad , \quad b = \frac{I}{q_f} = \frac{I}{600.0} = 0.00167 \text{ m}^2 / kN$$

Proračun je urađen prema jednačini (7.3), koristeći metodu direktnе supsticije. Konvergencija postupka je prikazana na dijagramu na Slici 7.1, za čvornu tačku 0, odnosno levi kraj nosača. Na slici 7.2, grafički su prikazani rezultati iterativnog proračuna sleganja nosača i podloge, kontaktnog napona, momenta savijanja i modula reakcije. Radi poređenja, na slici 7.2 su prikazani grafički rezultati standarnog proračuna, bez isključenja napona zatezanja i ograničenja kontaktnih napona ( $q_f=\infty$ ).



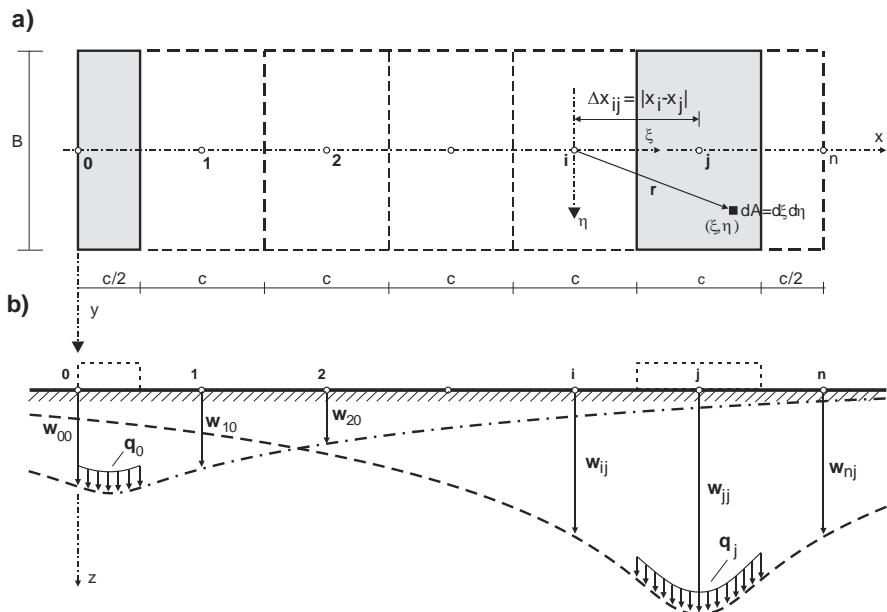
Slika 7.1 Konvergencija iterativnog postupka



Slika 7.2 Rezultati proračuna za linearnu (standardno rešenje) i nelinearnu Vinklerovu podlogu

## PRIBLIŽAN PRORAČUN GREDE NA ELASTIČNOM KONTINUUMU

Proračun temeljnog nosača na homogenom, linearno-elastičnom izotropnom kontinuumu (Hook-eov model ili elastični-poluprostor), znatno je složeniji od Vinklerovog modela. Analitičko rešenje se svodi na rešavanje integro-diferencijalne jednačine koja je rešiva samo za najjednostavnije slučajeve. Za rešavanje složenijih problema u praksi, koriste se isključivo približne - numeričke metode, kao što su MKR i MKE. U MKR, osnovni problem se svodi na određivanje veze između kontaktnih napona i sleganja elemenata diskretizovanog nosača. Rešenje problema se dobija integracijom jednačine sleganja usled vertikalne silu na površini poluprostora (Boussinesq, 1888).



Slika 8.1 a) Šema integracije površinskog opterećenja b) Sleganje površine elastičnog pp

Prema slici 8.1, sleganje  $w_{ij}$  površine elastičnog poluprostora u tački  $i(x_i, 0)$ , usled jednolikog napona  $q_j$  u  $\text{kN/m}^2$ , na površini  $A_j = B \cdot c$  čije je težište u tački  $j(x_j, 0)$ , može se prikazati sledećim integralom:

$$dw_{ij} = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} q_j \frac{d\xi d\eta}{r} \quad \Rightarrow \quad w_{ij} = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s} q_j \int_{\Delta x_{ij}}^{x_i + \frac{c}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\eta \quad (8.1)$$

Nakon izvršene integracije, sleganje  $w_{ij}$  se može prikazati u zatvorenom/analitičkom obliku preko uticajne funkcije sleganja  $f_{ij}$  sledećim izrazom:

$$w_{ij} = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} B \cdot f_{ij} \cdot q_j \quad , \quad f_{ij} = \frac{1}{\pi B} \int_{\Delta x_{ij} - \frac{c}{2}}^{\Delta x_{ij} + \frac{c}{2}} d\xi \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (8.2)$$

Uticajna funkcija sleganja  $f_{ij}$  je bezdimenzionalna i određuje se za površine dobijene podelom nosača dužine L na n jednakih delova  $c=L/n$ . Dimenzija u pravcu nosača, za ivične tačke ( $i=0, i=n$ ) je  $c/2$ , a za unutrašnje tačke ( $0 < i < n$ ) je c. Vandijagonalni članovi matrice uticajnih funkcija  $f_{ij}$  se određuju prema izrazu:

$$i \neq j \Rightarrow f_{ij} = \frac{U_{ij}}{\pi} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{U_{ij}}\right) - \frac{V_{ij}}{\pi} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{V_{ij}}\right) + \frac{\operatorname{arsh}(U_{ij})}{\pi} - \frac{\operatorname{arsh}(V_{ij})}{\pi}$$

a, dijagonalni članovi  $f_{ii}$  prema izrazu:

$$i=0, i=n \Rightarrow f_{ii} = \frac{V_{ii}}{\pi} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{V_{ii}}\right) - \frac{\operatorname{arsh}(V_{ii})}{\pi}$$

$$0 < i < n \Rightarrow f_{ii} = 2 \frac{V_{ii}}{\pi} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{V_{ii}}\right) - 2 \frac{\operatorname{arsh}(V_{ii})}{\pi}$$

U prethodnim izrazima, sa U i V su označene pomoćne funkcije, prema izrazima:

$$i, j=0, j=n \Rightarrow U_{ij} = \frac{c}{B} \left( 2 \frac{|x_j - x_i|}{c} \right) = \frac{c}{B} \left( 2 \frac{|j \cdot c - i \cdot c|}{c} \right) = \frac{c}{B} (2|j-i|)$$

$$i, 0 < j < n \Rightarrow U_{ij} = \frac{c}{B} \left( 2 \frac{|x_j - x_i|}{c} + 1 \right) = \frac{c}{B} \left( 2 \frac{|j \cdot c - i \cdot c|}{c} + 1 \right) = \frac{c}{B} (2|j-i| + 1)$$

$$V_{ij} = \frac{c}{B} \left( 2 \frac{|x_j - x_i|}{c} - 1 \right) = \frac{c}{B} \left( 2 \frac{|j \cdot c - i \cdot c|}{c} - 1 \right) = \frac{c}{B} (2|j-i| - 1)$$

Ako se jednačina oblika (8.2) ispiše za sve opterećene površine ( $j=0, \dots, n$ ), ukupno sleganje  $w_i$  tačke i usled kontaktnog napona duž celog nosača glasi:

$$w_i = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} B \sum_{j=0}^n f_{ij} q_j \quad (8.3)$$

Ako se za sve čvorne tačke ( $i=0, \dots, n$ ) duž nosača, napišu jednačine oblika (8.3) dobija se veza između vektora sleganja  $\{w\}$  i kontaktnog napona  $\{q\}$ .

Pregledno se sve jednačine mogu napisati u sledećem matričnom obliku:

$$\{w\} = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} B[f]\{q\} \quad \Rightarrow \quad \{q\} = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \frac{1}{B} [f]^{-1} \{w\} \quad (8.4)$$

Smenom jednačine (8.4) u (6.5), dobija se sistem od  $n+1$  linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim čvornim pomeranjima:

$$\begin{aligned} \frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} &= \{p\} - B\{q\} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} = \{p\} - B \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \frac{1}{B} [f]^{-1} \{w\} \\ \frac{E_b I}{c^4} [D]\{w\} + \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} [f]^{-1} \{w\} &= \{p\} \Big/ \cdot c \quad \Rightarrow \\ [K_t] = \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{c^4}{E_b I} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} [f]^{-1} \right), \quad \{P\} &= c\{p\} \\ [K_t]\{w\} &= \{P\} \quad \Rightarrow \quad \{w\} = [K_t]^{-1} \{P\} = [F_t]\{P\} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Jednačina (8.5) za nosač na elastičnom poluprostoru, ima identičan oblik kao jednačina (6.9) za nosač na Vinklerovoj podlozi. U principu, konačna jednačina ima isti oblik nezavisno od vrste deformabilne podloge. Razlika je samo u delu matrice krutosti koja se odnosi na podlogu.

Proračun elemenata matrice uticajnih funkcija sleganja  $[f]$  se vrši u programu EXCEL koji ima mogućnost jednostavnog računanja sa skalarima i matricama i mogućnost grafičkog prikaza rezultata proračuna. Numerička greška raste prema višim izvodima funkcije, a tačnost se može povećati usvajanjem finije podele nosača. To se posebno može uočiti na dijagramu presečnih sila i dijagramu reaktivnog opterećenja. Sa povećanjem broja podela, dobija se veća tačnost u dijagramu presečnih sila na mestima dejstva koncentrisane sile ili sprega sile. Na dijagramu reaktivnog opterećenja, kod finije podele je izraženija koncentracija napona na kraju nosača.

Kada bi broj podela nosača težio ka  $n=\infty$ , kontaktni naponi na ivicama nosača bi se sužavali i takođe težili ka  $\infty$  vrednosti. Fizički posmatrano, kod realne podloge se zbog konačne čvrstoće materijala javlja lom odnosno plastifikacija materijala, čime se ograničava dalji porast ivičnih napona na račun povećanja napona u tačkama koje su udaljene od ivice nosača.

## 8.1 Određivanje parametara deformabilnosti elastičnog kontinuuma

Parametri  $E_s$  i  $v_s$  zavise od velikog broja različitih faktora, kao što su poremećenost uzorka, nivo srednjeg normalnog napona, nivo devijatorskog napona, naponska istorija (normalno konsolidovana ili prekonsolidovana tla, mlada ili vremešna tla), mogućnost dreniranja porne vode, brzina nanošenja opterećenja, granulometrijski sastav tla, vlažnost, poroznost, oblik zrna i dr.

- Modul elastičnosti se može odrediti: laboratorijski na neporemećenim uzorcima (opitom jedno ili triaksijalne kompresije i približno preko modula stišljivosti) ili terenskim opitom pomoću presiometra (PMT), dilatometra (DMT) ili proceniti na osnovu statičke (CPT) ili standardne penetracije (SPT).
- Poissonov koeficijent se može odrediti ispitivanjem uzorka u opitu jednoaksijalne ili triaksijalne kompresije. U dreniranim uslovima, Poissonov koeficijent se kreće između  $v'_s=0.2-0.3$ , dok je u nedreniranim uslovima (brzo nanošenje opterećenja na slabo propusnom tlu) Poissonov koeficijent je  $v_u=0.50$ .

Za preliminarne proračune, orientacione vrednosti dreniranog modula elastičnosti sitnozrnih (glina, prašina) i krupnozrnih materijala (pesak, šljunak) su (Bowles, 1967):

Vrsta tla	$E'_s$ (MPa)	Vrsta tla	$E'_s$ (MPa)
Meka glina	2 - 4	Prašinast pesak	5 - 20
Srednje meka glina	4 - 9	Rastresit pesak	10 - 25
Prekonsolidovana glina	7 - 20	Peskovita glina	30 - 40
Les	6 - 15	Zbijen pesak	50 - 100
Prašina	2 - 20	Rastresit pesak i šljunak	50 - 140
		Zbijen pesak i šljunak	80 - 200

Modul elastičnosti peska se može približno odrediti na osnovu korelacije sa brojem udaraca  $N$  iz standardnog penetracionog opita (SPT) ili pomoću otpornosti tla na prodror konusa  $q_c$  iz statičkog penetracionog opita (CPT), prema sledećem:

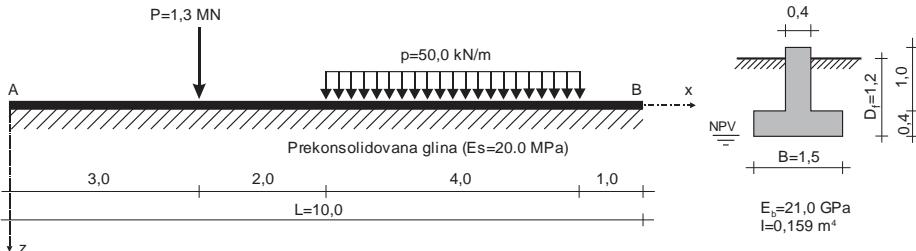
Vrsta tla	$E'_s$ (kPa)	
Čisti Peskovi	500( $N+15$ )	$(3\div 5)q_c$
Glinoviti peskovi	300( $N+15$ )	$(2\div 8)q_c$

Za preliminarne proračune, nedrenirani modul elastičnosti zasićenih glina  $E_u$  kao parametar za analizu u uslovima brzog nanošenja opterećenja (inicijalno sleganje tla usled promene oblika bez promene zapremine), može se približno odrediti pomoću izraza  $E_u=p'_0(200+40\cdot OCR)$  koji je predložio Atkinson (1974) ili na osnovu tabele:

Nedrenirana čvrstoća $c_u$ (kPa)	< 50	75	150	> 200
$E_u / c_u$	250	500	1000	1500

## BROJNI PRIMER – 8.1

Armirano betonski temeljni nosač (slika 8.2), fundiran je na dubini od  $D_f = 1.5\text{m}$ , u sloju prekonsolidovane gline sa modulom elastičnosti  $E_s = 20.0 \text{ MN/m}^2$  i Poisson-ovim koeficijentom  $\nu_s = 0.30$ . Odrediti pomeranja i presečne sile nosača u  $1/_{10}$  raspona. Odrediti ekvivalentni modul reakcije po Vesiću i uporediti rezultate sa rešenjem za nosač na Vinklerovoj i elastičnoj podlozi. Proračun izvršiti numerički, koristeći MKR.



Slika 8.2 Temeljni nosač na sloju prekonsolidovane gline

**Rešenje:**

Elementi matrice uticajnih funkcija  $[f]$  za podelu temeljnog nosača na  $n=10$  jednakih delova, (koristeći program napisan u EXCEL-u) glase:

$$E_b I = 21.0 \cdot 10^3 \cdot 0.159 = 3.339 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2, c = \frac{L}{n} = \frac{10.0}{10} = 1.0\text{m}, \frac{c}{B} = \frac{1.0}{1.5} = 0.667$$

$[f] =$	0.45253	0.31335	0.15865	0.10597	0.07952	0.06363	0.05304	0.04546	0.03978	0.03536	0.01631
	0.19135	0.90505	0.31335	0.15865	0.10597	0.07952	0.06363	0.05304	0.04546	0.03978	0.01817
	0.08890	0.31335	0.90505	0.31335	0.15865	0.10597	0.07952	0.06363	0.05304	0.04546	0.02051
	0.05733	0.15865	0.31335	0.90505	0.31335	0.15865	0.10597	0.07952	0.06363	0.05304	0.02354
	0.04222	0.10597	0.15865	0.31335	0.90505	0.31335	0.15865	0.10597	0.07952	0.06363	0.02762
	0.03340	0.07952	0.10597	0.15865	0.31335	0.90505	0.31335	0.15865	0.10597	0.07952	0.03340
	0.02762	0.06363	0.07952	0.10597	0.15865	0.31335	0.90505	0.31335	0.15865	0.10597	0.04222
	0.02354	0.05304	0.06363	0.07952	0.10597	0.15865	0.31335	0.90505	0.31335	0.15865	0.05733
	0.02051	0.04546	0.05304	0.06363	0.07952	0.10597	0.15865	0.31335	0.90505	0.31335	0.08890
	0.01817	0.03978	0.04546	0.05304	0.06363	0.07952	0.10597	0.15865	0.31335	0.90505	0.19135
	0.01631	0.03536	0.03978	0.04546	0.05304	0.06363	0.07952	0.10597	0.15865	0.31335	0.45253

Matrica krutosti je:

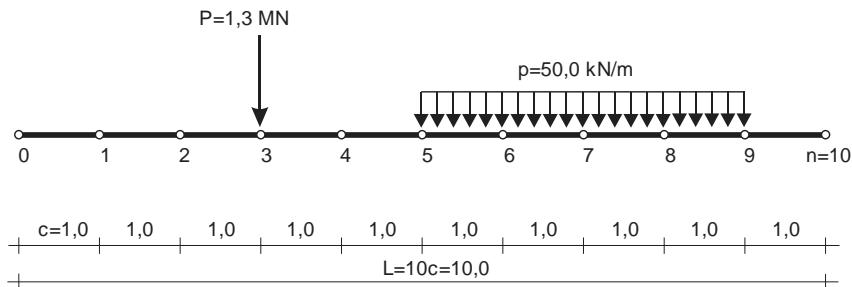
$$[K_t] = \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{c^4}{E_b I} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} [f]^{-1} \right) = \frac{3.339 \cdot 10^6}{1.0^3} \left( [D] + \frac{1.0^4}{3.339 \cdot 10^6} \frac{20.0 \cdot 10^3}{1 - 0.3^2} [f]^{-1} \right)$$

$$[K_t] = 3.339 \cdot 10^6 ([D] + 6.583 \cdot 10^{-3} [f]^{-1}) \quad \text{kN/m}$$

Elementi matrice krutosti (koristeći program napisan u EXCEL-u) iznose:

$$[K_t] = \begin{bmatrix} 6.735E+3 & -1.337E+4 & 6.675E+3 & -1.811E+0 & -1.201E+0 & -8.969E-1 & -7.135E-1 & -5.959E-1 & -5.201E-1 & -4.854E-1 & -5.324E-1 \\ -6.689E+3 & 1.673E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -6.428E-1 & -4.078E-1 & -2.978E-1 & -2.339E-1 & -1.950E-1 & -1.754E-1 & -1.874E-1 \\ 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -6.808E-1 & -4.368E-1 & -3.224E-1 & -2.573E-1 & -2.240E-1 & -2.340E-1 \\ -8.652E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -6.725E-1 & -4.320E-1 & -3.218E-1 & -2.661E-1 & -2.688E-1 \\ -5.573E-1 & -7.040E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -6.728E-1 & -4.363E-1 & -3.362E-1 & -3.243E-1 \\ -4.114E-1 & -4.550E-1 & -6.802E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -6.802E-1 & -4.550E-1 & -4.114E-1 \\ -3.243E-1 & -3.362E-1 & -4.363E-1 & -6.728E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -7.040E-1 & -5.573E-1 \\ -2.688E-1 & -2.661E-1 & -3.218E-1 & -4.320E-1 & -6.725E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 & -8.652E-1 \\ -2.340E-1 & -2.240E-1 & -2.573E-1 & -3.224E-1 & -4.368E-1 & -6.808E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 2.006E+4 & -1.336E+4 & 3.338E+3 \\ -1.874E-1 & -1.754E-1 & -1.950E-1 & -2.339E-1 & -2.978E-1 & -4.078E-1 & -6.428E-1 & 3.338E+3 & -1.336E+4 & 1.673E+4 & -6.689E+3 \\ -5.324E-1 & -4.854E-1 & -5.201E-1 & -5.959E-1 & -7.135E-1 & -8.969E-1 & -1.201E+0 & -1.811E+0 & 6.675E+3 & -1.337E+4 & 6.735E+3 \end{bmatrix}$$

Elementi vektora  $P_i$  i čvornog opterećenja  $p_i$  određeni su na osnovu donje slike :



$$P_0 = cp_0 = P_1 = cp_1 = 0$$

$$P_2 = cp_2 = 1.0 \cdot 1300.0 \cdot (1.0 - 1.0) / 1.0^2 = 0$$

$$P_3 = cp_3 = 1.0 \cdot 1300.0 \cdot 1.0 / 1.0^2 = 1300.0 \text{ kN}$$

$$P_4 = cp_4 = 0$$

$$P_5 = cp_5 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left[ 1.0 - (0 + 1.0/2) \right] / 1.0^2 = 25.0 \text{ kN}$$

$$P_6 = cp_6 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left( 0 + 1.0/2 \right) / 1.0^2 + 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left[ 1.0 - (0 + 1.0/2) \right] / 1.0^2 = 50.0 \text{ kN}$$

$$P_7 = cp_7 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left( 0 + 1.0/2 \right) / 1.0^2 + 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left[ 1.0 - (0 + 1.0/2) \right] / 1.0^2 = 50.0 \text{ kN}$$

$$P_8 = cp_8 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left( 0 + 1.0/2 \right) / 1.0^2 + 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left[ 1.0 - (0 + 1.0/2) \right] / 1.0^2 = 50.0 \text{ kN}$$

$$P_9 = cp_9 = 1.0 \cdot 50.0 \cdot 1.0 \left[ 1.0 - (0 + 1.0/2) \right] / 1.0^2 = 25.0 \text{ kN}$$

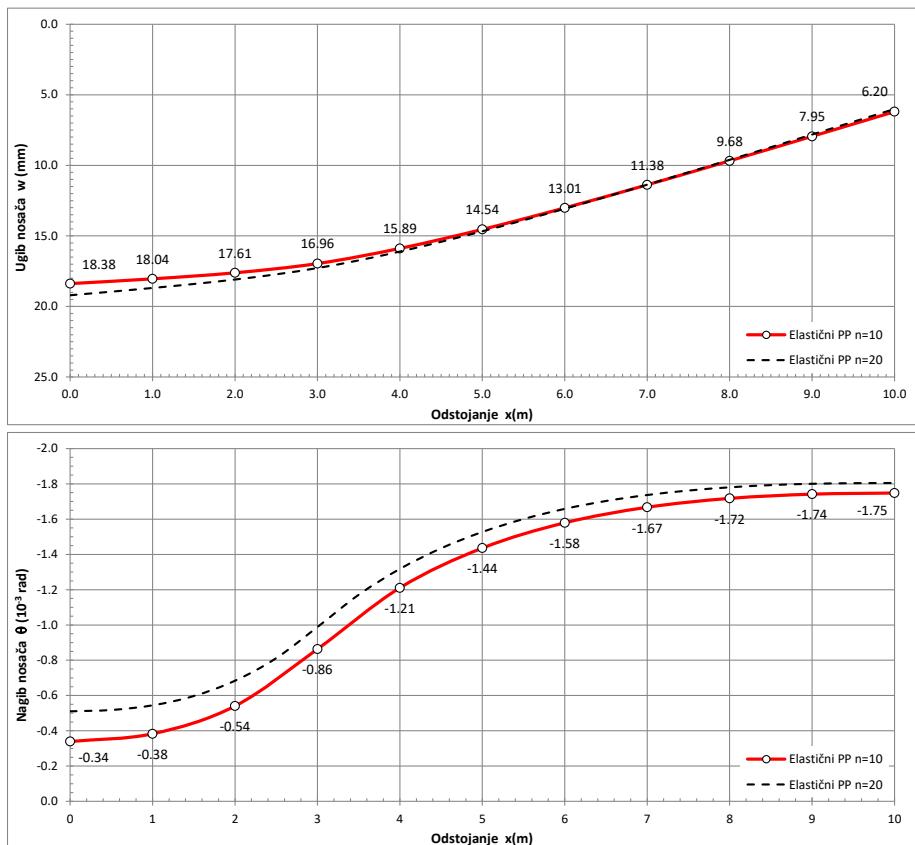
$$P_{10} = cp_{10} = 0$$

Sleganje i kontaktni napon se mogu odrediti na osnovu jednačine (8.5 i 8.4):

$$\{w\} = [K_t]^{-1} \{P\} \quad , \quad \{q\} = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \frac{I}{B} [f]^{-1} \{w\}$$

Rezultati proračuna nosača na elastičnoj sredini, prikazani su tabelarno i grafički:

$$\{w\} = \begin{pmatrix} 18.38 \\ 18.04 \\ 17.61 \\ 16.96 \\ 15.89 \\ 14.54 \\ 13.01 \\ 11.38 \\ 9.68 \\ 7.95 \\ 6.20 \end{pmatrix} \text{ mm}, \quad \{q\} = \begin{pmatrix} 391.71 \\ 112.23 \\ 121.91 \\ 113.95 \\ 103.08 \\ 91.00 \\ 78.36 \\ 65.47 \\ 52.55 \\ 36.73 \\ 57.78 \end{pmatrix} \frac{kN}{m^2}, \quad \{\theta\} = \begin{pmatrix} -0.34 \\ -0.38 \\ -0.54 \\ -0.86 \\ -1.21 \\ -1.44 \\ -1.58 \\ -1.67 \\ -1.72 \\ -1.74 \\ -1.75 \end{pmatrix} 10^{-3} \text{ rad}$$

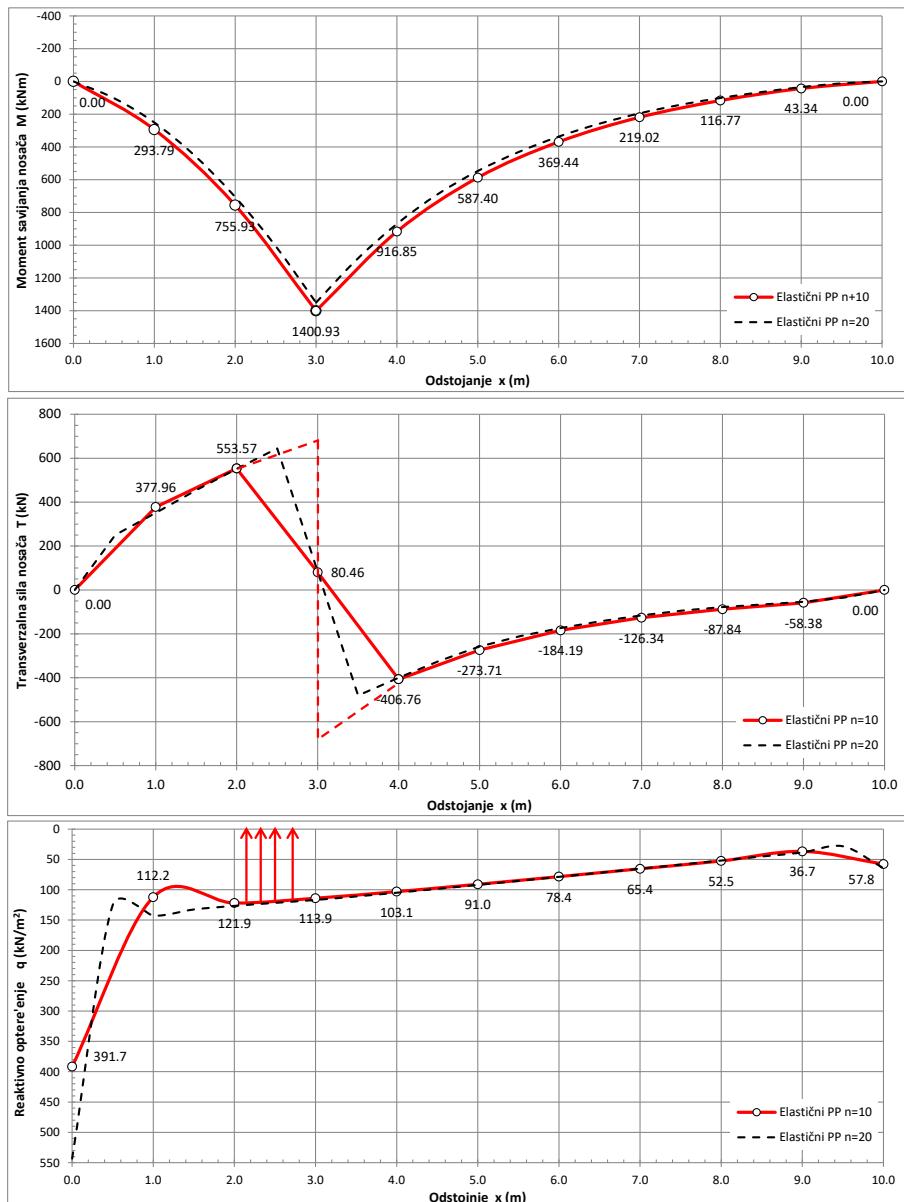


Slika 8.3a

Rezultati proračuna ugiba i nagiba nosača prema MKR

Presečne sile su određene preko ugiba nosača. Rezultati su prikazani grafički. Tačnije vrednosti transverzalne sile oko koncentrisane sile, mogu se dobiti usvajanjem finije podele (vidi sliku, n=20) ili proračunom na osnovu zadatog i reaktivnog opterećenja.

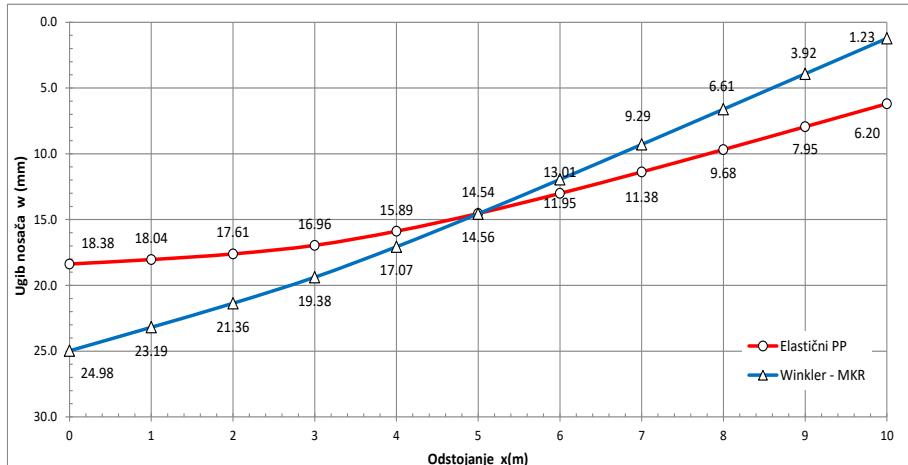
$$T_{3l} + T_{3d} = T_3 = 80.46, \quad T_{3l} - T_{3d} = P = 13000 \Rightarrow T_{3l} = 690.23 \text{ kN}, T_{3d} = -609.77 \text{ kN}$$



Slika 8.3b Rezultati proračuna presečnih sila i kontaktnog napona prema MKR

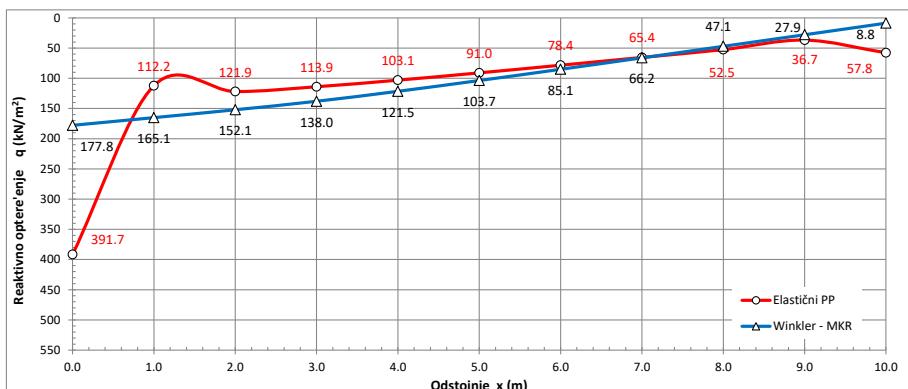
## 8.2 Uticaj izbora modela podloge na rezultate proračuna

Za dat nosač i opterećenje, rezultati u velikoj meri zavise od usvojenog modela tla i njegovih parametara. Približna veza između modula reakcije tla i modula elastičnosti i Poiss. koeficijenta, može se uspostaviti po metodi Biota (jednakost momenata) ili Vesića (jednakost sleganja). Ako se pođe od uslova približne jednakosti sleganja središnje tačke u dva modela tla, za elastični kontinuum iz primera 5.1, ekvivalentni modul reakcije tla je  $k=7.12 \text{ MN/m}^3$ . Rezultati proračuna su prikazani na slici 8.4.

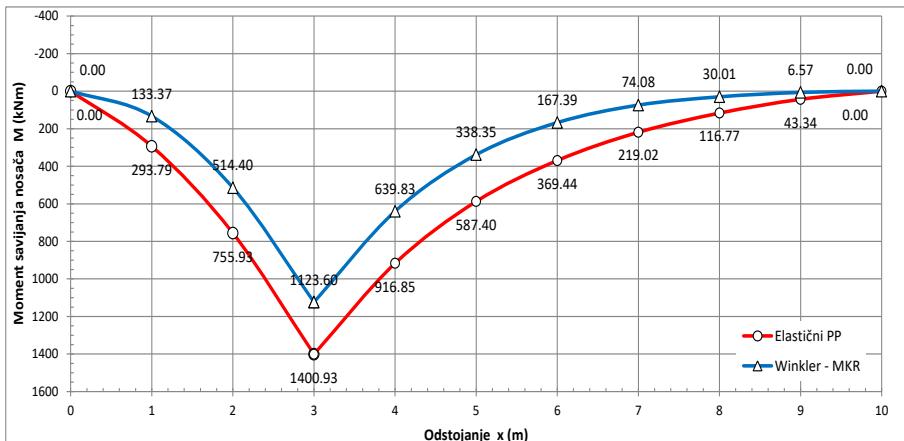


Slika 8.4a Ugib nosača za model Elastičnog kontinuma i Vinklerov model

Slika 8.4a prikazuje sleganje nosača na Vinklerovom modelu i na modelu elastičnog kontinuma. Može se primetiti da je sleganje u sredini nosača približno isto kod oba modela, što je bilo i očekivano obzirom da je jednakost sleganja uslov po Vesiću za određivanje veze između parametara modela.



Slika 8.4b Kontaktni napon za model Elastičnog PP i Vinklerov model

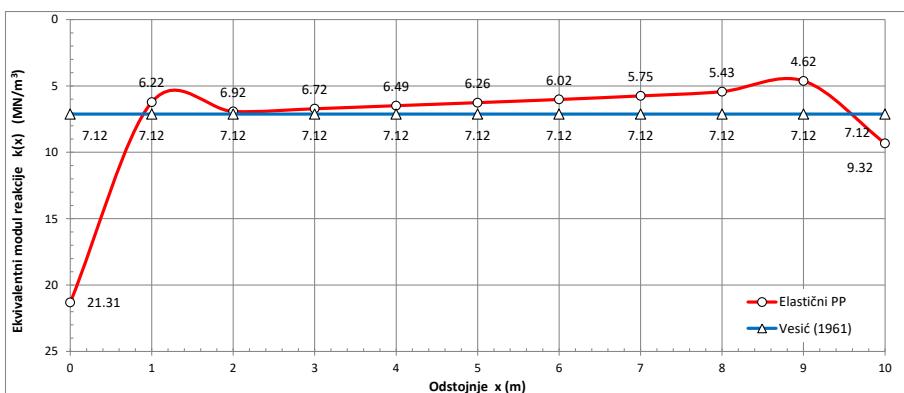


Slika 8.4c    Momenti savijanja nosača za model Elastičnog kontinuituma i Vinklerov model

Kada bi se модул реакције одредио на основу једначина коју је педлоžio Biot, добијале би се сличне вредности момента савијања али би била већа разлика у сleganjima.

Da bi se између два модела, успоставила потпуна jednakost ugiba, momenta i transverzalne sile u svim tačkama duž nosača, treba izračunati модул реакције  $k(x)$  као количник контакtnог напона и сleganja na основу резултата прорачуна nosača na modelu elastične средине (Slika 8.4d). Ако се затим функција  $k(x)$  унесе као параметар подлоге у Vinklerov model, резултати прорачуна ће за оба модела бити идентични.

Oвим поступком се само за dato оптерећење nosača, elastični kontinuum може једнозначно заменити Vinklerovim, што омогућује да се итеративним путем укину напони зateзанja u темељној spojници или да се приближно анализира nelinearna веза између напона и деформација у тлу.



Slika 8.4d    Povratni модул реакције  $k(x)$  на основу модела Elastičnog kontinuituma

## PRORAČUN INTERAKCIJE KONSTRUKCIJE TEMELJA I TLA

Pojmovi kao što su: nepokretan oslonac ili uklještenje su idealizovani konstruktivni elementi koji imaju za cilj pojednostavljenje statickog proračuna konstruktivnog sistema. Oslonci i uklještenja konstrukcije, fizički su temelji. Bez obzira da li se radi o plitkom ili dubokom temelju, masivnom ili rasčlanjenom, temelj se uvek oslanja na tlo kao deformabilnu sredinu, zbog čega su temelji ustvari pomerljivi oslonci.

Podela konstrukcije na nadzemni (super-struktura) i podzemni deo (sub-strukturu) i njihova nezavisna analiza nije uvek opravdana. Kod statički određenih i statički neodređenih ali vrlo fleksibilnih konstrukcija, promena reakcije oslonca usled njihove pomerljivosti je mala. Međutim, kod statički neodređene, relativno krute konstrukcije, promena reakcije oslonca usled njihove pomerljivosti je značajna i ne sme se zanemariti.

Ako je super-struktura oslonjena na nezavisne temelje samce na odstojanjima koja eliminisu njihov međusobni uticaj, problem interakcije se može rešiti direktno uvođenjem elastičnih oslonaca i uklještenja. Krutost oslonaca se može odrediti korišćenjem veze između pomeranja (sleganje i obrtanje) temelja pod dejstvom jediničnih sila (sile i momenti).

Kod super-struktura koje imaju zajedničke temelje za više stubova (temeljne grede), problem određivanja krutosti oslonaca je složeniji zadatak, pošto se mora odrediti i međusobni uticaj osloničkih reakcija i pomeranja.

Da bi se izvršio proračun interakcije, treba odrediti krutost super-strukture i sub-strukture, za što je potreban program za statički proračun/analizu konstrukcije i odgovarajući program za proračun temeljnog nosača na elastičnoj podlozi. Programi mogu biti potpuno nezavisni ili mogu biti sintetizovani u jedan, što olakšava i ubrzava proračun interakcije. Po pravilu, svi programi za statičku analizu imaju mogućnost proračuna temeljnog nosača (linijskog i površinskog) na Vinklerovojoj podlozi, koja je vrlo jednostavna ali ne daje realne rezultate, dok većina programa za statičku analizu konstrukcije, ne podržava uvođenje realnije podloge, npr. elastičnog polu-prostora.

U principu postoje dve metode za rešavanje problema interakcije: direktna i iterativna. Kod direktne metode, vrši se spajanje matrice krutosti super i sub-strukture iz uslova kompatibilnosti pomeranja. Iterativna metoda pretstavlja uzastopne korekcije osloničkih reakcija i pomeranja dok se ne zadovolje uslovi kompatibilnosti pomeranja oslonaca.

Obe metoda omogućavaju da se u proračun uzmu u obzir i razni sekundarni efekti, kao što su isključenje negativnih kontaktnih napona, nelinearna deformabilnost tla u području radnih napona, konsolidacija tla, viskozne osobine tla i tome slično.

U okviru ovog predmeta, akcenat je na direktnoj metodi interakcije i elastičnim modelima tla, tj. Vinklerovojoj podlozi i elastičnom polu-prostoru, čije karakteristike ne zavise od nivoa napona (važi princip superpozicije) i vremena (nema primarne i sekundarne konsolidacije).

Dopunsko pomeranje nosača usled konsolidacije tla, može se odrediti analizom tla u nedreniranim i dreniranim uslovima. U nedreniranim uslovima se dobijaju trenutna sleganja

koristeći nedrenirani modul elastičnosti  $E_u$  i Poissonov koeficijent  $\nu_u=0.5$ , a u dreniranim uslovima što odgovara završetku primarne konsolidacije, treba koristiti drenirani modul elastičnosti  $E_s$  i Poissonov koeficijent  $\nu_s$ .

## 9.1 Direktna metoda proračuna interakcije

Veza između generalisanih pomeranja  $\underline{U}$  (sleganja i obrtanja) i generalisanih reakcija oslonaca  $\underline{R}$  (sile i momenti) temeljnog nosača na deformabilnoj podlozi, može se prikazati sledećim izrazom (6.9, 8.5) :

$$[\underline{K}_t]\{\underline{U}\} = \{\underline{R}\} \quad \Rightarrow \quad \{\underline{U}\} = [\underline{K}_t]^{-1}\{\underline{R}\} = [\underline{F}_t]\{\underline{R}\} \quad (9.1)$$

gde je:  $[\underline{K}_t]$  = matrica krutosti temelja i tla u oslonačkim tačkama konstrukcije  
 $[\underline{F}_t]$  = matrica fleksibilnosti temelja i tla u oslonačkim tačkama konstrukcije  
 $\{\underline{U}\}$  = generalisana pomeranja temelja oslonačkih tačaka konstrukcije  
 $\{\underline{R}\}$  = generalisane reakcije pomerljivih oslonaca konstrukcije

U jednačini (9.1) simbol  $\underline{\phantom{x}}$  označava pomeranje tačke spoja konstrukcije i temeljnog nosača. U zajedničkim tačkama, gornja konstrukcija i temeljni nosač imaju iste sile i pomeranja. Broj nepoznatih u izrazu (9.1) je dva puta veći od broja jednačina.

Pošto se u MKR određuju samo sleganja temeljnog nosača, a nagibi se računaju na osnovu diferencijalnih pomeranja, elementi matrice krutosti se mogu odrediti preko matrice fleksibilnosti. Elementi matrice krutosti temeljnog nosača i podloge  $[\underline{K}_t]$  su tada podskup ( $\in$ ) matrice krutosti  $[K_t]$ , pa je u zavisnosti od vrste podloge:

$$\text{Vinklerov model: } [\underline{K}_t] \in [K_t] = \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{Bc^4}{E_b I} [k] \right)$$

$$\text{Model elastičnog pp: } [\underline{K}_t] \in [K_t] = \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{c^4}{E_b I} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} [f]^{-1} \right)$$

Ako je konstrukcija kruto vezana za temeljni nosač (uklještenje), elementi matrice fleksibilnosti se određuju pojedinačnim nanošenjem jediničnih generalisanih sila (sile i momenti) na nosač na deformabilnoj podlozi, na mestu oslonaca konstrukcije. Za zglobnu vezu konstrukcije i temeljnog nosača, elementi matrice fleksibilnosti se određuju pojedinačnim nanošenjem samo jediničnih sila. U oba slučaja, zbog velike aksijalne krutosti temeljnog nosača, uticaj horizontalnih sila na deformaciju je zanemarljiv, pa se smatra da su oslonci konstrukcije horizontalno nepomerljivi.

Dobijena generalisana pomeranja oslonačkih tačaka predstavljaju elemente matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i podloge. Treba napomenuti, da se zbog nesavršene diskretizacije opterećenja u čvorne tačke nosača, javlja mala nesimetrija matrice fleksibilnosti, što ne utiče bitno na rezultat proračuna. Da bi greška bila manja, treba težiti da se čvorne

tačke poklope sa oslonačkim tačkama. Potpuno poklapanje tačaka se može postići podelom nosača na velik broj čvornih tačaka (50,100 ili više).

Za razliku od MKR, kod MKE (metoda konačnih elemenata) čvorne tačke ne moraju biti na istom rastojanju, mada se zbog tačnosti proračuna teži da razlika bude mala. Pošto se u MKE, u svakoj čvornoj zadovoljava kompatibilnost pomeranja do II-reda (jednakost ugiba i nagiba), tačnost proračuna je veća pri istom broju čvornih tačaka.

Broj nepoznatih sila i pomeranja u tački spoja gornje konstrukcije i temeljnog nosača, zavisi od vrste veze. Pošto se horizontalna pomeranja između oslonačkih tačaka mogu zanemariti, u zglobnoj vezi postoje 2 nepoznate (pomeranje i vertikalna sila), a u uklještenoj 4 nepoznate (pomeranje i obrtanje, vertikalna sila i moment). Ako je broj zglobova  $N_z$  a broj uklještenja  $N_u$ , ukupan broj nepoznatih je  $N=2N_z+4N_u$ .

Pošto je broj uslovnih jednačina (7.1) izvedenih za temeljnu gredu na deformabilnoj podlozi  $N/2$ , a broj nepoznatih  $2N$ , treba uvesti dopunskih  $N/2$  uslovnih jednačina na osnovu gornje konstrukcije.

U jednačini (7.1), pozitivne reakcije oslonaca na temeljnom nosaču, deluju u smeru ose  $+z$  i u smeru kretanja kazaljke na satu. Prema principu akcije i reakcije, pozitivne reakcije oslonaca za gornju konstrukciju, moraju delovati suprotno, odnosno u smeru ose  $-z$  i suprotno od smera kretanja kazaljke na satu.

Nasuprot silama, pozitivna pomeranja imaju isti smer i za temeljni nosaču i za gornju konstrukciju. Pozitivna pomeranja su smeru ose  $+z$ , a pozitivna obrtanja su u smeru kretanja kazaljke na satu.

Vodeći računa o pozitivnim smerovima sila i pomeranja,  $N/2$  dopunskih uslovnih jednačina između oslonačkih sila i pomeranja oslonačkih tačaka gornje konstrukcije glasi:

$$\{\underline{R}\} = \{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] \{\underline{U}\} \quad (9.2)$$

gde je:  $[\underline{K}_k]$  = matrica krutosti konstrukcije u oslonačkim tačkama  
 $\{\underline{R}_o\}$  = generalisane reakcije nepomerljivih oslonaca konstrukcije

Smenom (9.2) u (9.1), dobija se uslovna jednačina (9.3) po nepoznatim pomeranjima oslonačkih tačaka :

$$\begin{aligned} \{\underline{U}\} &= [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}\} = [\underline{K}_t]^{-1} (\{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] \{\underline{U}\}) \\ &([\underline{I}] + [\underline{K}_t])^{-1} [\underline{K}_k] \{\underline{U}\} = [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}_o\} / [\underline{K}_t] \\ ([\underline{K}_t] + [\underline{K}_k]) \{\underline{U}\} &= \{\underline{R}_o\}, \quad [\underline{K}] = [\underline{K}_t] + [\underline{K}_k] \Rightarrow \{\underline{U}\} = [\underline{K}]^{-1} \{\underline{R}_o\} \end{aligned} \quad (9.3)$$

U gornjoj jednačini, sa  $[K]$  je označena ukupna matrica krutosti temeljnog nosača i konstrukcije za oslonačke tačke konstrukcije. Eliminacijom nepoznatih pomeranja, uslovna jednačina se može izraziti i preko nepoznatih oslonačkih reakcija (9.4):

$$\begin{aligned}\{\underline{U}\} &= [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}\} \\ \{\underline{R}\} &= \{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] \{\underline{U}\} = \{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}\} \\ ([I] + [\underline{K}_k] [\underline{E}]) \{\underline{R}\} &= \{\underline{R}_o\} \quad \Rightarrow \quad \{\underline{R}\} = ([I] + [\underline{K}_k] [\underline{E}])^{-1} \{\underline{R}_o\}\end{aligned}\tag{9.4}$$

## 9.2 Iterativna metoda proračuna interakcije

Iterativna metoda proračuna interakcije vrši se metodom uzastupne zamene. Prvo se u 1-iteraciji odrede reakcije nepomerljivih oslonaca  $\{\underline{R}_o\}$ . Dobijene reakcije oslonaca  $\{\underline{R}_o\} = \{\underline{R}\}_1$  iz 1-iteracije se zatim nanesu na temeljnu nosač i odrede se pomeranja oslonačkih tačaka  $\{\underline{U}\}_1$  u 1-iteraciji.

U 2-iteraciji, osim osim opterećenja, na konstrukciju se nanesu i sleganja oslonaca iz 1-iteracije i odrede se nove reakcije oslonaca  $\{\underline{R}\}_2$ . Dobijene reakcije se zatim nanesu na temeljni nosač i odrede se nova pomeranja oslonačkih tačaka  $\{\underline{U}\}_2$  u 2-iteraciji. Simbolično, iterativni postupak se može prikazati sledećim jednačinama:

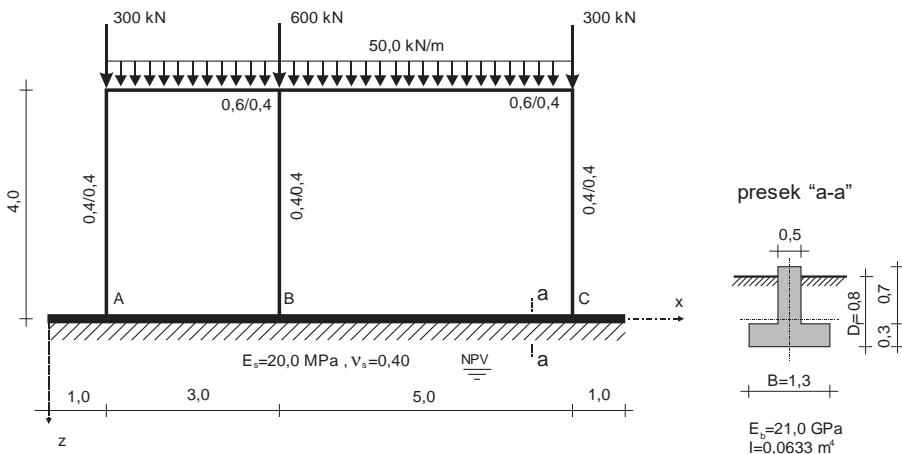
$$\begin{array}{lll} \{\underline{U}\}_1 = [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}_o\} & \rightarrow & \{\underline{R}\}_2 = \{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] \{\underline{U}\}_1 \\ \{\underline{U}\}_2 = [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}\}_2 & \rightarrow & \{\underline{R}\}_3 = \{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] \{\underline{U}\}_2 \\ \hline & & \\ \{\underline{U}\}_m = [\underline{K}_t]^{-1} \{\underline{R}\}_m & \rightarrow & \{\underline{R}\}_{m+1} = \{\underline{R}_o\} - [\underline{K}_k] \{\underline{U}\}_m \end{array}$$

Iterativni postupak se ponavlja dok apsolutna razlika norme vektora reakcije oslonca u dve uzastopne iteracije ne bude veća od npr. 0.01, odnosno matematički:

$$\left| \Delta \|\underline{R}_m\| \right| = \left| \|\underline{R}_m\| - \|\underline{R}_{m-1}\| \right| = \left| \sqrt{\sum_i \underline{R}_{i,m}^2} - \sqrt{\sum_i \underline{R}_{i,m-1}^2} \right| \leq 0.01, \quad (kN, kNm)\tag{9.5}$$

## BROJNI PRIMER – 9.1

Na slici 9.1 je prikazan statički sistem konstrukcije sa opterećenjem, koja je oslonjena na temeljni nosač na linearno elastičnoj podlozi. Matrica krutosti oslonačkih tačaka konstrukcije je prikazana matricom  $[K_k]$ , a reakcije nepomerljivih oslonaca vektorom  $\{R_0\}$ . Zbog velike aksijalne krutosti temeljnog nosača, zanemariti uticaj horizontalne komponente reakcije oslonca na deformaciju (promenu rastojanja oslonaca). Matrica krutosti konstrukcije je određena u odnosu na pozitivna pomeranja nosača!



Slika 9.1 Ram kruto vezan za temeljni nosač koji leži na elastičnoj podlozi

Matrica je dimenzija  $6 \times 6$ , i obuhvata vertikalne reakcije oslonaca:  $R_1$  u tački A,  $R_3$  u tački B i  $R_5$  u tački C i reakcije uklještenja:  $R_2$  u tački A,  $R_4$  u tački B i  $R_6$  u tački C, usled jediničnih pomeranja oslonačkih veza ( $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ ). Elementi matrice su dati u jedinicama kN, m i rad.

$$[K_k] = \begin{vmatrix} -1.615E+4 & 2.544E+3 & 2.418E+4 & -1.896E+3 & -8.026E+3 & -8.983E+3 \\ 2.544E+3 & -4.977E+4 & -7.311E+3 & 1.569E+4 & 4.767E+3 & 1.487E+4 \\ 2.418E+4 & -7.311E+3 & -3.794E+4 & 5.187E+1 & 1.367E+4 & 1.100E+4 \\ -1.896E+3 & 1.569E+4 & 5.187E+1 & -4.558E+4 & 1.844E+3 & 1.498E+4 \\ -8.026E+3 & 4.767E+3 & 1.367E+4 & 1.844E+3 & -5.734E+3 & -2.020E+3 \\ -8.983E+3 & 1.100E+4 & 1.100E+4 & 1.498E+4 & -2.020E+3 & -4.670E+4 \end{vmatrix} \quad \{R_0\} = \begin{vmatrix} 354.42 \\ -8.21 \\ 832.26 \\ -11.18 \\ 413.32 \\ 16.03 \end{vmatrix}$$

Potrebno je direktnom metodom proračuna interakcije :

- Izračunati reakcije oslonaca i sleganja oslonačkih tačaka gornje konstrukcije usled interakcije gornje konstrukcije, temeljnog nosača i elastične podloge.
- Izračunati i nacrtati dijagram sleganja i presečnih sila duž temeljnog nosača, sa i bez interakcije gornje konstrukcije, temeljnog nosača i podloge.
- Ponoviti proračun pod tačkama a) i b), za uvećanu krutost temeljnog nosača na savijanje koji iznosi  $EI_b = 1329.03 \text{ MNm}^2$ . Dati komentar za rezultate.

Nakon proračuna oslonačkih sila direktnom metodom, odrediti oslonačke reakcije i iterativnom metodom i dati grafički prikaz reakcija oslonaca tokom iteracije.

### **Rešenje:**

Temeljni nosač je podeljen na  $n=10$  jednakih delova, i čvorne tačke temeljnog nosača se poklapaju sa oslonačkim tačkama konstrukcije. Elementi matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla, odrediće se na osnovu pomeranja koja su izazvana jediničnim generalisanim silama na mestu i u pravcu oslonaca. U pravcu tačkastog oslonca se postavlja jedinična sila, a u pravcu uklještenja jedinični spreg sila.

Oslonačke reakcije i pomeranja su numerisana na sledeći način: u tački A reakcije su  $R_1$  i  $R_2$  a pomeranja  $U_1$  i  $U_2$ , u tački B reakcije su  $R_3$  i  $R_4$  a pomeranja  $U_3$  i  $U_4$ , a u tački C reakcije su  $R_5$  i  $R_6$  a pomeranja  $U_5$  i  $U_6$ . Neparni indeksi označavaju silu i pomeranje a parni indeksi moment savijanja i obrtanje.

Tokom proračuna se koristi sledeća konvencija za **pozitivan predznak pomeranja** na temeljnog nosaču i na gornjoj konstrukciji:

- + smer vertikalnog pomeranja je u smeru +z ose,
- + smer obrtanja/nagiba je u smeru kretanja kazaljke na satu,

Koristi se sledeća konvencija za **pozitivan predznak sile na temeljnog nosaču**:

- + smer vertikalne reakcije je u smeru +z ose,
- + smer momenta uklještenja je u smeru kretanja kazaljke na satu,

Prema principu akcije i reakcije, **pozitivan predznak sile na gornjoj konstrukciji** je:

- + smer vertikalne reakcije je u smeru -z ose,
- + moment uklještenja je u smeru suprotno od kretanja kazaljke na satu,

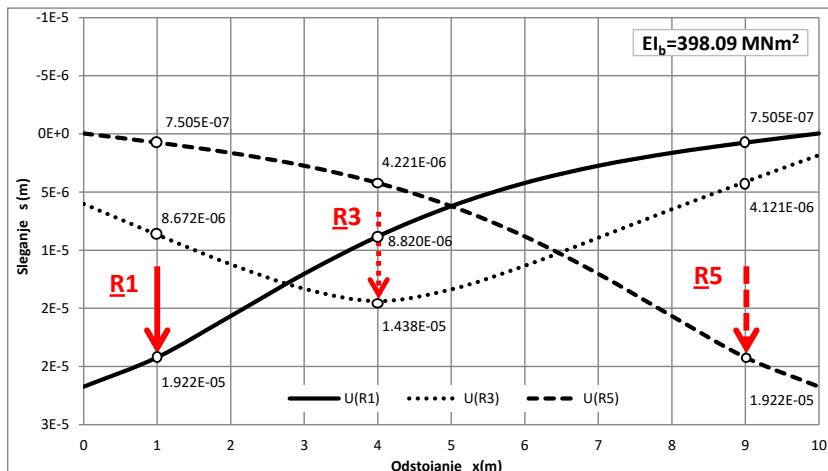
Da bi odredili elemente u prvoj koloni matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla (podloge), temeljni nosač treba opteretiti jediničnom vertikalnom silom  $R_1=1$  u tački A, u pravcu oslonca 1. Vertikalna pomeranja i obrtanja u oslonačkim tačkama A, B i C usled nanetog opterećenja, pretstavljaju elemente 1 - kolone matrice fleksibilnosti.

Da bi odredili elemente u drugoj koloni matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla (podloge), temeljni nosač treba opteretiti jediničnim momentom  $R_2=1$  u tački A, u pravcu oslonca 2. Vertikalna pomeranja i obrtanja u oslonačkim tačkama A, B i C usled nanetog opterećenja, pretstavljaju elemente 2 - kolone matrice fleksibilnosti.

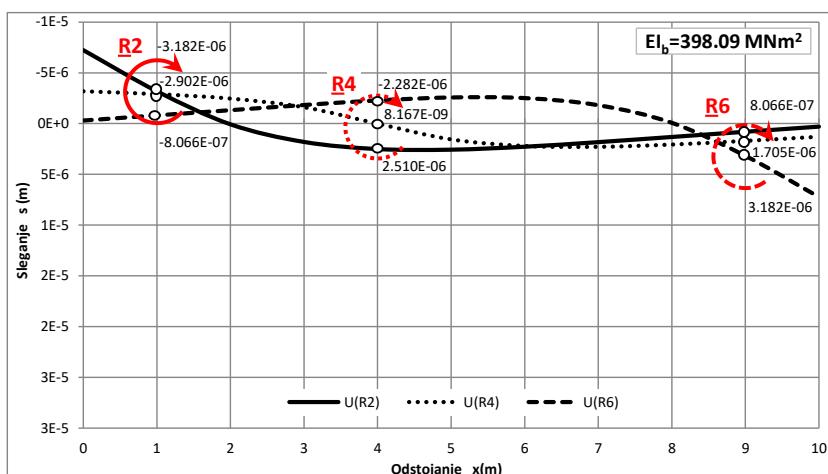
Na sličan način se određuju elementi matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla (podloge) u 3, 4, 5 i 6 - koloni.

Na slici 9.2a su prikazana sleganja oslonaca usled jediničnih sila, a na 9.2b sleganja oslonaca usled jediničnih momenata u osloncima. Na dijagramima su date i veličine sleganja u jedinicama m/kN i m/kNm.

Treba napomenuti, da usled greške pri diskretizaciji opterećenja, koja je neophodna, elementi matrice fleksibilnosti nisu potpuno simetrični. Npr. (Slika 9.2a), sleganje oslonca 3 usled jedinične sile u osloncu 1, iznosi  $U_{31}=8.820 \cdot 10^{-6}$ m, i trebalo bi prema Maxwell-ovom stavu biti jednak sleganju oslonca 1 usled jedinične sile na osloncu 3, koje iznosi  $U_{13}=8.672 \cdot 10^{-6}$ m. Međutim to nije slučaj, a relativna greška je oko 1.7%.

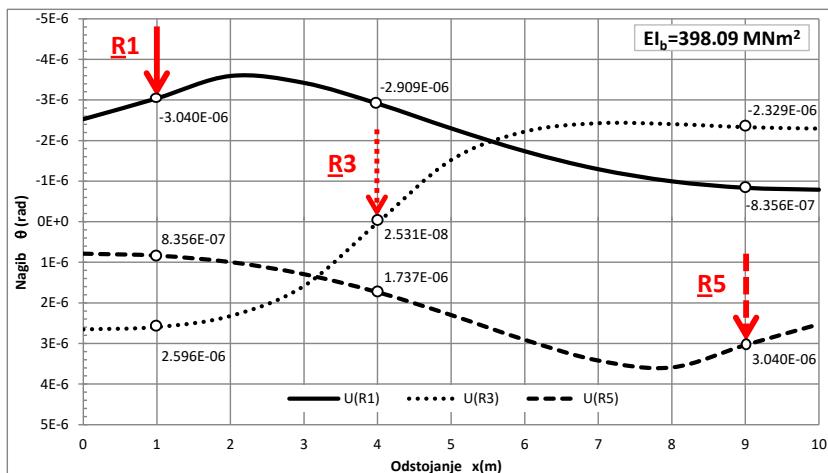


Slika 9.2a Vertikalna pomeranja oslonaca usled jediničnih vertikalnih sila

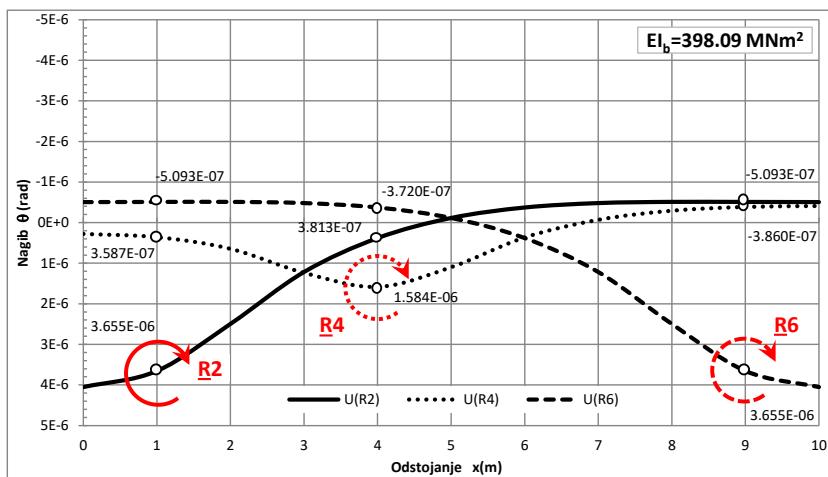


Slika 9.2b Vertikalna pomeranja oslonaca usled jediničnih momenata

Na slici 9.2c su prikazana obrtanja oslonaca usled jediničnih sila, a na 9.2d obrtanja oslonaca usled jediničnih momenata u osloncima. Na dijagramima su date i veličine obrtanja u jedinicama rad/kN i rad/kNm<sup>2</sup>.



Slika 9.2c Obrtanja oslonaca usled jediničnih vertikalnih sila



Slika 9.2d Obrtanja oslonaca usled jediničnih momenata

Kao i kod pomeranja, usled greške pri diskretizaciji opterećenja, elementi matrice fleksibilnosti nisu potpuno simetrični.

Na osnovu pomeranja i obrtanja oslonaca usled jediničnih sila (slika 9.2a-d), formirana je matrica fleksibilnosti temeljnog nosača i podloge, koja glasi:

$$[E_t] = \begin{vmatrix} 1.922E-5 & -3.182E-6 & 8.672E-6 & -2.902E-6 & 7.505E-7 & -8.066E-7 \\ -3.040E-6 & 3.655E-6 & 2.596E-6 & 3.587E-7 & 8.356E-7 & -5.093E-7 \\ 8.820E-6 & 2.510E-6 & 1.438E-5 & 8.167E-9 & 4.221E-6 & -2.282E-6 \\ -2.909E-6 & 3.813E-7 & 2.531E-8 & 1.584E-6 & 1.737E-6 & -3.720E-7 \\ 7.505E-7 & 8.066E-7 & 4.121E-6 & 1.705E-6 & 1.922E-5 & 3.182E-6 \\ -8.356E-7 & -5.093E-7 & -2.329E-6 & -3.860E-7 & 3.040E-6 & 3.655E-6 \end{vmatrix}$$

Inverzijom matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i podloge-tla, dobija se matrica krutosti čiji članovi, u jedinicama kN, m, kNm i rad, glase:

$$[K_t] = \begin{vmatrix} 3.032E+5 & 3.864E+5 & -2.355E+5 & 5.171E+5 & -3.228E+4 & 5.449E+4 \\ 3.834E+5 & 8.104E+5 & -3.600E+5 & 5.692E+5 & -3.184E+4 & 5.845E+4 \\ -2.351E+5 & -3.602E+5 & 2.952E+5 & -3.081E+5 & -2.342E+4 & 7.124E+4 \\ 5.164E+5 & 5.692E+5 & -3.081E+5 & 1.736E+6 & -1.881E+5 & 3.414E+5 \\ -3.232E+4 & -3.205E+4 & -2.344E+4 & -1.885E+5 & 9.750E+4 & -1.303E+5 \\ 5.432E+4 & 5.848E+4 & 7.109E+4 & 3.412E+5 & -1.277E+5 & 4.840E+5 \end{vmatrix}$$

Matrica krutosti  $[K]$  gornje konstrukcije, temeljnog nosača i podloge je zbir matrice krutosti  $[K_k]$  gornje konstrukcije i matrice krutosti  $[K_t]$  temeljnog nosača i podloge.

$$[K] = \begin{vmatrix} 2.870E+5 & 3.890E+5 & -2.113E+5 & 5.152E+5 & -4.031E+4 & 4.551E+4 \\ 3.859E+5 & 7.606E+5 & -3.673E+5 & 5.849E+5 & -2.707E+4 & 7.332E+4 \\ -2.109E+5 & -3.675E+5 & 2.573E+5 & -3.081E+5 & -9.746E+3 & 8.225E+4 \\ 5.145E+5 & 5.849E+5 & -3.080E+5 & 1.690E+6 & -1.863E+5 & 3.563E+5 \\ -4.035E+4 & -2.728E+4 & -9.771E+3 & -1.866E+5 & 9.176E+4 & -1.323E+5 \\ 4.533E+4 & 6.948E+4 & 8.209E+4 & 3.562E+5 & -1.297E+5 & 4.373E+5 \end{vmatrix}$$

Temeljni nosač i podloga imaju znatno veću krutost od gornje konstrukcije. Kao mera krutosti, izračunaće se norma matrica, prema sledećem:

$$\|K_k\| = \sqrt{\sum K_{k,ij}^2} = 963445, \quad \|K_t\| = \sqrt{\sum K_{t,ij}^2} = 25485937, \quad \frac{\|K_t\|}{\|K_k\|} = 26.5$$

Na osnovu normi matrica krutosti, može se zaključiti da je krutost gornje konstrukcije znatno manja, tačnije 26.5 puta manja od krutosti temeljnog nosača i podloge.

Na osnovu krutosti konstrukcije, temeljnog nosača i podloge i reakcija nepomerljivih oslonaca konstrukcije, mogu se odrediti pomeranja i reakcije oslonaca:

$$\{U\} = [K]^{-1} \{R_o\}$$

$$\{R\} = ([I] + [K_k][E_t])^{-1} \{R_o\}$$

$$\{\underline{U}\} = \begin{Bmatrix} 11.31 \\ 5.47 \\ 22.82 \\ 0.68 \\ 8.82 \\ -4.23 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m, rad)} , \quad \{\underline{R}\} = \begin{Bmatrix} 5.601 \\ 412.031 \\ 1390.343 \\ 1.343 \\ 206.905 \\ -383.293 \end{Bmatrix} \text{ (kN, kNm)}$$

Zbir vertikalnih reakcija oslonaca iznosi 1602.849, što je relativna greška od 0.18%.

Ako se povećaju dimenzije temeljnog nosača, tako da mu krutost na savijanje bude  $EI_b=1329.3 \text{ MNm}^2$ , promeniće se sleganja i reakcije oslonaca gornje konstrukcije pri interakciji. Matrica krutosti temeljnog nosača i podloge usled povećanja krutosti temeljnog nosača, daje se bez izvođenja:

$$[\underline{K}_t] = \begin{vmatrix} 9.317E+5 & 1.305E+6 & -7.894E+5 & 1.723E+6 & -1.066E+5 & 1.866E+5 \\ 1.302E+6 & 2.535E+6 & -1.199E+6 & 1.856E+6 & -1.111E+5 & 1.994E+5 \\ -7.890E+5 & -1.199E+6 & 9.007E+5 & -1.048E+6 & -7.467E+4 & 2.451E+5 \\ 1.723E+6 & 1.856E+6 & -1.048E+6 & 5.569E+6 & -6.535E+5 & 1.169E+6 \\ -1.066E+5 & -1.113E+5 & -7.469E+4 & -6.539E+5 & 2.236E+5 & -4.366E+5 \\ 1.864E+5 & 1.994E+5 & 2.450E+5 & 1.169E+6 & -4.340E+5 & 1.442E+6 \end{vmatrix}$$

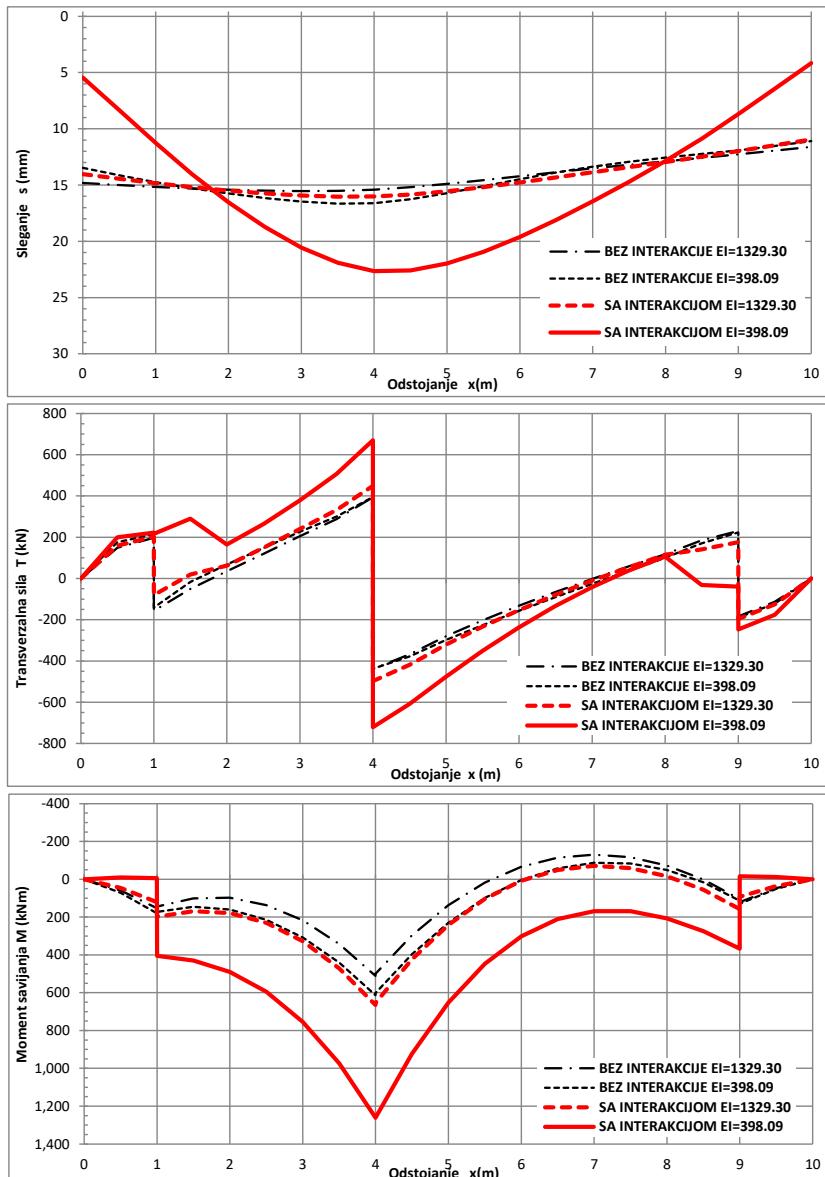
Norma matrice krutosti temeljnog nosača i podloge je  $\|\underline{K}_t\|=8251755.1$ , što je 85.6 puta veće od norme matrice krutosti gornje konstrukcije. Povećanje matrice krutosti temeljnog nosača i podloge, odgovara povećanju krutosti na savijanje, ili:

$$\frac{\|\underline{K}_t\|_1}{\|\underline{K}_t\|_2} = \frac{(E_b I)_1}{(E_b I)_2} \Rightarrow \frac{8,251,755.1}{2,548,593.7} = 3.24 \approx \frac{1329.30}{398.09} = 3.34$$

Sleganje i reakcije oslonaca za povećanu krutost temeljnog nosača na savijanje od  $EI_b=1329.3 \text{ MNm}^2$  iznose:

$$\{\underline{U}\} = \begin{Bmatrix} 14.45 \\ 0.88 \\ 15.98 \\ -0.15 \\ 11.79 \\ -1.08 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m, rad)} , \quad \{\underline{R}\} = \begin{Bmatrix} 283.924 \\ 77.644 \\ 946.178 \\ -10.602 \\ 372.398 \\ -64.069 \end{Bmatrix} \text{ (kN, kNm)}$$

Razlika u pomeranju i reakciji oslonaca usled promene krutosti temeljnog nosača je očigledna. Rezultati proračuna presečnih sila i sleganja duž nosača, dati su na Sl. 9.3.



Slika 9.3 Sleganje i presečne sile duž temeljnog nosača

Na mestima dejstva transverzalne sile i momenta savijanja, u dijagramu je prekid funkcije. Prema MKR, za grubu diskretizaciju se ne mogu dobiti tačne vrednosti, pa je potrebno izvršiti korekciju prema sledećim izrazima:

$$T_l + T_d = T$$

$$M_l + M_d = 2M_{MKR}$$

$$M_d - M_l = M_{MKR}$$

$$T_l - T_d = R$$

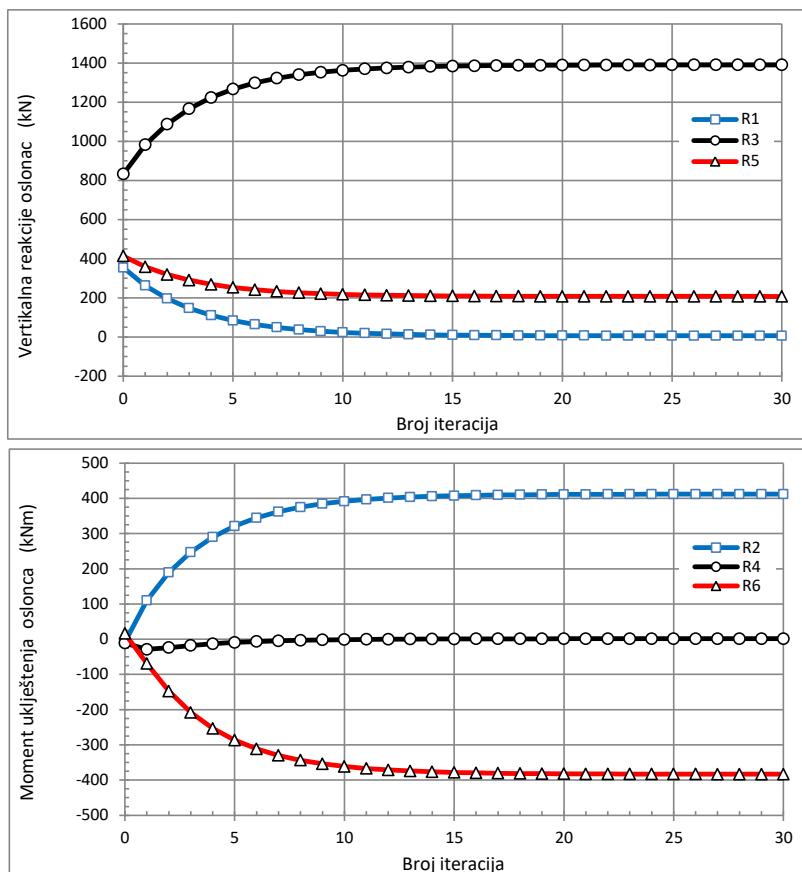
Nakon proračuna pomeranja i reakcija oslonaca direktnom metodom interakcije, izvršen je proračun i iterativnom metodom. Konvergencija je spora, a nakon 10, 20 i 30 iteracija, dobijene su sledeće veličine reakcija oslonaca i razlike normi vektora:

$$\underline{R}_{10} = \begin{Bmatrix} 23.153 \\ 391.563 \\ 1362.435 \\ -1.056 \\ 217.241 \\ -361.519 \end{Bmatrix}, \quad \underline{R}_{20} = \begin{Bmatrix} 6.492 \\ 410.991 \\ 1389.291 \\ 1.222 \\ 207.430 \\ -382.187 \end{Bmatrix}, \quad \underline{R}_{30} = \begin{Bmatrix} 5.646 \\ 411.978 \\ 1390.271 \\ 1.337 \\ 206.932 \\ -383.237 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta \|R_{10}\| = 11.99$$

$$\Delta \|R_{20}\| = 0.62$$

$$\Delta \|R_{30}\| = 0.03$$



Slika 9.4 Reakcije oslonaca u funkciji broja iteracija

## PRORAČUN SAVITLJIVOZ IDA U VINKLER-OVOJ SREDINI

Numerički postupak za proračun temeljnog nosača na deformabilnoj podlozi, može se primeniti i za proračun pomeranja zaštitnog zida – pribroja u tlu. Najprostija aproksimacija deformabilne sredine za potrebe analize pomeranja i presečnih sila u zidu je Vinklerov model. Kao i kod temeljnih nosača, osnovna poteškoća u primeni je pouzdana procena (horizontalnog) modula reakcije  $k_h$  ( $\text{MN/m}^3$ ), koji uglavnom zavisi od vrste tla, vlažnosti, zbijenosti i dimenzija opterećene površine.

Kod prekonsolidovanih (OC) glina, modul reakcije je približno konstantnim po dubini i približno jednak vertikalnom modulu reakcije tla (Terzaghi, 1955):

$$k_h = k_{hI} (0.305/D) \quad (10.1a)$$

Za razliku od OC-glina, kod peska i NC-glina, modul reakcije se poput deformabilnosti i čvrstoće menja približno linearno po dubini (Terzaghi, 1955):

$$k_h = l_h (z/D) \quad (10.1b)$$

gde su:  $k_{hI}$  = hor. modul reakcije tvrde gline na 0.3m od dna iskopa ( $\text{MN/m}^3$ )

$D$  = dubina dna zaštitnog zida – pribroja, merena od dna iskopa (m)

$l_h$  = konstanta horizontalnog modula reakcije peska/meke gline ( $\text{MN/m}^3$ )

$z$  = dubina merena od dna iskopa (m)

Za meke gline, konstanta modula reakcije tla  $l_h$  je između 0.3–0.5  $\text{MN/m}^3$  (Davisson and Prakash, 1963).

Za peskove, Terzaghi je predložio konstantu  $l_h$  u funkciji zbijenosti i vlažnosti peska. Na osnovu studije horizontalnog pomeranja izvedenih pribroja i modelskih ispitivanja utvrđeno je (Reese, Cox, Koop, 1974) da su predložene vrednosti konzervativne, pa se u praksi preporučuje (Scott, 1981) usvajanje većih vrednosti. U tabeli 10.1 su date vrednosti konstante  $l_h$  za pesak, po Terzaghi-u i udvostručene vrednosti\*, za savitljiv pribor koji je razuprt ili ankerisan u nivou glave i slobodno oslonjen u tlu.

Stanje zbijenosti peska	Rastresit	Srednje zbijen	Zbijen
Relativna zbijenost Dr (%)	15-35	35-65	65-85
N iz SPT-a ( $q_c$ u $\text{MPa}$ iz CPT-a)	4-10 (2.5-7.5)	11-30 (7.5-15)	31-50 (15-25)
Pesak, suv ili vlažan	1.0 (*1.6)	2.8 (*5.0)	7.0 (*12.6)
Pesak, potopljen	0.6 (*1.0)	1.7 (*3.2)	4.2 (*8.2)

**Tabela 10.1** Konstanta hor. modula reakcije peska  $l_h$  ( $\text{MN/m}^3$ ) po Terzaghi-u, i (preporučene vrednosti)

Za nerazuprte (konzolne) pribore, uklještene u tlu, umesto konstante  $l_h$  koja daje vrlo konzervativne rezultate, treba koristiti konstantu  $m_h$  prema Rowe-u (1956).

$$k_h = m_h (z/D) \quad (10.2)$$

U tabeli 10.2 su date vrednosti  $m_h$  za savitljiv i krut konzolni priboj u suvom pesku, za relativno pomeranje glave pribroja od  $u/D \approx 0.1\%$  za zbijen i  $u/D \approx 0.5\%$  za rastresit pesak. Rowe nije naveo vrednosti  $m_h$  za potopljen pesak, ali se iskustveno može usvojiti da iznose oko 2/3 od vrednosti za suv pesak.

Stanje zbijenosti suvog peska	Rastresit	Srednje zbijen	Zbijen
N iz SPT-a (qc u MPa iz CPT-a)	4-10 (2.5-7.5)	11-30 (7.5-15)	31-50 (15-25)
Savitljiv zid	8.8	31.4	125.0
Krut zid	2.4	(11.0)	63.0

Tabela 10.2 Konstanta hor. modula reakcije za suv pesak  $m_h$  (MN/m<sup>3</sup>) po Rowe-u

Za meke gline, konstanta modula reakcije tla se kreće između  $I_h = 0.3 - 0.5$  MN/m<sup>3</sup> (Davisson and Prakash, 1963), dok se kod tvrdih gline konzervativno može usvojiti da je horizontalni modul reakcije tla približno jednak vertikalnom.

Osim Terzaglia, velik broj istraživača se bavio problemom određivanja horizontalnog modula reakcije tla, za potporne konstrukcije i horizontalno opterećene šipe, kao npr Menard et all. (1964), Balay (1984), Chadeisson and Monnet (1994), Schmitt (1995), Monaco and Marchetti (2004) i dr. Menard, predlaže modul  $k_h$  duž konzolnog zida, na osnovu rezultata terenskih ispitivanja pomoću presiometra (PMT) :

$$k_h = \frac{E_M}{0.5\alpha \cdot a + 0.13(9a)^\alpha}$$

gde je:  $a$  = dužina konzolnog zida na kojoj vlada pasivni pritisak  $\approx 2/3 D$   
 $E_M$ ,  $M_s$  = presiometarski modul ( $\approx \alpha \cdot M_s$ ), edometarski modul stišljivosti

Vrsta tla	Glina	Prašina	Pesak	Šljunak
Prekonsolidovano	1.00	0.66	0.50	0.33
Normalno konsolidovano	0.66	0.50	0.33	0.25
Nekonsolidovano	0.50	0.50	0.33	0.25

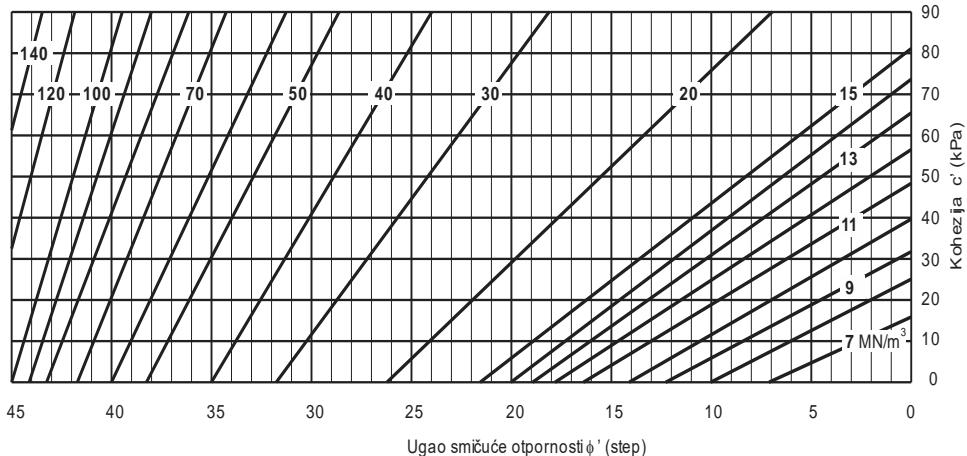
Tabela 10.3 Reološki koeficijent  $\alpha$  prema Menard-u

Chadeisson (1961) i Monnet (1994) predlažu korelaciju modula reakcije tla na osnovu parametara čvrstoće tla:

$$k_h = \left[ 20EI \left( \frac{K_p \gamma (1 - K_0/K_p)}{dr_0} \right)^4 \right]^{0.2} + A_p c' \frac{\tanh(c'/30)}{dr_0}$$

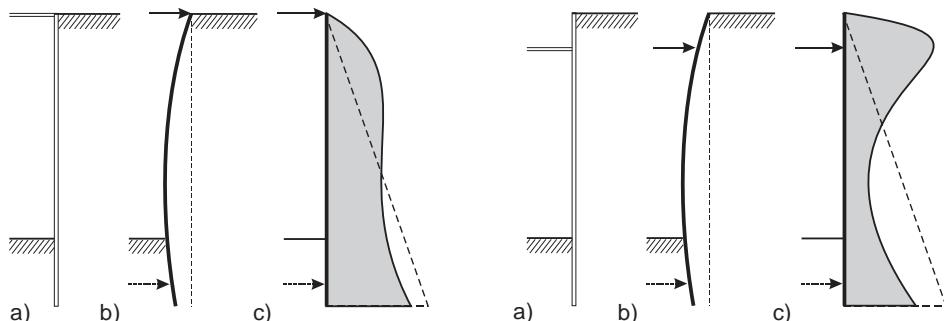
gde je:  $EI$  = fleksiona krutost zida (krutost na savijanje) u kNm<sup>2</sup>/m  
 $K_p, K_0$  = koeficijent pasivnog pritiska ( $\delta_p/\phi = 2/3$ ) i pritiska tla u mirovanju  
 $\gamma, dr_0$  = zapreminska težina tla u kN/m<sup>3</sup>, karakteristično pomeranje (0.015m)  
 $c', A_p$  = efektivna kohezija u kPa, koeficijent mobilizacije kohezije (1-15)

Koeficijent pasivnog pritiska tla se određuje prema metodi Caquot & Kerisel (1948), Sokolovski (1956), Lancellotta (2002) ili dr. Koeficijent  $A_p$  je opadajuća funkcija kohezije (približno:  $A_p \approx 90 \cdot c^{0.8}$ ). Za krutost na savijanje  $E_l = 850 \text{ MNm}^2/\text{m}$ , Chadeisson je za određivanje modula reakcije tla  $k_h$  u funkciji parametara čvrstoće tla  $c'$  i  $\phi'$ , predložio dijagram na slici 10.1.



Slika 10.1 Dijagram za određivanje modula reakcije tla  $k_h$  (Chadeisson, Monnet)

Metoda horizontalnog modula reakcije tla (Vinkler-ova metoda) omogućuje da se odredi pomeranje zaštitnog zida u analizi graničnog stanja upotrebljivosti (SLS), kao dopune proračuna po graničnom stanju nosivosti (ULS). Proračun prema graničnom stanju nosivosti tla, u rutinskoj praksi se vrši prema Evrokodu-7 (EC7). Nakon što se prema metodi graničnog stanja nosivosti, odredi potrebna dubina zaštitnog zida, dimenzije razupirača / ankera i dimenzije peprečnog preseka zida, vrši se kontrolni proračun bočnih pomeranja, zamenjujući tlo u pasivnoj zoni Vinklerovim modelom. Pritisak na zid se određuje samo za aktivnu stranu, prema teoriji zemljanih pritisaka (Rankin, Coulomb), uz odgovarajuću preraspodelu dijagrama pritiska u zavisnosti od položaja i broja razupirača.

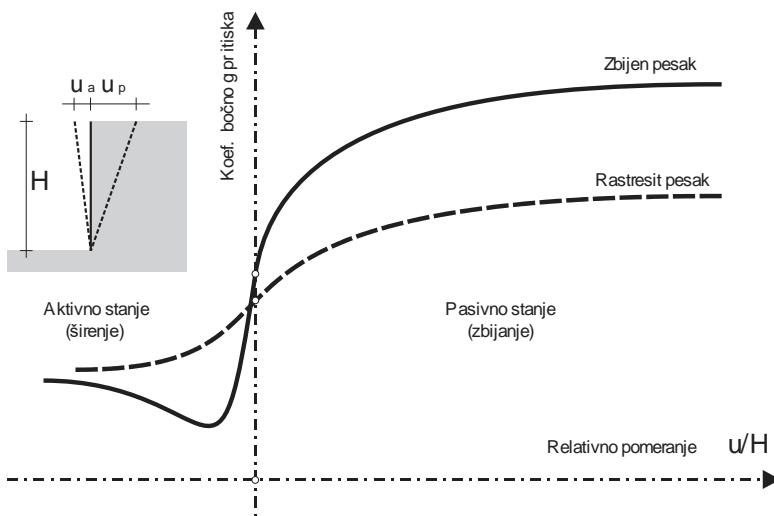


Slika 10.2 a) Presek kroz iskop, b) Deformacija zida, c) Raspodela pritiska tla

Modelska ispitivanja i terenska merenja su pokazala, da se raspodela pritisaka na savitljiv zid (Slika 10.2) sa jednim ili više razupirača, bitno razlikuje od Rankine-ove i Coulomb-ove raspodele za krut zid koji se pomera obrtanjem oko dna. Prisustvo razupirača ili sidra u nivou glave potporne konstrukcije, ograničava pomeranja usled čega pritisak u zoni razupirača raste a između razupirača i dna iskopa opada u odnosu na trougaonu raspodelu (ako je sloj homogen). Kvalitativan oblik dijagrama pritiska prikazan je na slici 10.2c. Preraspodela u odnosu na trougaoni dijagram, dovodi do povećanja sile u razupiraču i smanjenju momenta savijanja u polju između razupirača i dna iskopa.

U praksi se uticaj razupirača usvaja empirijski. Preraspodela dijagrama pritiska se može uzeti prema preporuci radne grupe za dokove, luke i plovne puteve (EAU-2004: Committee for Waterfront Structures ports and waterways) ili radne grupe za iskopavanja (EAB-2006: Committee for Excavations) ili dr. Na taj način se dobijaju veće sile u razupiračima i manji momenti savijanja između razupirača, što je u skladu sa rezultatima modelskih eksperimentalnih studija.

Pritisak tla zavisi od veličine i smera deformacije. Ako su u tlu bočne deformacije jednake nuli, tlo vrši pritisak na potpornu konstrukciju intenzitetom koji odgovara pritisku u stanju mirovanja. Usled pomeranja koja vrše zbijanje tla, pritisak na zid raste do granične vrednosti koja se naziva pasivni pritisak. Nasuprot tome, ako pomeranja izazivaju širenje tla, pritisak na zid opada do granične vrednosti koja se naziva aktivni pritisak. Između pasivnog i aktivnog pritiska postoji beskonačno mnogo vrednosti pritiska koje zavise od deformacije (Slika 10.3).



Slika 10.3 Kvalitativan dijagram pritiska na zid u funkciji pomeranja

Proračun pomeranja zaštitnog zida u tlu, prema metodi Vinklera, može se izvršiti MKR ili MKE. Proračunski model zaštitnog zida se dobija tako što se tlo u pasivnoj zoni, u čvornim tačkama zameni sistemom elastičnih opruga odgovarajuće krutosti (Slika 10.4).

U MKR, zidni nosač se po visini podeli na n jednakih delova, a opterećenje se zamenjuje ekvivalentnim čvornim silama (prema ranije opisanom postupku kod temeljnih nosača). Osa +z je usmerena od dna iskopa na dole, a osa +x i pozitivna pomeranja u(z) su usmerena ka iskopu odnosno u smeru aktivnog pritiska.

U čvornim tačkama iznad iskopa, krutost opruga je jednaka nuli. Na aktivnoj strani zida, po celoj dužini deluje pritisak tla (aktivni pritisak, pritisak u mirovanju ili preraspodeljeni pritisak prema EAB ili EAU), staticki ili dinamički pritisak podzemne vode. Uticaj razupirača ili ankera (sidra) se zamenjuje oprugom odgovarajuće krutosti. Rešenje se dobija na osnovu sledećih jednačina:

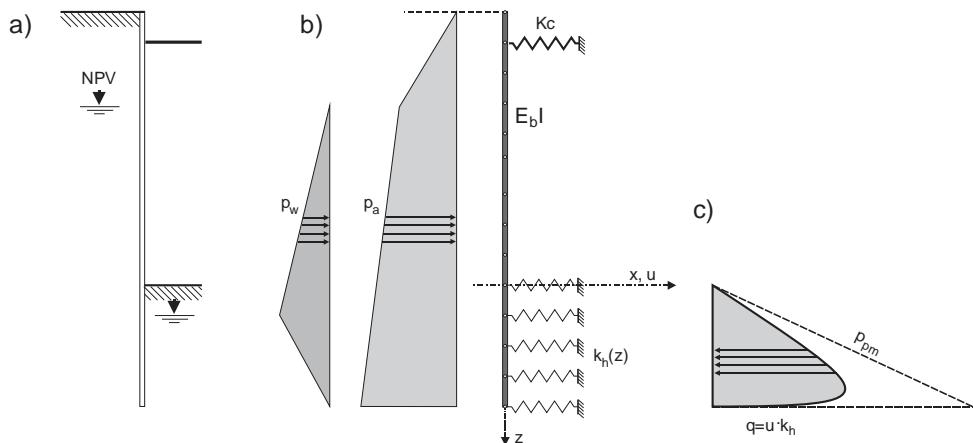
$$[K_t][u] = \{P\}, \quad [K_t] = \frac{E_b I}{c^3} \left( [D] + \frac{Bc^4}{E_b I} [k_h] \right), \quad \{P\} = c \{p\} \quad (10.2)$$

$$\{q\} = [k_h][u] \quad (10.3)$$

Pritisici u pasivnoj zoni, određeni na osnovu pomeranja i krutosti opruga, ne bi smeli prekoračiti mobilisani (dozvoljeni) pasivni otpor prema izrazu:

$$q(z) = u(z) \cdot k_h(z) \leq p_{pm}(z) = p_p(z)/F_{sp} \quad (10.4)$$

Ako se utvrdi da je pritisak u nekoj čvornoj tački veći od dozvoljenog, proračun treba ponoviti sa smanjenim modul reakcije tla u toj tački ili zamenom opruge dozvoljenom silom. Proračun se vrši u nekoliko iteracija, dok se u svim tačkama ne zadovolji uslov (10.4).

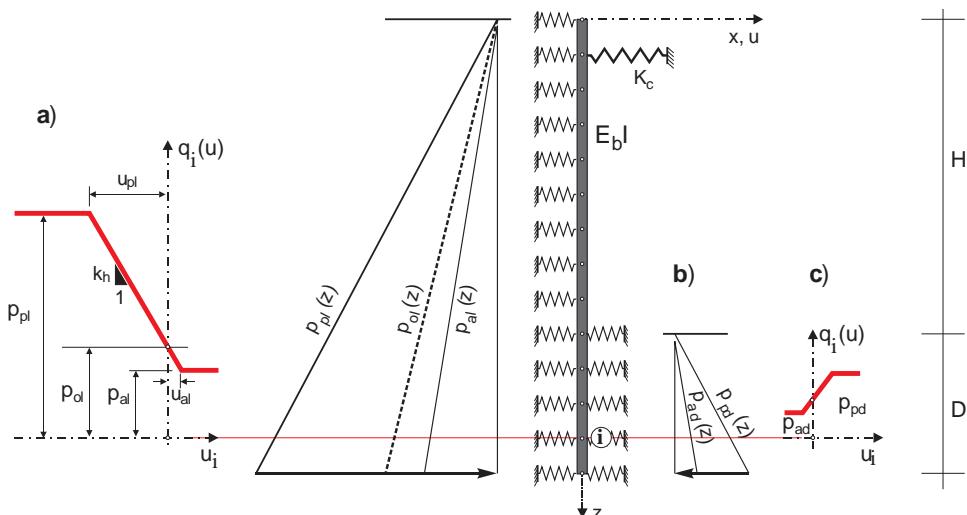


Slika 10.4 a) Presek kroz iskop, b) Proračunski model, c) Reaktivni ili pasivni pritisak

Prethodni postupak ne uzima u obzir pomenu aktivnog pritiska usled deformacije zida, pa se naziva metoda sa nezavisnim pritiskom.

Uticaj deformacije zida odnosno prisustva razupirača ili ankera, može se uvesti korišćenjem poluempijske metode prema EAU, EAB i sl.

Poboljšanje metode je predložio Haliburton (1968) uvodeći nelinearno deformabilne opruge sa obe strane zida, odnosno duž aktivne i pasivne strane (Slika 10.5). Opruge imaju krutost  $k_h$  i i konačnu čvrstoću koja je određena aktivnim i pasivnim pritiskom tla. Granično pomeranje za aktivni pritisak je  $u_a$ , za pasivni  $u_p$ , dok pomeranju  $u=0$  odgovara pritisak mirovanja  $p_0$ .



Slika 10.5 a) Funkcija  $q(u)$  za aktivnu stranu, b) Računski model, c) Funkcija  $q(u)$  za pasivnu stranu

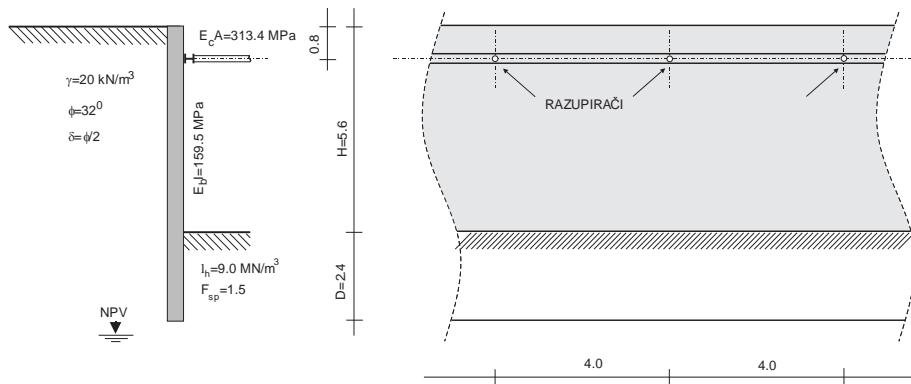
Na slici 10.5 je data kvalitativna funkcija opterećenja u tački i sa leve (a) i desne (c) strane zida. Pri pomeranju tačke i zida na desno ( $+u$ ), pritisak sa leve strane opada do  $p_{al}$  a sa desne strane raste do  $p_{pd}$ . Ako se zid pomera na levo ( $-u$ ), pritisak sa leve strane raste do  $p_{pl}$  a sa desne opada do  $p_{ad}$ . Rezultujući pritisak u tački je razlika pritisaka sa leve i desne strane zida. Proračun se vrši po fazama izvođenja, iterativno, dok se ne zadovolje uslovi ravnoteže i kompatibilnosti prema različitim funkcijama  $q(u)$ , sa obe strane zida u čvornim tačkama.

## BROJNI PRIMER – 10.1

Armirano betonska dijafragma (Slika 10.6), debljine  $d=0.45\text{m}$  i dužine  $L=8.0\text{ m}$ , razuprta je na  $0.8\text{m}$  ispod površine terena, na svakih  $4.0\text{m}$ , čeličnim razupiračem dužine  $5.0\text{m}$ . Spoljni prečnik razupirača je  $\varnothing 100\text{mm}$  a debljina zida  $5\text{mm}$ .

Iskop se vrši do  $H=1.60\text{ m}$ , nakon čega se postavlja razupirač i nastavlja sa kopanjem do  $H=5.60\text{ m}$ . Tlo je zbijen pesak ( $\phi'=32^\circ$ ,  $\gamma=20\text{kN/m}^3$ ,  $I_h=9.0\text{MN/m}^3$ ). Ugao trenja između zida i tla je  $\delta=\phi'/2$ . Podzemna voda je na dubini od  $9.0\text{m}$  od površine terena.

Potrebno je izračunati i nacrtati pomeranje, transverzalnu silu, moment savijanja i reaktivni pritisak duž dijafragme. Pesak aproksimirati Vinkler-ovim modelom. Proračun izvršiti MKR podelom nosača na  $n=10$  jednakih delova.



Slika 10.6 Presek i poduzni izgled zaštitnog zida od AB dijafragme

### Rešenje:

Aktivni pritisak tla na dijafragmu je određen prema Coulomb-u a pasivni pritisak prema Sokolovski-om. Pošto pritisci tla deluju na zid pod uglom trenja  $\delta$ , u proračunu se koristi horizontalna komponenta. Preraspodela (redistribucija) aktivnog pritiska nije izvršena. Na osnovu tabele (vidi Mehanika tla), horizontalne komponente koeficijenta pritiska su:

$$\phi = 32.0^\circ, \delta = 16.0^\circ \Rightarrow K_{ah} = 0.307, K_{ph,m} = K_{ph}/F_{sp} = 5.148/1.5 = 3.432$$

$$p_{a,max} = \gamma(H + D)K_{ah} = 20.0(5.6 + 2.4)0.307 = 49.17\text{kPa}$$

$$H = 1.6\text{m} (5.6\text{m}) \Rightarrow p_{pm,max} = \gamma D K_{ph,m} = 164.84\text{kPa} (439.30\text{kPa})$$

Na osnovu proračuna prema metodi graničnog stanja tla (ULS), za aktivni i pasivni pritisak po Rankine-u i za faktor sigurnosti pasivnog otpora od  $F_{sp}=1.5$ , potrebna računska dubina dijafragme ispod dna iskopa iznosi  $D_0 = 2.4\text{m}$ .

Krutost razupirača  $K_c$  se može odrediti na osnovu poprečnog preseka, modula elastičnosti i dužine razupirača. Razupirači su na rastojanju  $B_c = 4.0\text{m}$ .

Površinska krutost razupirača  $k_c$  zavisi od rastojanja čvornih tačaka  $c$  i rastojanja razupirača  $B_c$ . Pošto se proračun dijafragme vrši na širinu  $B=1.0\text{m}$ , u proračunu površinske krutosti, krutost razupirača sa  $B_c = 4.0\text{m}$  treba svesti na  $B=1.0\text{m}$ .

$$K_c = \frac{E_c A}{L_c} = \frac{313.4}{5.0} = 62.68 \text{ MN/m} , \quad k_c = \frac{K_c}{c B_c} = \frac{62.68}{0.8 \cdot 4.0} = 19.58 \text{ MN/m}^3$$

Vektor aktivnog pritiska tla  $\{p_a\}$  i horizontalni moduli reakcije tla  $\{k_h\}$  za dubinu iskopa od  $H=1.6\text{m}$  i  $H=5.6\text{m}$ , u funkciji dubine (mereno od površine terena), iznose:

$$\{p_a\} = \begin{cases} 0.00 \\ 4.92 \\ 9.83 \\ 14.75 \\ 19.67 \\ 24.58 \\ 29.50 \\ 34.42 \\ 39.33 \\ 44.25 \\ 49.168 \end{cases} \text{ kPa}, \quad \{k_h\}_{(1.6)} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.13 \\ 2.25 \\ 3.38 \\ 4.50 \\ 5.63 \\ 6.75 \\ 7.88 \\ 9.00 \end{cases} \text{ kN/m}^3, \quad \{k_h\}_{(5.6)} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.00 \\ 6.00 \\ 9.00 \end{cases} \text{ kN/m}^3$$

Elementi matrice krutosti zidnog nosača i tla i razupirača u ( $\text{MN/m}$ ) iznose:

$$z < 0 \Rightarrow K_{t,ii} = \frac{E_b I}{c^3} D_{ii} = 311.52 \cdot D_{ii}$$

$$z \geq 0 \Rightarrow K_{t,ii} = \frac{E_b I}{c^3} \left( D_{ii} + \frac{B c^4}{E_b I} k_{h,ii} \right) = 311.52 \left( D_{ii} + \frac{k_{h,i}}{389.40} \right)$$

$$i \neq j \Rightarrow K_{t,ij} = 3.339 \cdot 10^6 D_{ij}$$

Aktivni pritisak tla na konzolni deo zida (dubina  $H=1.6\text{m}$ ) je uzet u obzir samo do dubine iskopa, i prikazan je radi praćenja uticaja u dijafragmu kroz fazu iskopa.

Na osnovu prethodnih izraza, pregledan ispis elemenata matrice krutosti, za podelu AB dijafragme na  $n=10$  jednakih delova, za dubinu iskopa od  $H=1.60$ , glasi:

$$[K_t] = 311.52 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0029 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0058 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0087 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0116 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0144 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0173 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5.0202 & -2 \\ 2 & -4 & 2.0231 \end{bmatrix} MN/m$$

Elementi matrice krutosti, za uticaj razupirača i dubinu iskopa od H=5.60m, glase:

$$[K_t] = 311.52 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5.0503 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6.0077 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5.0154 & -2 \\ 2 & -4 & 2.0231 \end{bmatrix} MN/m$$

Vektor čvornih reakcija  $\{R\}$ , opterećenja  $\{p\}$  i sile  $\{P\}$ , za linearnu promenu opterećenja odnosno aktivnog pritiska  $\{p_a\}$  između čvornih tačaka, odrediće se preko sledećeg izraza:

$$R_i = \frac{c}{6} (p_{a,i-1} + 4p_{a,i} + p_{a,i+1}), \quad R_n = \frac{c}{6} (p_{a,n-1} + 2p_{a,n})$$

$$p_{i=0} = 2 \frac{R_0}{c}, \quad p_{i,(0 < i < n)} = \frac{R_i}{c}, \quad p_{i=n} = 2 \frac{R_n}{c}, \quad P_i = cp_i$$

U fazi-I, pritisak na konzolni zid se računa za aktivni pritisak koji deluje do dubine H=1.6m, nakon čega se pritisak usvaja da je jednak nuli.

Za fazu-II iskopa, pritisak na dijafragmu je računat po celoj visini ( $H+D=8.0m$ ), prema sledećim podacima:

$$\{R\} = \begin{bmatrix} 0.656 \\ 3.933 \\ 7.867 \\ 11.800 \\ 15.734 \\ 19.667 \\ 23.601 \\ 27.534 \\ 31.468 \\ 35.401 \\ 19.012 \end{bmatrix} kN, \quad \{p\} = \begin{bmatrix} 1.639 \\ 4.917 \\ 9.834 \\ 14.75 \\ 19.667 \\ 24.584 \\ 29.501 \\ 34.418 \\ 39.334 \\ 44.251 \\ 47.529 \end{bmatrix} kN/m, \quad \{P\} = \begin{bmatrix} 1.311 \\ 3.393 \\ 7.867 \\ 11.800 \\ 15.734 \\ 19.667 \\ 23.601 \\ 27.534 \\ 31.468 \\ 35.401 \\ 38.023 \end{bmatrix} kN$$

Rešenjem jednačine (8.2) se dobijaju horizontalna pomeranja čvornih tačaka  $u_i$  dok se na osnovu jednačine (8.3) dobijaju kontaktni napon  $q_i$  u čvornim tačkama duž pasivne zone, kao i sila u razupiraču. U jednačini (8.2), pošto se radi o ravanskoj deformaciji, širina dijafragme (upravno na poprečni presek) iznosi  $B=1.0m$ .

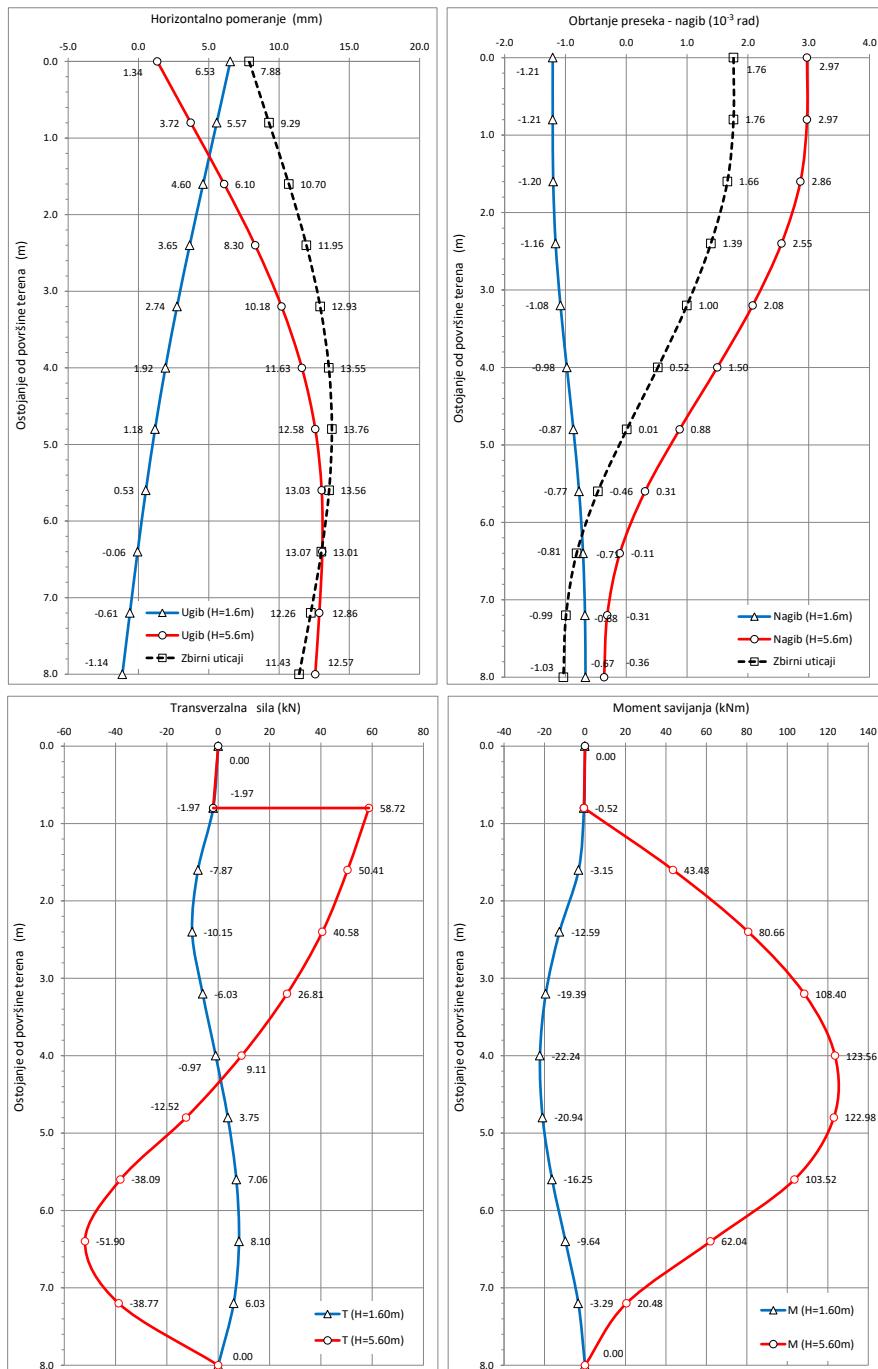
Rezultati proračuna za fazu-I i fazu-II su prikazani grafički. Na dijagramima su prikazani zbirni uticaji pomeranja, obrtanja preseka (nagib elastične linije) i reaktivnog opterećenja (Sl.a 8.6). Za dimenzionisanje preseka (Slika 8.7) su date envelope momenta savijanja i transverzalne sile, koje pokrivaju merodavne uticaje tokom izvođenja.

U fazi-I se vrši iskop do  $H=1.6m$  i zatim se na deformisanoj dijafragmu postavlja razupirač. Pomeranje na mestu razupirača je  $u_{rl}$ . U fazi-II se nastavlja iskop pod zaštitom razuprte dijafragme do  $H=5.6m$ . Zbog linearног modela proračuna, ukupna pomeranja su zbir iz obe faze. Sila u razupiraču zavisi od razlike pomeranja  $\Delta u_r$  odnosno pomeranja iz faze-II.

$$P_c = K_c \Delta u_r = K_c u_{rlII} = 62.68 \cdot 3.77 \cdot 10^{-3} = 0.236 MN$$

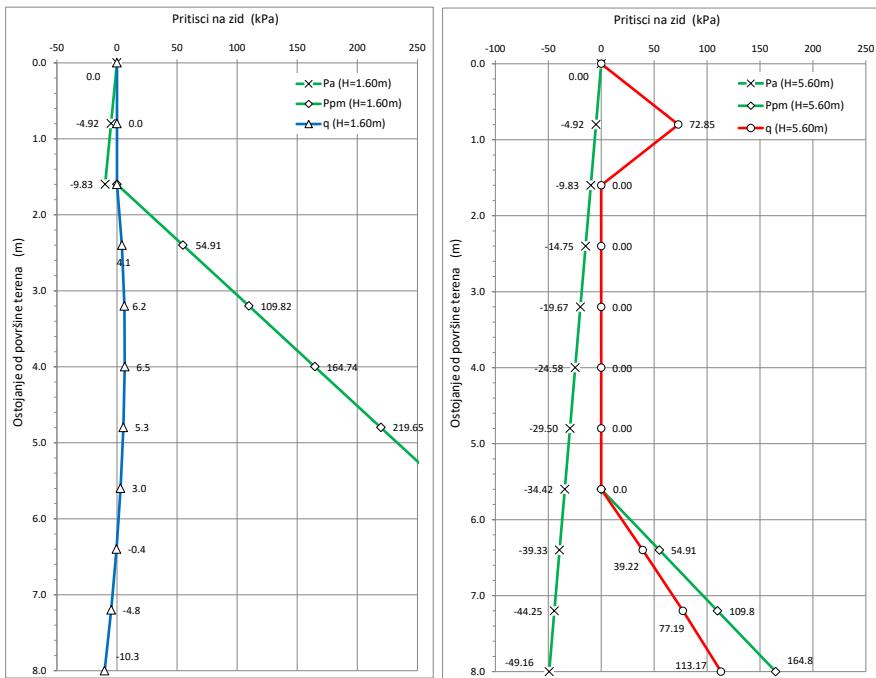
Alternativno, sila u razupiraču se može dobiti integracijom reaktivnog opterećenja u tački razupiranja. Površina integracije je proizvod čvornog rastojanja i rastojanja razupirača.

$$P_c = \frac{q_l 2c}{2} B_c = 73.84 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 4.0 = 0.236 MN$$



Slika 10.7

Rezultati proračuna: Pomeranje, obrtanje i anvelope presečnih sila



Slika 10.8 Pritisici na dijafragmu: prema Vinkleru, aktivni i pasivni pritisak

Na osnovu Slike 10.7, kontaktni napon pasivne zone za fazu-II je manje od mobilisanog pasivnog otpora  $p_{pm}$ . Računski faktor sigurnosti za pasivni otpor je:

$$\int_H^{H+D} q \ z \ dz = c \left( \frac{q_7}{2} + q_8 + q_9 + \frac{q_{10}}{2} \right) = 138.40 \text{ kN}$$

$$E_{ph} = \frac{1}{2} K_{ph} \gamma D^2 = \frac{1}{2} 5.148 \cdot 20.0 \cdot 2.4^2 = 296.52 \text{ kN}$$

$$F_{sp} = E_{ph} \sqrt{\int_H^{H+D} q \ z \ dz} = \frac{296.6}{138.40} = 2.1 > 1.5$$

Kontrola proračuna preko jednačine ravnoteže horizontalnih sila:

$$E_{ah} - \int_0^{H+D} q \ z \ dz = \frac{1}{2} K_{ah} \gamma (H+D)^2 - c \left( \frac{q_0}{2} + \sum_2^9 q_i + \frac{q_{10}}{2} \right)$$

$$= 196.67 - 196.67 = 0$$

## PRORAČUN ŠIPOVA U VINKLER-OVOJ SREDINI

U okviru predmeta Mehanika tla, prikazane su različite metode za proračun graničnog i dozvoljenog opterećenja vertikalnog šipa opterećenog vertikalnom silom kao i graničnog i dozvoljenog opterećenja vertikalnog šipa koji je opterećen horizontalnom silom i momentom savijanja. Postoji vrlo velik broj različitih faktora koji utiču na nosivost tla oko šipa, kao što je način ugradnje (bušeni, utisnuti ili pobijeni šipovi), vrsta tla (sitnozrno tlo, krupnozrno tlo), relativna brzina opterećenja u odnosu na moguću disipaciju pornog nadprtiska (drenirani ili nedrenirani uslovi opterećenja) i slično. Zbog velikog broja različitih faktora, računska sila po različitim metodama se kreće u vrlo širokim granicama.

Proračun šipova kao i svakog konstruktivnog elementa, obuhvata proračun prema graničnom stanju nosivosti ili skraćeno ULS (Ultimate Limit State) i proračun prema graničnom stanju upotrebljivosti ili skraćeno SLS (Serviceability Limit State). Mada su pomeranja temelja na šipovima po pravilu za jedan red veličine manja nego kod plitkih temelja, tehnička regulativa zahteva i njihov proračun. Kada je u pitanju proračun deformacija šipova, uglavnom je ona manja od tačnosti proračuna nosivosti.

Da bi se dobili pouzdaniji podaci o nosivosti i sleganju šipa, pravilo nalaže da se uvek vrši i probno opterećenje šipova na predmetnoj lokaciji. Broj probnih opterećenja zavisi od broja šipova i heterogenosti geomehaničkog profila, a zbog kontrole ne može biti manji od dva. Na osnovu podataka dobijenih probnim opterećenjem pojedinačnog šipa, može se odrediti veza između sile i pomeranja glave šipa odnosno sprega sila (momenta) i obrtnja glave šipa.

Treba napomenuti da se jedan šip retko pojavljuje kao noseća konstrukcija. Uglavnom šip prenosi opterećenje u manjoj ili većoj grupi, koja je međusobno povezana tzv. naglavnicom koja obezbeđuje ravnometerno prenošenje opterećenja na šipove. Ako se radi o manjoj grupi, odnosno manjim dimenzijama temelja, naglavnice se mogu tretirati kao idealno krute.

Grupa šipova je složeniji problem od pojedinačnog šipa, pošto osim prethodno pomenutih faktora, na nosivost utiče međusobno rastojanje, broj i raspored šipova, redosled ugradnje u tlo i krutost naglavnice. Treba imati u vidu da i naglavnica prenosi određen deo od ukupnog opterećenja, srazmerno krutosti tla, šipova i naglavnice.

Uvođenjem efekta interakcije šipova, tla i naglavnice, proračun nosivosti i pomeranja postaje vrlo složen. Zbog svega iznetog, može reći da je problem proračuna temelja na šipovima jedan od najsloženijih u geotehnici.

U okviru ovog predmeta prikazaće se najjednostavniji model proračuna grupe šipova, koji je zasnovan na Vinkler-ovojo hipotezi.

Vinklerov model aproksimira tlo serijom nepovezanih linearno-elastičnih opruga, tako da deformacija postoji samo tamo gde deluje opterećenje. Pošto je realno tlo do određene mere kontinuum, postoji međusobni uticaj grupe šipova na nosivost i pomeranje, koje se ne može obuhvatiti Vinklerovim modelom.

Interakcija grupe šipova, ostvaruje se preko naglavnice i kroz tlo kao kontinualnu sredinu. Proračun interakcije grupe šipova preko krute naglavnice je znatno lakši problem od proračuna interakcije šipova kroz tlo. U okviru ovog poglavlja, prikazaće se interakcija šipova preko krute naglavnice, dok će se u posebnom poglavlju obraditi interakcija grupe šipova.

Prvo će se prikazati analitičko rešenje za homogeno tlo, za vertikalni šip koji je izložen aksijalnom pomeranju glave (s) bez poprečnog pomeranja i obrtanja, za vertikalni šip izložen poprečnom pomeranju glave (t) bez aksijalnog pomeranja i obrtanja i za vertikalni šip izložen obrtanju glave ( $\theta$ ) bez aksijalnog i poprečnog pomeranja. Na osnovu prethodnih proračuna, može se formirati matrica krutosti "glave" šipa. Razmatraće se samo dvodimenzionalni – ravanski problemi.

U sledećem koraku će se prikazati postupak proračuna pomeranja grupe šipova povezanih idelano krutom (nedeformabilnom) naglavnicom. U praksi to odgovara fundiranju potpornog zida na šipovima, temelja samca na šipovima, temelja ispod zidnog platna i slično, odnosno kada se radi o manjoj grupi šipova (npr 5-10) ili vrlo krutoj naglavnici.

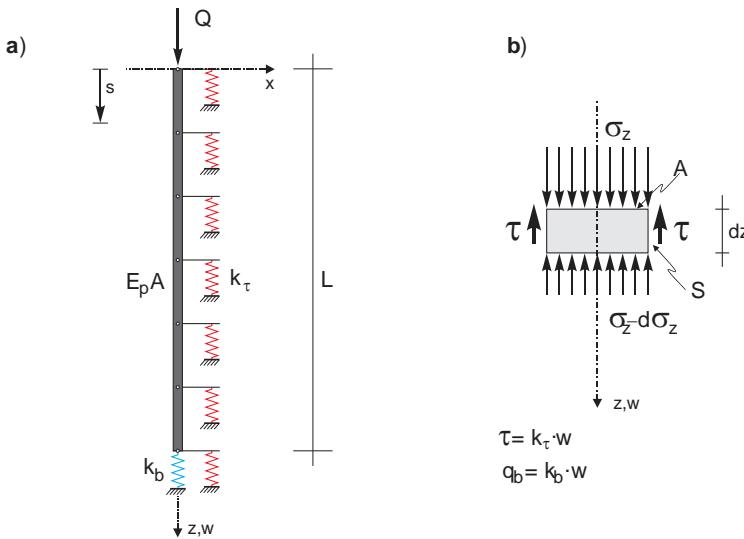
Prikazana analitička rešenja se odnose na homogeno tlo, sa modulom reakcije koji je konstantan sa dubinom. Za linearan porast modula reakcije sa dubinom, ne postoji analitičko rešenje, ali se za krut i savitljiv šip mogu dobiti približna analitička i grafička rešenja (Barber 1953, Broms 1964).

Ako je tlo uslojeno i modul reakcije tla promenljiv po dubini, rešenje se može dobiti samo u numeričkom obliku. Na kraju ovog poglavlja je prikazan numerički postupak za proračun šipa u nehomogenoj sredini, primenom metode konačnih razlika (MKR).

### 11.1.1 Šip opterećen aksijalnom silom ( $k\tau = \text{const}$ )

Imajući u vidu da šipovi mogu biti i zakošeni, jednačine pomeranja će se odrediti u lokalnom sistemu, sa koordinatnim početkom na glavi šipa i koordinatnom osom koja se poklapa sa osom šipa. Lokalni koordinatni je definisan u odnosu na globalni, koji se obično postavlja u težište naglavnice da se pojednostavio proračun. Konvencija o predznaku je sledeća: Osa +z je usmerena na dole a osa +x na desno. Pozitivno pomeranje je u smeru pozitivne ose. Pozitivan normalni napon je napon pritiska, a pozitivni smičući napon na omotaču šipa je usmeren u smeru -z.

Na slici 11.1a je prikazan numerički model aksijalno opterećenog šipa u Vinkler-ovoj sredini, sa konstantnim smičućim modulom reakcije  $k_\tau$  duž omotača. Modul reakcije tla ispod baze šipa iznosi  $k_b$ . Zbog jednostavnosti, proračun je izvršen za vertikalni šip čije se ose poklapaju sa globalnim koordinatnim osama.



Slika 11.1 a) Računski model aksijalno opterećenog šipa, b) Naponi na elementu šipa

Zanemarujući uticaj sopstvene težine šipa, uslov ravnoteže diferencijalnog elementa šipa u pravcu ose +z prema slici 11.1b, glasi :

$$\Sigma Z = \sigma_z A - (\sigma_z + d\sigma_z)A - \tau S dz = 0 \quad \Rightarrow \quad A \frac{d\sigma_z}{dz} + S\tau = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad \frac{\sigma_z}{E_p} = -\varepsilon_z \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d\varepsilon_z}{dz} = \frac{-d\sigma_z}{E_p dz} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_z}{dz} = -E_p \frac{d^2w}{dz^2} \quad \tau = k_\tau w$$

Smenom se dobija diferencijalna jednačina aksijalno opterećenog šipa:

$$-E_p A \frac{d^2 w}{dz^2} + Sk_\tau w = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w}{dz^2} - \lambda_\tau^2 w = 0, \quad \lambda_\tau = \sqrt{\frac{Sk_\tau}{E_p A}} \quad (11.1a)$$

gde je:  $\lambda_\tau$  = parametar krutosti šipa i tla  
 $S, A$  = obim i površina poprečnog preseka šipa  
 $E_p$  = modul elastičnosti šipa  
 $k_\tau$  = smičući modul reakcije tla uz omotač šipa

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (11.1a) glasi:

$$w(z) = C_1 e^{-\lambda_\tau z} + C_2 e^{\lambda_\tau z} \quad (11.1b)$$

Aksijalna sila u poprečnom preseku opada sa dubinom i može se prema prethodnim izrazima prikazati sledećom jednačinom:

$$F(z) = A\sigma_z = -E_p A \frac{dw}{dz} = E_p A \lambda_\tau (C_1 e^{-\lambda_\tau z} - C_2 e^{\lambda_\tau z}) \quad (11.1c)$$

Integracione konstante se mogu odrediti iz graničnih uslova na glavi i u bazi šipa:

$$\begin{aligned} F(0) = Q &\Rightarrow Q = E_p A \lambda_\tau (C_1 - C_2) \\ F(L) = Q_b &\Rightarrow Q_b = E_p A \lambda_\tau (C_1 e^{-\lambda_\tau L} - C_2 e^{\lambda_\tau L}) \end{aligned}$$

Sila u bazi šipa se može izraziti preko modula reakcije  $k_b$  i sleganja baze šipa  $w_b$ :

$$Q_b = A_b k_b w_b \Rightarrow Q_b = A_b k_b (C_1 e^{-\lambda_\tau L} + C_2 e^{\lambda_\tau L})$$

Na osnovu gornjih graničnih uslova, integracione konstante  $C_1$  i  $C_2$  glase:

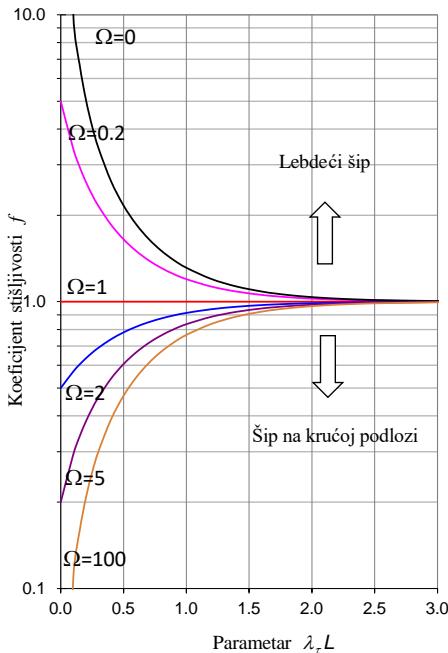
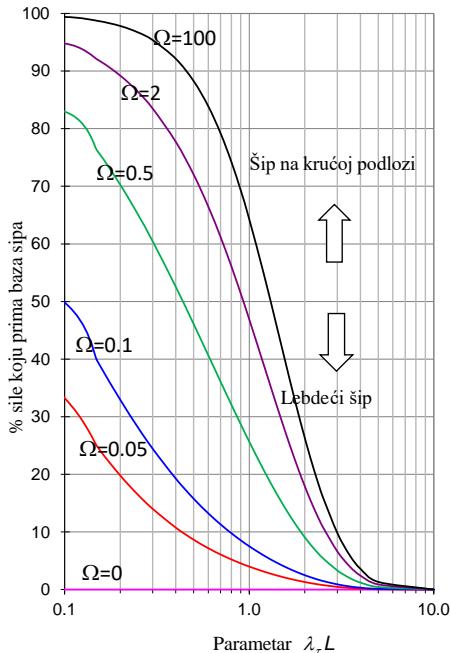
$$C_1 = \frac{Q}{\lambda_\tau E_p A} \left[ I + \frac{1 - \lambda_\tau E_p A / A_b k_b}{I + \lambda_\tau E_p A / A_b k_b} e^{-2\lambda_\tau L} \right]^{-1} \quad C_2 = \frac{-Q}{\lambda_\tau E_p A} \left[ I + \frac{1 + \lambda_\tau E_p A / A_b k_b}{I - \lambda_\tau E_p A / A_b k_b} e^{2\lambda_\tau L} \right]^{-1}$$

Prema jednačini (9.2) i integracionim konstantama, sleganje glave šipa  $s = w(0)$  je :

$$s = \frac{Q}{K_{Qs}}, \quad K_{Qs} = \frac{\lambda_\tau L}{f} \left( \frac{E_p A}{L} \right), \quad f = \frac{1 + \Omega \tanh \lambda_\tau L}{\Omega + \tanh \lambda_\tau L}, \quad \Omega = \frac{k_b A_b}{\lambda_\tau E_p A} \quad (11.1d)$$

Veličina  $K_{Qs}$  predstavlja aksijalnu krutost šipa. Koeficijent  $f$  zavisi od dužine  $L$ , modula elastičnosti šipa  $E_p$ , karakterističnog broja  $\lambda_\tau L$  i modula reakcije tla  $k_b$  (Slika 11.2a). Deo ukupne sile koji preuzima baza šipa, može se prikazati u funkciji parametra  $\lambda_\tau L$  i koeficijenta  $\Omega$ , prema sledećoj jednačini:

$$\frac{Q_b}{Q} = \Omega e^{-\lambda_r L} \left( 1 + \frac{\Omega - 1}{\Omega + 1} e^{-2\lambda_r L} \right)^{-1} - \Omega e^{\lambda_r L} \left( 1 + \frac{\Omega + 1}{\Omega - 1} e^{-2\lambda_r L} \right)^{-1} \quad (11.1e)$$

Slika 11.2 a) Koeficijent stišljivosti  $f$ 

b) % sile koju prenosi baza šipa

Za uobičajene dimenzije šipova (dugački šipovi) parametar  $\lambda_r L$  (karakterističan broj) je veći od 2.5, a koeficijent krutosti je  $f \approx 1.0$ , nezavisno od parametra  $\lambda_r L$ . Ako je  $\lambda_r L > 2.5$ , aksijalna krutost šipa  $K_{qs}$  je praktično nezavisna od modula reakcije tla  $k_b$  u bazi šipa. Značajan podatak u predmetnoj analizi je učešće baze u prenošenju aksijalne sile koja deluje na glavi šipa (Slika 11.2b).

Ako  $\lambda_r L$  raste (raste  $k_r$  i/ili  $L$ ) i/ili opada  $k_b$  opada sila udeo sile  $Q_b$ . Kada je smičući modul reakcije tla  $k_r$  oko omotača šipa mali, a modul reakcije tla  $k_b$  velik, jednačina sleganja glave šipa (11.1d) se svodi na jednačinu aksijalno opterećenog stuba:

$$K_{qs} = \frac{\lambda_r E_p A}{f} = \left( \frac{\lambda_r L}{f} \right) \frac{E_p A}{L}, \quad k_r \rightarrow 0 \Rightarrow \left( \frac{\lambda_r L}{f} \right) \rightarrow I, \quad s = \frac{QL}{E_p A}$$

Upoređujući prethodno rešenje (Scott, 1981) sa rezultatima proračuna sleganja aksijalno opterećenog vertikalnog šipa u homogenoj elastičnoj sredini (Poulos and Mates, 1981), može se uspostaviti približna veza između parametara elastičnosti  $E_s$  i  $v_s$  i modula reakcije tla  $k_r$  i  $k_b$ .

Za lebdeći šip prečnika  $d$  u homogenoj sredini, uz relativno malu grešku od 5-15%, može se usvojiti da je:

$$k_b = k_\tau \approx \frac{G_s}{2d} = \frac{1}{4(1+\nu_s)} \frac{E_s}{d} \Rightarrow \lambda_\tau L = \frac{L}{d} \sqrt{\frac{E_s}{(1+\nu_s)E_p}}, \quad \frac{\lambda_\tau E_p}{k_b} = 4 \sqrt{\frac{(1+\nu_s)E_p}{E_s}}$$

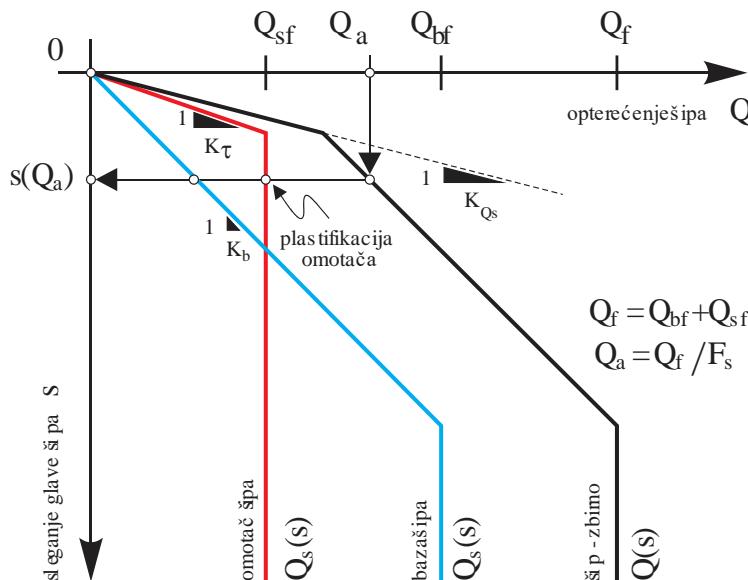
Modul reakcije  $k_b$  baze šipa prečnika  $d_b$  koji leži na sloju modula elastičnosti  $E_{s,b}$  određuje se prema izrazu za sleganje kružnog temelja. Pošto sleganje baze nastaje i usled sile po omotaču šipa, umesto izraza za dubok temelj primerenije je zadržati izraz za plitki, prema sledećem:

$$w_b = \frac{1 - \nu_{sb}^2}{E_{sb}} \frac{\pi}{4} q_b d_b, \quad k_b = \frac{q_b}{w_b} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - \nu_{sb}^2} \frac{E_{sb}}{d_b} = \frac{8}{\pi(1 - \nu_{sb})} \frac{G_{sb}}{d_b} \quad (11.1f)$$

Modul reakcije  $k_\tau$  se za vitke šipove, može prikazati izrazom (Mylonakis, 2001):

$$k_\tau = \frac{G_s}{d\pi} \delta, \quad \delta \approx 1.3 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{-1/40} \left( 1 + 7 \left( \frac{L}{d} \right)^{-0.6} \right) \quad (11.1g)$$

U dosadašnjoj analizi, nije vođeno računa o graničnoj čvrstoći tla oko stabla šipa i graničnoj čvrstoći tla ispod baze šipa.



Slika 11.3 Razvoj komponenti nosivosti šipa za konstantne module reakcije tla

Ispitivanjima je dokazano da se nosivost tla oko omotača iscrpljuje pri relativno malom sleganju glave šipa, između 0.2-0.8% od prečnika stabla (Reese and O'Neill, 1989). Nosivost baze se iscrpljuje pri sleganjima glave šipa reda veličine između 5-10% prečnika baze šipa, što znači da je pri radnom opterećenju kada je globalni faktor sigurnosti  $F_s=2.5-3.0$ , nosivost omotača uglavnom iscrpljena (Slika 11.3).

Krutost omotača  $K_t$  (kN/m) i baze šipa  $K_b$  (kN/m) se može odrediti na osnovu prethodnih izraza za sleganje glave šipa i sile u omotaču i bazi šipa.

### 11.1.2 Šip opterećen aksijalnom silom ( $k\tau = \text{linearno}$ )

U prethodnoj analizi su prikazani rezultati proračuna aksijalne krutosti šip-tlo za konstantnu vrednost smičućeg modula reakcije tla  $k_t$  duž omotača. Takav slučaj je u praksi vrlo redak i približno odgovara šipu u sloju tvrde (prekonsolidovane) gline. Ako je modul reakcije tla oko omotača šipa promenljiv, za grubu aproksimaciju se može usvojiti prosečna vrednost modula reakcije tla.

Ako se radi o homogenom sloju peska ili normalno konsolidovanoj glini, smičući modul reakcije tla duž omotača nije konstantan već raste približno linearne sa dubinom, shodno porastu efektivnog vertikalnog napona. Treba na kraju napomenuti, da izbor modula reakcije tla ne zavisi samo od vrste tla i geometrije šipa, već u velikoj meri od načina ugradnje šipa (bušeni, pobijeni, utisnuti šipovi), međusobnog rastojanja i dužine šipova.

Na osnovu proračuna šipa metodom konačnih i graničnih elemenata, Frank (1974) i Randolph (1977) su pokazali, da se opterećenje sa omotača šipa prenosi na tlo preko smičućih napona koji deluju u tlu na vertikalnim i horizontalnim ravnima, sa vrlo malim promenama vertikalnih normalnih napona, izuzev u području baze šipa. Shodno tome, šip se može posmatrati kao element koji je okružen koncentričnim cilindrima tla, sa smičućim naponima na svakom cilindru. Uslov vertikalne ravnoteže, nalaže da veličina smičućeg napona na svakom cilindru, opada obrnuto srazmerno površini omotača cilindra odnosno obrnuto srazmerno poluprečniku cilindra. Ako je smičući napon na omotaču  $\tau_0$  a poluprečnik  $r_0$ , smičući napon  $\tau$  na odstojanju  $r$ , glasi:

$$\Sigma Z = 0 \Rightarrow \tau_0(2r_0\pi)\Delta z = \tau(2r\pi) \Rightarrow \tau = \tau_0 r_0 / r$$

Pošto je dominantna vertikalna deformacija, smičuća deformacija  $\gamma$  i sleganje  $w$  su:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\tau}{G_s} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \approx 0 \Rightarrow \gamma \approx \frac{dw}{dr} \\ w &= \int_r^{r_m} \gamma \cdot dr = \int_r^{r_m} \frac{\tau}{G_s} dr = \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \int_r^{r_m} \frac{dr}{r} = \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \ln\left(\frac{r_m}{r}\right) \end{aligned} \quad (11.2a)$$

Veličina  $r_m$  je efektivni radius ili odstojanje od šipa gde je sleganje u zanemarljivo malo. Empirijski, taj radijus je reda veličine dužine šipa i može selinearno promenljiv modul klizanja po dubini prikazati jednačinom (Randolph and Wroth, 1978):

$$\frac{r_m}{d} = \frac{L}{d} \left[ 0.25 + \frac{G_L}{G_{sb}} \left( 2.5 \frac{G_{L/2}}{G_L} (1 - \nu_s) - 0.25 \right) \right], \quad G_{L/2} = \frac{G_0 + G_L}{2} \quad (11.2b)$$

$G_0$  i  $G_L$  su modul klizanja duž omotača šipa u nivou glave i baze šipa, a  $G_{sb}$  je modul klizanja tla ispod baze šipa. Za idealno krut šip, sleganje omotača šipa je:

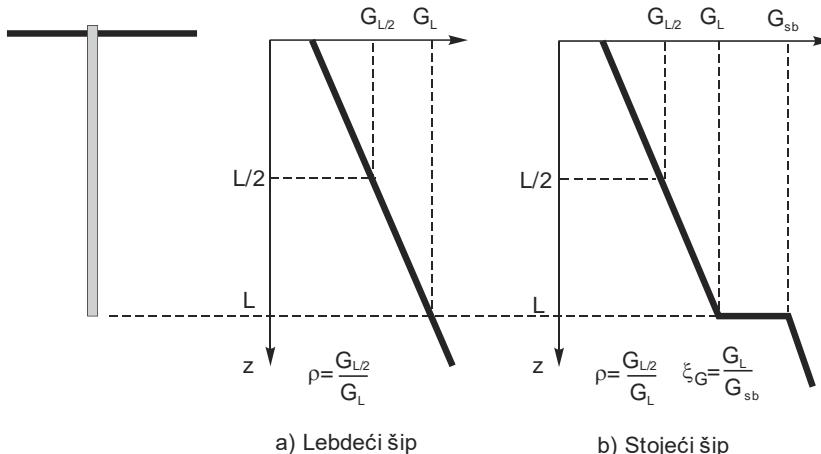
$$w_s = \int_{r_0}^{r_m} \gamma \cdot dr = \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right) = \frac{\tau_0 d}{2G_s} \ln\left(\frac{2r_m}{d}\right) = \zeta \frac{\tau_0 d}{2G_s}, \quad \zeta = \ln\left(\frac{2r_m}{d}\right)$$

U gornjoj jednačini  $\zeta$  je između 3 i 5, prosečno oko 4 (Baguelin and Frank, 1979). Za linearnu promenu modula klizanja duž omotača šipa, sleganje omotača šipa je:

$$w_s = \zeta \frac{\tau_0 d}{2G_{L/2}} \left( \frac{\pi L G_L}{\pi L G_L} \right) = \frac{\zeta}{\rho} \frac{Q_s}{2\pi L G_L}, \quad \rho = \frac{G_{L/2}}{G_L} \quad (11.2c)$$

Smatrujući bazu šipa krutim kružnim temeljem, sleganje usled sile u bazi  $Q_b$  se može se napisati sledećim izrazom:

$$w_b = \frac{Q_b (1 - \nu_{sb})}{2d_b G_{sb}} = \frac{Q_b (1 - \nu_{sb})}{2d G_L} \frac{\xi_G}{\eta}, \quad \xi_G = \frac{G_L}{G_{sb}}, \quad \eta = \frac{d_b}{d} \quad (11.2d)$$



Slika 11.4 Šip u sloju sa promenljivim modulom klizanja po dubini

Za idealno krut šip, može se napisati sledeća jednačina:

$$Q = Q_b + Q_s = w(Q_b/w_b + Q_s/w_s) \quad , \quad w = w_b = w_s \quad (11.2e)$$

Na osnovu prethodnih jednačina, koeficijent nosivosti šipa  $Q$ , kao zbir koeficijenata nosivosti baze i omotača šipa, glasi:

$$\frac{Q}{wG_L d} = \frac{2}{1-\nu_{sb}} \frac{d_b}{d} \frac{G_{sb}}{G_L} + \frac{2\pi}{\zeta} \frac{G_{L/2}}{G_L} \frac{L}{d} = \frac{2}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} + \frac{2\pi}{\zeta} \rho \frac{L}{d} \quad (11.2f)$$

Za šip konačne krutosti, kružnog preseka, diferencijalna jednačina (11.1a) glasi:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{8G_s}{\zeta E_p d^2} w$$

Rešenje diferencijalne jednačine u bezdimenzionalnom obliku, glasi:

$$\frac{Q}{wG_L d} = \left( \frac{2}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} + \frac{2\pi\rho}{\zeta} \omega \frac{L}{d} \right) \Bigg/ \left( 1 + \frac{2}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} \frac{4}{\pi\lambda} \omega \frac{L}{d} \right) \quad (11.2g)$$

Sleganje glave šipa se može izraziti peko uticajnog koeficijenta sleganja  $I_w$ :

$$w = \frac{Q}{G_L d} I_w \quad , \quad I_w = \left( 1 + \frac{2}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} \frac{4}{\pi\lambda} \omega \frac{L}{d} \right) \Bigg/ \left( \frac{2}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} + \frac{2\pi\rho}{\zeta} \omega \frac{L}{d} \right) \quad (11.2h)$$

gde je:

$\eta$	$= d_b/d$	faktor proširenja baze šipa
$\xi_G$	$= G_L / G_{sb}$	faktor krute podloge ispod baze šipa
$\rho$	$= G_{L/2} / G_L$	faktor nehomogenosti tla
$\lambda$	$= E_p / G_L$	odnos krutosti šipa i tla
$\zeta$	$= \ln(2r_m/d)$	faktor radijusa dejstva
$\mu L$	$= 2\sqrt{(2/\zeta\lambda)(d/L)}$	faktor kompresibilnosti šipa
$\omega$	$= (1/\mu L) \tanh(\mu L)$	-

Udeo nosivosti baze šipa je:

$$\frac{Q_b}{Q} = \left( \frac{1}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} \frac{1}{\cosh(\mu L)} \right) \Bigg/ \left( \frac{1}{1-\nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} + \frac{\pi\rho}{\zeta} \omega \frac{L}{d} \right) \quad (11.2k)$$

### 11.1.3 Šip opterećen aksijalnom silom u uslojenom tlu

Prethodno rešenje za šip sa bazom krutoj podlozi, može se jednostavno proširiti na šip koji prolazi kroz slojeve različite krutosti. U tu svrhu, delove šipa u različitom sloju treba posmatrati nezavisno, zadržavajući uslov kompatibilnosti pomeranja na granici slojeva. Da bi se to uradilo, potrebno je uvesti određene smene u jednačinu (11.2g). Na osnovu jednačine (11.2d), može se izvesti sledeće:

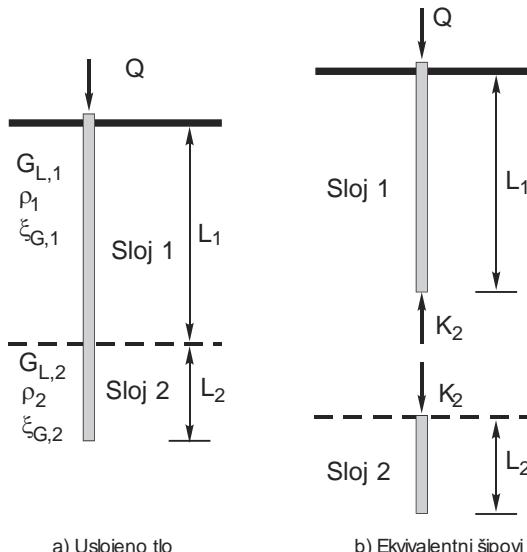
$$w_b = \frac{Q_b (1 - \nu_{sb})}{2dG_L} \frac{\xi_G}{\eta} \Rightarrow \frac{2}{1 - \nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_b} = \frac{K_b}{dG_L} , \quad K_b = \frac{Q_b}{w_b} \quad (11.3a)$$

Veličina  $K_b$  je krutost baze šipa u sloju-1 ( $K_1$ ) odnosno krutost glave šipa u sloju-2 ( $K_2$ ). Na osnovu jednačine (11.3a) i (11.2g), može se odrediti sleganje glave šipa u sloju-1 za zadato opterećenje  $Q$  prema sledećoj jednačini:

$$\frac{Q}{w} = K_1 = G_{L,1} d_1 \left( \frac{K_2}{d_1 G_{L,1}} + \frac{2\pi\rho_1}{\zeta_1} \omega_1 \frac{L_1}{d_1} \right) \Bigg/ \left( 1 + \frac{K_2}{dG_{L,1}} \frac{4}{\pi\lambda_1} \omega_1 \frac{L_1}{d_1} \right) \quad (11.3b)$$

Veličina  $K_2$  u gornjoj jednačini je krutost glave šipa u sloju (2), koja se može odrediti na osnovu sledeće jednačine (11.2g):

$$K_2 = G_{L,2} d_2 \left( \frac{2}{1 - \nu_{sb,2}} \frac{\eta_2}{\xi_{G,2}} + 2\pi \frac{\rho_2 \omega_2}{\zeta_2} \frac{L_2}{d_2} \right) \Bigg/ \left( 1 + \frac{2}{1 - \nu_{sb,2}} \frac{\eta_2}{\xi_{G,2}} \frac{4}{\pi} \frac{\omega_2}{\lambda_2} \frac{L_2}{d_2} \right) \quad (11.3c)$$



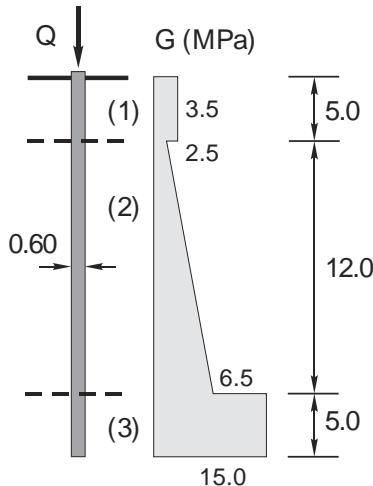
Slika 11.4

Modeliranje šipa u slojevitoj sredini

Proračun se vrši u 2 koraka. Korak-1: Na osnovu jednačine 11.3c, izračuna se krutost  $K_2$  za segment šipa u sloju-2. Korak-2: Vrednost  $K_2$  se uvrsti u jednačinu 11.3 i odredi krutost  $K_1$  glave segmenta šipa u sloju-1, pri čemu treba uzeti da je za tekući sloj (1)  $G_{sb}=G_L$  bez obzira na modul sloja-2. Na osnovu opterećenja  $Q$  i krutosti  $K_1$  odredi se sleganje glave šipa. Opisani način se može primeniti za proizvoljan broj slojeva.

### BROJNI PRIMER – 11.1

Za cilindrični, armirano-betonski šip prečnika  $\varnothing 600\text{mm}$ , koji leži u 3-slojnom sistemu, prema slici 11.5, potebno je izračunati sleganje glave, za opterećenje od  $Q=1.5\text{MN}$ . Modul elastičnosti šipa je  $E_p=22\text{ GPa}$ . Poissonov koeficijent tla iznosi 0.30.



Slika 11.5 Šip u 3-slojnoj sredini

Rešenje:

Korak-1: Proračun krutosti  $K_3$  glave šipa u sloju-3:

Dužina segmenta:  $L=5.0\text{m}$

Modul klizanja:  $G_{L/2}=15.0\text{ MPa}$ ,  $G_L=15.0\text{ MPa}$ ,  $G_{sb}=15.0\text{ MPa}$ ,  $\nu=0.30$

Parametar	$\eta$	$\xi_G$	$\rho$	$\lambda$	$\zeta$	$\mu L$	$\omega$
Vrednost	1.0	1.0	1.0	1466.7	3.37	0.34	0.96

$$K_{i=3} = G_{L,i} d_i \left( \frac{2}{1 - \nu_{sb,i}} \frac{\eta_i}{\xi_{G,i}} + 2\pi \frac{\rho_i \omega_i}{\zeta_i} \frac{L_i}{d_i} \right) \left/ \left( 1 + \frac{2}{1 - \nu_{sb,i}} \frac{\eta_i}{\xi_{G,i}} \frac{4}{\pi} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \frac{L_i}{d_i} \right) \right. = 157.3 \text{ MN/m}$$

Nosivost baze šipa iznosi:

$$\frac{Q_b}{Q} = \left( \frac{1}{1 - \nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} \frac{1}{\cosh(\mu L)} \right) \left/ \left( \frac{1}{1 - \nu_{sb}} \frac{\eta}{\xi_G} + \frac{\pi \rho}{\zeta} \omega \frac{L}{d} \right) \right. = 0.152 \quad , \quad 15.2\%$$

Korak-2: Proračun krutosti  $K_2$  glave šipa u sloju-2:

Dužina segmenta:  $L=12.0\text{m}$

Modul klizanja:  $G_{L/2}=4.5 \text{ MPa}$ ,  $G_L=6.5 \text{ MPa}$ ,  $G_{sb}=6.5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.30$

$$\frac{K_3}{G_{L,2} d_2} = \frac{157.3}{6.5 \cdot 0.6} = 40.33$$

Parametar	$\eta$	$\xi_G$	$\rho$	$\lambda$	$\zeta$	$\mu L$	$\omega$
Vrednost	1.0	1.0	0.69	3384.6	3.88	0.49	0.93

$$K_{i=2} = G_{L,i} d_i \left( \frac{K_{i+1}}{d_i G_{L,i}} + 2\pi \frac{\rho_i \omega_i}{\zeta_i} \frac{L_i}{d_i} \right) \left/ \left( 1 + \frac{K_{i+1}}{d_i G_{L,i}} \frac{4}{\pi} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \frac{L_i}{d_i} \right) \right. = 186.0 \text{ MN/m}$$

Korak-3: Proračun krutost  $K_1$  glave šipa u sloju-1:

Dužina segmenta:  $L=5.0\text{m}$

Modul klizanja:  $G_{L/2}=3.5 \text{ MPa}$ ,  $G_L=3.5 \text{ MPa}$ ,  $G_{sb}=3.5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.30$

$$\frac{K_2}{G_{L,1} d_1} = \frac{186.0}{3.5 \cdot 0.6} = 88.57$$

Parametar	$\eta$	$\xi_G$	$\rho$	$\lambda$	$\zeta$	$\mu L$	$\omega$
Vrednost	1.0	1.0	1.0	6285.7	3.37	0.16	0.99

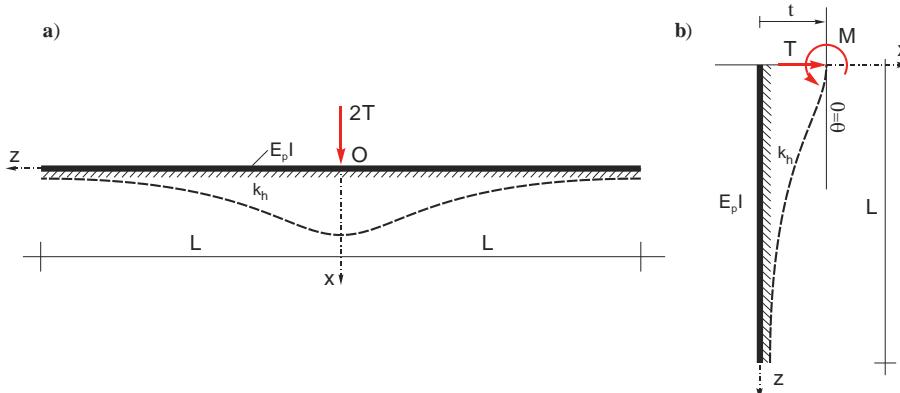
$$K_{i=1} = G_{L,i} d_i \left( \frac{K_{i+1}}{d_i G_{L,i}} + 2\pi \frac{\rho_i \omega_i}{\zeta_i} \frac{L_i}{d_i} \right) \left/ \left( 1 + \frac{K_{i+1}}{d_i G_{L,i}} \frac{4}{\pi} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \frac{L_i}{d_i} \right) \right. = 190.1 \text{ MN/m}$$

Sleganje glave šipa pod opterećenjem od  $Q=1.5 \text{ MN}$ , iznosi:

$$w = \frac{Q}{K_1} = \frac{1.5}{190.1} = 7.9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad , \quad \frac{w}{d} = 1.3\%$$

### 11.2.1 Šip opterećen poprečnim pomeranjem glave (kh = const)

Analitičko rešenje za poprečno pomeranja t glave vertikalnog šipa, bez obrtanja  $\theta$ , ako je modul reakcije  $k_h$  duž šipa konstantan, može se indirektno odrediti na osnovu rešenja grede konačne dužine koja je u sredini raspona opterećena vertikalnom i koncentrisanom silom (Slika 11.6a).



Slika 11.6a a) Greda na Vinkler-ovoj podlozi b) Poprečno pomeranje bez obrtanja glave šipa

Ako se temeljna greda dužine  $2L$ , na Vinkler-ovoj podlozi, u sredini opterećena vertikalnom koncentrisanom silom  $2T$  preseče na polovini, dobija se šip koji je u nivou glave izložen bočnom pomeranju  $t$  bez obrtanja (Slika 11.6a). U sredini grede odnosno na glavi šipa, deluje transverzalna sila  $T$  i moment savijanja  $M$ . Pozitivna horizontalna pomeranja i sile deluju u smeru koordinatne ose  $+x$ , a pozitivna obrtanja i momenti savijanja deluju u smeru koji je suprotan od smera obrtanja kazaljke na satu. Metodom početnih parametara, može se dobiti analitičko rešenje problema. Bez izvođenja, konačno rešenja glasi:

$$T = K_{Tt} \cdot t \quad , \quad K_{Tt} = \frac{k_h d}{\lambda_h} A(\lambda_h L) \quad (11.5a)$$

$$M = M_{Mt} \cdot t \quad , \quad K_{Mt} = \frac{k_h d}{2 \lambda_h^2} B(\lambda_h L) \quad (11.5b)$$

$$\lambda_h = \sqrt[4]{\frac{k_h d}{4 E_p I}}$$

gde je:  $\lambda_h$  = parametar krutosti šipa i tla

$I$  = moment inercije šipa oko ose  $\perp$  na pravac pomeranja  $t$

$E_p, d$  = modul elastičnosti i dimenzija šipa  $\perp$  na pravac pomeranja  $t$

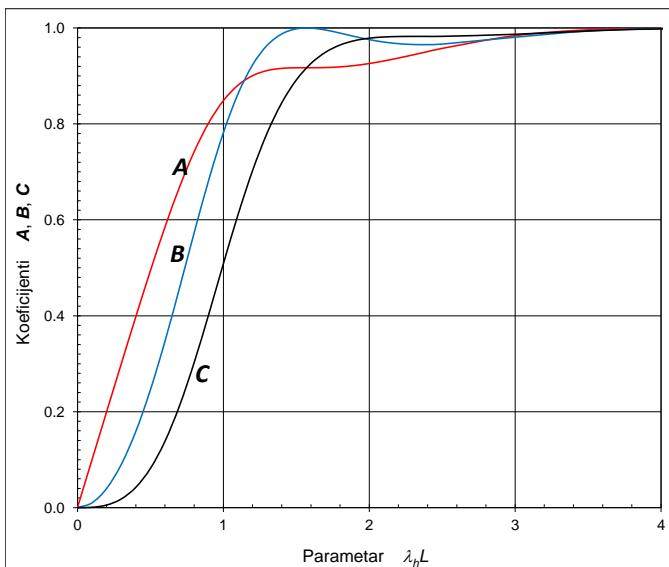
$k_h$  = horizontalni modul reakcije tla uz omotač šipa

Veličine  $K_{Tt}$  u ( $\text{kN}/\text{m}$ ) i  $K_{Mt}$  u ( $\text{kNm}/\text{m}$ ) zavise od geometrije šipa i krutosti šipa i tla. Koeficijenti A i B, C zavise od karakterističnog broja  $\lambda_h L$  i dati su grafički na slici 11.6b.

$$A(\lambda_h L) = \frac{\sinh(2\lambda_h L) + \sin(2\lambda_h L)}{\cosh(2\lambda_h L) + \cos(2\lambda_h L) + 2} , \quad \lambda_h L > 2.5 \rightarrow A(\lambda_h L) \approx 1$$

$$B(\lambda_h L) = \frac{\cosh(2\lambda_h L) - \cos(2\lambda_h L)}{\cosh(2\lambda_h L) + \cos(2\lambda_h L) + 2} , \quad \lambda_h L > 2.5 \rightarrow B(\lambda_h L) \approx 1$$

$$C(\lambda_h L) = \frac{1}{2} \frac{\sinh(2\lambda_h L) - \sin(2\lambda_h L)}{\cosh^2(2\lambda_h L) + \cos^2(2\lambda_h L)} , \quad \lambda_h L > 2.5 \rightarrow C(\lambda_h L) \approx 1$$



Slika 11.6b Koeficijenti krutosti za proračun presečnih sila usled pomeranja/obrtanja glave šipa

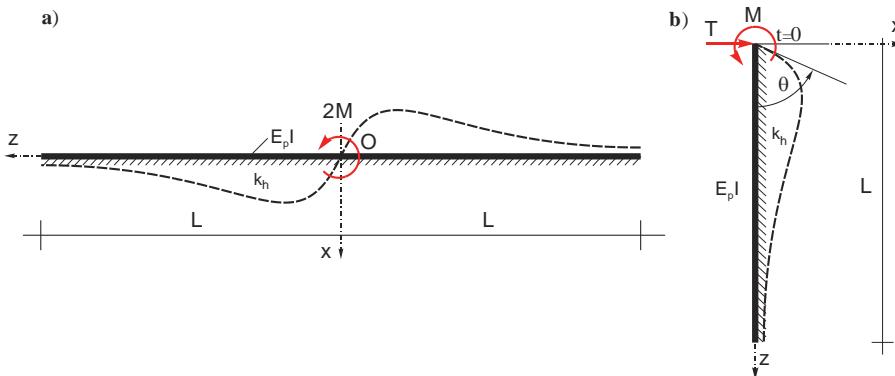
Upoređujući rezultate za vertikalni šip u homogenoj elastičnoj sredini ( $E_s$ ,  $v_s$ ) čija je glava izložena poprečnom pomeranju bez obrtanja (Poulos, 1971), sa rezultatima dobijenim na osnovu Vinkler-ovog modela, za ekvivalentan modul reakcije tla  $k_h$  se dobija sledeći izraz:

$$k_h \approx E_s / d$$

Veličine  $K_{Qs}$ ,  $K_{Tt}$ ,  $K_{Mt}$ ,  $K_{T\theta}$  i  $K_{M\theta}$  su izvedene za tlo koje ima konstantan modul reakcije po dubini (duž omotača).

### 11.2.2 Šip opterećen obrtanjem glave ( $k_h = \text{const}$ )

Analitičko rešenje za obrtanje glave šipa  $\theta$ , bez poprečnog pomeranja  $t$ , ako je modul reakcije tla  $k_h$  duž šipa konstantan, može se na isti način kao i u prethodnom slučaju, indirektno odrediti na osnovu rešenja grede konačne dužine koja je u sredini raspona opterećena spregom sila (Slika 11.6c).



Slika 11.6c a) Greda na Vinkler-ovoj podlozi b) Obrtanje bez poprečnog pomeranja glave šipa

Ako se temeljna greda dužine  $2L$ , na Vinkler-ovoj podlozi, u sredini opterećena spregom sila  $2M$  preseče na polovini, dobija se šip koji je u nivou glave izložen obrtanju  $\theta$  bez bočnog pomeranja (Slika 11.6c). U sredini grede (na glavi šipa), deluje transverzalna sila  $T$  i moment savijanja  $M$ . Metodom početnih parametara, može se dobiti analitičko rešenje problema. Bez izvođenja, konačno rešenja glasi:

$$T = K_{T\theta} \cdot \theta, \quad K_{T\theta} = \frac{k_h d}{2 \lambda_h^2} \left( \frac{\cosh 2\lambda_h L - \cos 2\lambda_h L}{\cosh 2\lambda_h L + \cos 2\lambda_h L + 2} \right) = \frac{k_h d}{2 \lambda_h^2} B \quad \lambda_h L \quad (11.5c)$$

$$M = K_{M\theta} \cdot \theta, \quad K_{M\theta} = \frac{k_h d}{2 \lambda_h^3} \left( \frac{1}{2} \frac{\sinh(2\lambda_h L) - \sin(2\lambda_h L)}{\cosh^2(\lambda_h L) + \cos^2(\lambda_h L)} \right) = \frac{k_h d}{2 \lambda_h^3} C(\lambda_h L) \quad (11.5d)$$

Veličine  $K_{T\theta}$  u ( $\text{kN}/\text{rad}$ ) i  $K_{M\theta}$  u ( $\text{kNm}/\text{rad}$ ) zavise od geometrije i krutosti šipa i krutosti tla, dok su  $B$  i  $C$  koeficijenti krutosti koji zavise od karakterističnog broja  $\lambda_h L$  i prikazani su na slici 11.6b. Za vrednosti  $\lambda_h L > 2.5$  što približno odgovara dugačkom šipu, koeficijenti krutosti su  $\approx 1$ , pa su elementi matrice krutosti šipa:

$$\lambda_h L > 2.5 \Rightarrow B \approx C \approx 1, \quad K_{T\theta} \approx K_{T\theta \infty} = \frac{k_h d}{\lambda_h}, \quad K_{M\theta} \approx K_{M\theta \infty} = \frac{k_h d}{2 \lambda_h^3}$$

### 11.2.3 Šip opterećen pomeranjem i obrtanjem glave ( $kh = \text{const}$ )

Jednačine (11.5a-d) mogu se napisati u sledećem matričnom obliku:

- krut šip ( $\lambda_h L < 2.5$ ):

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Tt} & K_{T\theta} \\ K_{Mt} & K_{M\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_h d}{\lambda_h} A(\lambda_h L) & \frac{k_h d}{2\lambda_h^2} B(\lambda_h L) \\ \frac{k_h d}{2\lambda_h^2} B(\lambda_h L) & \frac{k_h d}{2\lambda_h^3} C(\lambda_h L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (11.6a)$$

- dugačak šip ( $\lambda_h L > 2.5 \rightarrow A(\lambda_h L) = B(\lambda_h L) = C(\lambda_h L) = 1$ ):

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_h d}{\lambda_h} & \frac{k_h d}{2\lambda_h^2} \\ \frac{k_h d}{2\lambda_h^2} & \frac{k_h d}{2\lambda_h^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (11.6b)$$

### 11.2.4 Šip opterećen poprečnom silom i momentom ( $kh = \text{const}$ )

Na osnovu inverzije matrice krutosti u jednačini (11.6), može se odrediti pomeranje i obrtanje slobodne glave šipa, sledećom matričnom jednačinom:

- krut šip ( $\lambda_h L < 2.5$ ), slobodna glava:

$$\begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} = \chi \begin{bmatrix} F_{iT} & F_{oT} \\ F_{iM} & F_{oM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \chi \begin{bmatrix} \frac{-2\lambda_h}{k_h d} C(\lambda_h L) & \frac{2\lambda_h^2}{k_h d} B(\lambda_h L) \\ \frac{2\lambda_h^2}{k_h d} B(\lambda_h L) & \frac{-4\lambda_h^3}{k_h d} A(\lambda_h L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \quad (11.6c)$$

$$\chi = \frac{1}{2A(\lambda_h L)C(\lambda_h L) - B^2(\lambda_h L)}$$

- krut šip, uklještena glava:  $t = T \frac{\lambda_h}{k_h d A(\lambda_h L)} \quad , \quad M = T \frac{B(\lambda_h L)}{\lambda_h A(\lambda_h L)}$

- dugačak šip ( $\lambda_h L > 2.5$ ), slobodna glava:

$$\begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2\lambda_h}{k_h d} & \frac{2\lambda_h^2}{k_h d} \\ \frac{2\lambda_h^2}{k_h d} & \frac{-4\lambda_h^3}{k_h d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \quad (11.6d)$$

- dugačak šip, uklještena glava:  $t = T \lambda_h / k_h d \quad , \quad M = T / \lambda_h$

### 11.3.1 Šip opterećen poprečnom silom i momentom ( $kh = \text{linearno}$ )

Za linearno promjenljiv modul reakcije tla, postoje približna analitička rešenja. Ako modul reakcije  $k_h$  raste linearno sa dubinom, poprečno pomeranje  $t$  i obrtanje glave šipa  $\theta$  u nivou terena, usled poprečne sile  $T$  i momenta savijanja  $M=T \cdot e$ , za krute (kratke) i savitljive (dugačke) šipove, sa slobodnom i uklještenom glavom, može se odrediti prema jednačinama koje je izveo Barber (1953).

- krut šip ( $\eta L < 2$ ), slobodna glava:

$$\begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{L^2 n_h} & -\frac{24}{L^3 n_h} \\ -\frac{24}{L^3 n_h} & \frac{36}{L^4 n_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} , \quad \eta = \sqrt[5]{\frac{n_h}{E_p I}} , \quad k_h = n_h \frac{z}{d} \quad (11.7a)$$

- krut šip, uklještena glava:  $t = \frac{2}{L^2 n_h} T , \quad M = \frac{2L}{3} T$

- dugačak šip ( $\eta L > 4$ ), slobodna glava:

$$\begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.40}{(n_h)^{0.6} (E_p I)^{0.4}} & \frac{-1.60}{(n_h)^{0.4} (E_p I)^{0.6}} \\ \frac{-1.60}{(n_h)^{0.4} (E_p I)^{0.6}} & \frac{1.74}{(n_h)^{0.2} (E_p I)^{0.8}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \quad (11.7b)$$

- dugačak šip, uklještena glava:  $t = \frac{0.92}{(n_h)^{0.6} (E_p I)^{0.4}} T , \quad M = \frac{0.92}{\eta} T$

### 11.3.2 Šip opterećen pomeranjem i obrtanjem glave ( $kh = \text{linearno}$ )

Koristeći prethodne izraze, mogu se inverzijom odrediti izrazi za poprečnu silu  $T$  i moment savijanja  $M$  usled jediničnog poprečnog pomeranja  $t$  i obrtanja glave šipa  $\theta$ .

- krut šip ( $\eta L < 2$ ), slobodna glava:

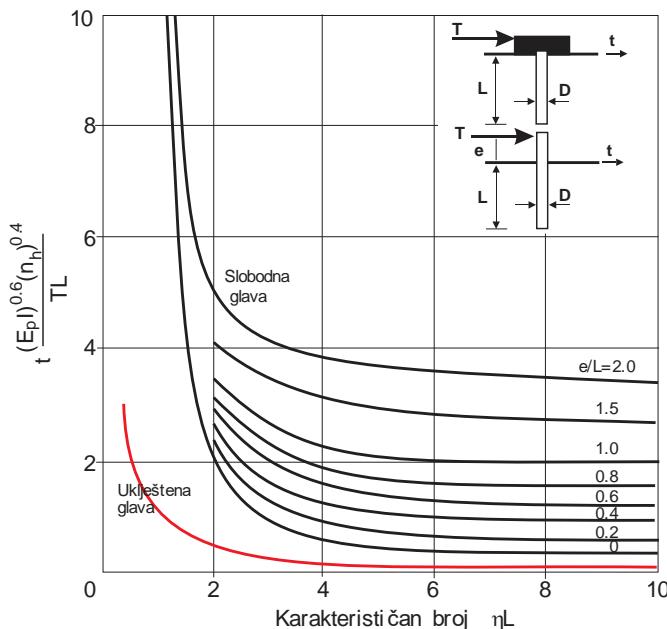
$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^2 n_h}{2} & \frac{L^3 n_h}{3} \\ \frac{L^3 n_h}{3} & \frac{L^4 n_h}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (11.7c)$$

- dugačak šip ( $\eta L > 4$ ), slobodna glava:

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.077(n_h)^{0.6}(E_p I)^{0.4} & 0.99(n_h)^{0.4}(E_p I)^{0.6} \\ 0.99(n_h)^{0.4}(E_p I)^{0.6} & 1.485(n_h)^{0.2}(E_p I)^{0.8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (11.7d)$$

Kada je koeficijent savitljivosti šipa između  $2 < \eta L < 4$ , ne postoji približan analitički izraz za koeficijente K, već se vrednosti približno interpoluju stepenom funkcijom.

Broms (1964) je za horizontalno pomeranje t glave slobodnog ili uklještenog šipa (u nivou terena), sa linearnim porastom modula reakcije tla, dao sledeći dijagram:



Slika 11.7 Pomeranje šipa u tlu sa linearnim porastom modula  $k_h$  usled horizontalne sile

Za proizvoljno promenljiv modul reakcije tla duž omotača koriste numerički postupci, kao što su metoda konačnih razlika (MKR) ili metoda konačnih elemenata (MKE).

#### 11.4 Šip opterećen na uvijanje – torziju glave ( $k_h = \text{const}$ )

Koeficijent fleksibilnosti  $F_{\Theta\Theta}$  se može odrediti na osnovu rešenja torziono opterećene glave šipa u elastičnoj sredini (Poulos & Davis, 1980) za konstantan i linearni porast modula klizanja tla  $G_s$  po dubini.

Za dugačak šip ( $L/d > 20$ ), uobičajene krutosti, mogu se odrediti jednostavni analitički izrazi za koeficijent krutosti i fleksibilnosti šipa.

U tlu sa konstantnim modulom smicanja:

$$G_s = \text{const} \quad , \quad 10^{-1} \leq \frac{G_p I_0}{G_s d^4} \leq 10^3 \quad \Rightarrow \quad K_{\mathfrak{M}\theta} = \frac{1}{F_{\theta\mathfrak{M}}} \approx 2d \sqrt{G_p G_s I_o}$$

U tlu sa linearnim porastom modula smicanja:

$$G_s = n_G z \quad , \quad 10^{-1} \leq \frac{G_p I_0}{n_G d^5} \leq 10^4 \quad \Rightarrow \quad K_{\mathfrak{M}\theta} = \frac{1}{F_{\theta\mathfrak{M}}} \approx \sqrt[3]{n_G G_p I_o d^2}$$

## 11.5 Matrica krutosti šipa u lokalnom koordinatnom sistemu

Pomeranje glave šipa u ravni ima tri stepena slobode, dve translacije i rotaciju. U lokalnom koordinatnom sistemu je pomeranje glave šipa određeno pomoću vektora {s, t, θ}. Na osnovu izvedenih veličina  $K_{Qs}$ ,  $K_{Tt}$ ,  $K_{Mt}$ ,  $K_{Tθ}$  i  $K_{Mθ}$  može se odrediti matrica krutosti šipa u lokalnom sistemu, koja povezuje pomeranja glave šipa sa silama na glavi šipa.

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Tt} & K_{Tθ} \\ 0 & K_{Mt} & K_{Mθ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ t \\ θ \end{Bmatrix} \quad \text{ili} \quad \{R_L\} = [K_L] \{U_L\} \quad (11.8a)$$

gde je:  
 $\{R_L\}$  = vektor opterećenja glave šipa u lokalnom sistemu  
 $[K_L]$  = matrica krutosti šipa i tla u lokalnom sistemu  
 $\{U_L\}$  = vektor pomeranja glave šipa u lokalnom sistemu

Matrica krutosti glave šipa, zavisi od geometrije i krutosti šipa i krutosti tla. Ako su smičući i horizontalni modul reakcije tla oko omotača šipa vrlo male veličine ( $k_t \ll 1$ ,  $k_h \ll 1$ ) a baza šipa leži na vrlo krutoj podlozi ( $k_b \gg 1$ ), matrica krutosti šipa i tla se svodi na matricu krutosti stuba – štapa. U zavisnosti od graničnih uslova na krajevima stuba (glava i baza šipa), mogu se pojaviti sledeći oblici matrice krutosti glave šipa:

$$\begin{bmatrix} E_p A/L & 0 & 0 \\ 0 & 12E_p I/L^3 & 6E_p I/L^2 \\ 0 & 6E_p I/L^2 & 4E_p I/L \end{bmatrix}_{(U)}^{(U)}, \quad \begin{bmatrix} E_p A/L & 0 & 0 \\ 0 & 3E_p I/L^3 & 3E_p I/L^2 \\ 0 & 3E_p I/L^2 & 3E_p I/L \end{bmatrix}_{(Z)}^{(U)} \quad (11.8b)$$

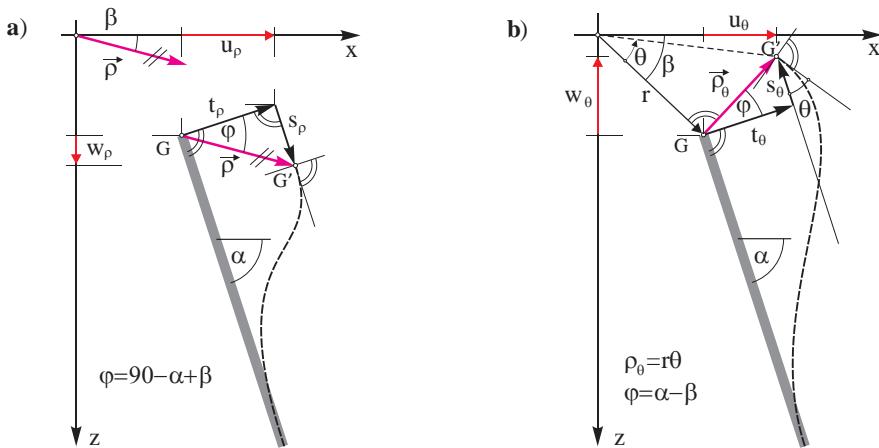
$$\begin{bmatrix} E_p A/L & 0 & 0 \\ 0 & 3E_p I/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(U)}^{(Z)}, \quad \begin{bmatrix} E_p A/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(Z)}^{(Z)} \quad (11.8c)$$

Šipovi se uvek moraju upustiti u naglavnicu, kako bi se osigurala dobra konstruktivna veza, zbog čega se može smatrati da je šip uklješten u naglavnicu (U). Za punu mobilizaciju nosivosti baze, šip se mora upustiti u nosivi sloj za min 3-4 prečnika šipa.

Za linearni porast modula reakcije tla  $k_h$ , matrica krutosti se može odrediti na osnovu izraza 11.6a-d. Matrica krutosti se može odrediti i indirektno na osnovu matrice fleksibilnosti  $[K_L] = [F_L]^{-1}$ . Elemeneti matrice fleksibilnosti  $F_{tt}$ ,  $F_{t\theta}$ ,  $F_{Mt}$  i  $F_{M\theta}$  se mogu odrediti analitički (Barden, 1953), grafički (Broms, 1964), numerički pomoću MKR ili MKE ili na osnovu rezultata probnog opterećenja šipa.

## 11.6 Matrica krutosti šipa u globalnom koordinatnom sistemu

U uvodnom delu je rečeno da šipovi retko prenose opterećenje samostalno, već se uglavnom radi o grupi šipova povezanih krutom naglavnicom. Neki šipovi u grupi su zakošeni da se bolje prime zakošene sile. Za proračun grupe šipova u deformabilnoj sredini, treba sve pojedinačne matrice krutosti šipa svesti u globalne koordinate.



Slika 11.8 a) Translacija težišta naglavnice b) Obrtanje oko težišta naglavnice

Mada rezultati proračuna ne zavise od položaja globalnog koordinatnog sistema, jednostavnost nalaže da se postavi u težište naglavnice. Analiza koja sledi je ograničena na 2-dimenzionalni (ravanski) problem (fundiranje potpornog ili obalnog zida, trakastog temelja). Pomeranje naglavnice u ravni, određuju dve translacije u pravcima globalnih koordinatnih osa i rotacija oko težišta naglavnice (koordinatnog početka). Pomeranja naglavnice je vektor  $\{u, w, \theta\}$ .

Pošto je grupa šipova uklještena u naglavnicu, pomeranja glave svakog šipa je određeno pomeranjem naglavnice kao idealno krutog tela. Veza između pomeranja glave šipa u lokalnom i naglavnice u globalnom sistemu, izvršiće se prema oznakama na slici 11.8.

Usled pomeranja težišta naglavnice (Slika 11.8a) za vektor  $\{\rho\}$ , kruto vezana glava šipa se pomera u pravcu ose za  $s_p$  a u pravcu upravno na osu šipa za  $t_p$ .

Usled obrtanja oko težišta naglavnice (Slika 11.8b) za vektor  $\{\theta\}$ , kruto vezana glava šipa se pomera u pravcu ose za  $s_\theta$ , u pravcu upravno na osu šipa za  $t_\theta$  i dodatno se obrće za ugao  $\theta$ . Komponente pomeranja glave šipa usled translacije i rotacije oko koordinatnog početka ili težišta naglavnice, odrediće se pojedinačno. Pošto su pomeranja mala, ukupno pomeranje se može odrediti superpozicijom tj. prostim sabiranjem pomeranja usled translacije i rotacije.

Pomeranja glave šipa usled translacije naglavnice iznose:

$$\begin{aligned}s_\rho &= \rho \sin \varphi = \rho \sin(90 - \alpha + \beta) = \rho \cos(\alpha - \beta) = \rho (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ s_\rho &= u \cos \alpha + w \sin \alpha\end{aligned}\quad (11.9a)$$

$$\begin{aligned}t_\rho &= \rho \cos \varphi = \rho \cos(90 - \alpha + \beta) = \rho \sin(\alpha - \beta) = \rho (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ t_\rho &= u \sin \alpha - w \cos \alpha\end{aligned}\quad (11.9b)$$

Pomeranja glave šipa usled rotacije oko težišta naglavnice iznose:

$$\begin{aligned}s_\theta &= -\rho_\theta \sin \varphi = -r\theta \sin(\alpha - \beta) = -r\theta (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ s_\theta &= -\theta x \sin \alpha + \theta z \cos \alpha\end{aligned}\quad (11.9c)$$

$$\begin{aligned}t_\theta &= \rho_\theta \cos \varphi = r\theta \cos(\alpha - \beta) = r\theta (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ t_\theta &= \theta x \cos \alpha + \theta z \sin \alpha\end{aligned}\quad (11.9d)$$

$$\theta = \theta \quad (11.9e)$$

Ukupno pomeranje glave šipa usled pomeranja naglavnice kao krutog tela, može se dobiti superpozicijom pomeranja prema (11.9a-b) i (11.9c-d). Ukupna pomeranja glave šipa u lokalnom sistemu  $\{U_L\}$ , mogu se izraziti pomeranjem naglavnice u globalnom sistemu  $\{U\}$  i matrice transformacije koordinatnog sistema  $[T]$ :

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & -x \sin \alpha + z \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & x \cos \alpha + z \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} \quad ili \quad \{U_L\} = [T] \{U\} \quad (11.10)$$

Ako se jednačina (11.10) uvrsti u jednačinu (11.8a), dobiće se veza između sila na glavi šipa u lokalnom sistemu i pomerana krute naglavnice u globalnom sistemu.

$$\{R_L\} = [K_L] \{U_L\} = [K_L] [T] \{U\} \quad \Rightarrow \quad \{R_L\} = [K_G] \{U\} \quad (11.11)$$

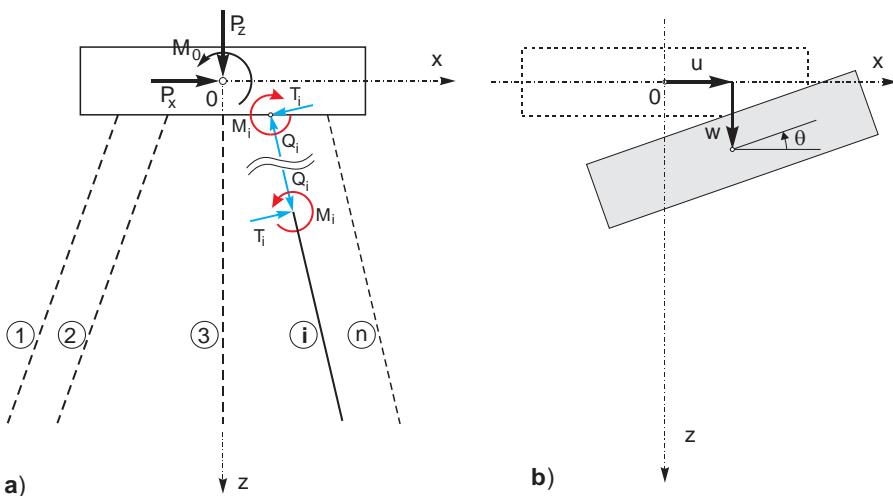
gde je:  $\{U\}$  = vektor pomeranja naglavnice u globalnom sistemu  
 $[T]$  = matrica transformacije lokalnog u globalni koordinatni sistem  
 $[K_G]$  = matrica krutosti šipa i tla u globalnom sistemu

Matrica krutosti šipa i tla u globalnom sistemu  $[K^G]$  je proizvod matrice krutosti šipa u lokalnom koordinatnom sistemu  $[K_L]$  i matrice transformacije  $[T]$ , prema sledećem:

$$[K_G] = [K_L][T] = \begin{bmatrix} K_{Qs} \cos \alpha & K_{Qs} \sin \alpha & K_{Qs}(-x \sin \alpha + z \cos \alpha) \\ K_{Tt} \sin \alpha & -K_{Tt} \cos \alpha & K_{Tt}(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + K_{T\theta} \\ K_{Mt} \sin \alpha & -K_{Mt} \cos \alpha & K_{Mt}(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + K_{M\theta} \end{bmatrix}$$

## 11.7 Uslovne jednačine ravnoteže naglavnice

Jednačina oblika (11.11) se može napisati za svaki šip u grupi koja je povezana krutom naglavnicom. Na taj način su sile na glavi svakog šipa izražene sa tri nepoznate veličine koje predstavljaju komponente pomeranja naglavnice  $\{u, w, \theta\}$ .



Slika 11.9 a) Sile na glavi šipa-i odnosno na naglavnici b) Komponente pomeranja naglavnice

Nepoznate komponente pomeranja se mogu odrediti iz uslovnih jednačina ravnoteže u ravni  $\Sigma X=0$ ,  $\Sigma Z=0$  i  $\Sigma M=0$ . Kada se sve spoljnje (aktivne) sile i momenti redukuju u koordinatni početak (ili težište naglavnice) i zatim razlože u smeru koordinatnih osa, dobiće se sile  $P_x$ ,  $P_z$  i spreg sila  $M_0$  oko tačke 0 (Slika 11.9a). Sile koje deluju na šipove, po zakonu akcije i reakcije su istog intentiteta i suprotnog smera od sila koje deluju na naglavnicu (Slika 11.8a).

Komponente pomeranja naglavnice  $\{u, w, \theta\}$  i položaj naglavnice nakon pomeranja i obrtanja, prikazan je na slici 11.9b. Na osnovu oznaka na slici 11.9a, uslovne jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n Q_i \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i = P_x \quad (11.12a)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n Q_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i = P_z \quad (11.12b)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left[ M_i + (Q_i \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i) z_i - (Q_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i) x_i \right] = M_0 \quad (11.12c)$$

Kada se u jednačine ravnoteže (11.12) uvrste jednačine (11.11) i koeficijenti slože uz nepoznate komponente pomeranja, dobija se sistem uslovnih jednačina:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad \text{ili} \quad [K] \{U\} = \{P\} \quad (11.13)$$

gde je:  $\{U\}$  = vektor pomeranja naglavnice u globalnom sistemu  
 $\{P\}$  = vektor opterećenja naglavnice  
 $[K]$  = matrica krutosti grupe šipova i tla u globalnom sistemu

Krutosti  $k_{ij}$  u uslovnoj jednačini 11.13 u razvijenom obliku glase:

$$k_{11} = \sum_I^n \Delta K \cos^2 \alpha + K_{Tt}, \quad \Delta K = K_{Qs} - K_{Tt}$$

$$k_{12} = \sum_I^n \Delta K \cos \alpha \sin \alpha, \quad k_{21} = k_{12}$$

$$k_{13} = \sum_I^n \Delta K \cos \alpha (-x \sin \alpha + z \cos \alpha) + K_{Tt}z + K_{T\theta} \sin \alpha, \quad k_{31} = k_{13}$$

$$k_{22} = \sum_I^n \Delta K \sin^2 \alpha + K_{Tt}$$

$$k_{23} = \sum_I^n \Delta K \sin \alpha (-x \sin \alpha + z \cos \alpha) - K_{Tt}x - K_{T\theta} \cos \alpha, \quad k_{32} = k_{23}$$

$$k_{33} = \sum_I^n \Delta K (x \sin \alpha - z \cos \alpha)^2 + K_{Tt}(x^2 + z^2) + (K_{T\theta} + K_{M\theta})(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + K_{M\theta}$$

Proračun koeficijenata u gornjim izrazima se lako i pregledno može izvršiti u EXCEL-u. Nakon što se odredi pomeranje naglavnice  $\{U\}$ , pomoću jednačina (11.10) i (11.11) se mogu odrediti pomeranja i sile u šipovima. Time je ravanski problem grupe šipova koji je uklješten u krutu naglavnici, pod proizvoljnim opterećenjem, jednoznačno rešen. Ako šip može da prenesi samo uzdužnu silu, bočni modul reakcije tla je  $k_h = 0$ , a ako uz to šip nosi samo bazom (stojeći šip) treba uzeti i da je  $k_\tau = 0$ .

Umesto modula  $n_h$ ,  $k_h$ ,  $k_\tau$  i  $k_b$  koji nisu fundamentalne fizičke veličine, direktno se mogu koristiti vrednosti  $K_{Qs}$ ,  $K_{Tt}$ ,  $K_{T\theta}$  i  $K_{M\theta}$  na osnovu rezultata probnog opterećenja.

Treba napomenuti da predmetna analiza zanemaruje međusobni uticaj šipova, što je konzistentno sa osnovnom karakteristikom Vinklerove sredine – diskontinuitet. Navedeni nedostatak se može prevazići uvođenjem složenijeg modela tla kao npr. model elastične sredine, ili približno, određenom redukcijom modula reakcije tla za pojedinačan šip, što povećava pomeranja. Koeficijenti redukcije modula reakcije imaju sličan efekat kao i koeficijenti redukcije nosivosti grupe šipova. Koeficijenti redukcije zavise od rasporeda, međusobnog rastojanja i broja šipova.

Treba istaći da ne postoji egzaktan način određivanja koeficijenta redukcije modula reakcije tla kada se radi o grupi šipova, tako da je svaki postupak samo konceptualan i vrlo približan.

U literaturi iz fundiranja se mogu naći klasične metode za proračun sila u šipovima povezanih krutom naglavnicom, pod proizvoljnim opterećenjem. Pretpostavka je da su šipovi samo aksijalno opterećeni, odnosno da su zglobno vezani u glavi i u bazi šipa (šip je prost štap). Šipovi u grupi mogu imati različite pravce. Ako je broj različitih pravaca do 3 ,ili ako se može svesti na 3, sile u šipovima se mogu odrediti na osnovu uslova ravnoteže (grafički ili analitički). Treba imati u vidu da je ovakav proračun u određenim slučajevima može dati relativno pouzdane rezultate. Taj slučaj nastaje kod šipova koji su po statičkom sistemu stoeći, obotrano zglobno vezani i kada je broj šipova manji ili jednak 3. Međutim u opštem slučaju, kada postoji značajniji otpor tla duž omotača, i kada se ne zanemari uklještenje šipa u naglavnici, primena uprošćenih metoda nije opravdana. Prikazana metoda za ravanski problem, može se proširiti i na prostorni. Kod prostorne grupe šipova, postoji 6 (šest) stepeni slobode (3 pomeranja i 3 obrtanja oko koordinatnih osa), koji se za idealno krutu naglavnicu određuju iz 6 ravnotežnih uslova.

## 11.8 Određivanje horizontalnog modula reakcije tla za šipove

Slično kao i kod elastičnih zidova, u zoni naglavnice se već pri malim opterećenjima javlja plastifikacija tla. Ovo je posebno izraženo kod peska i meke (NC) gline, gde je zbog malih efektivnih napona pri površini terena, čvrstoća i krutost zanemarljiva.

Kod prekonsolidovanih (OC) gline se modul reakcije može aproksimirati kao približno konstantan po dubini, u obliku koji je predložio Terzaghi (1955):

$$k_h = k_{hI} (0.305/d) \quad (11.14a)$$

gde je:  $k_{hI}$  = gradijent horizontalnog modula reakcije prekonsolidovane gline na dubini od 0.305m od površine terena ( $\text{MN/m}^3$ )  
 $d$  = dimenzija šipa u pravcu  $\perp$  na pravac sile

Jednoakcijsalna čvrstoća gline (kPa)	100-200	200-400	400-700
Konsistentno stanje	Čvrsto	Vrlo čvrsto	Tvrdo
N iz SPT-a ( $qc$ u MPa iz CPT-a)	4-10 (2.5-7.5)	11-30 (7.5-15)	31-50 (15-25)
Horizont.modul reakcije $k_{hI}$ ( $\text{MN/m}^3$ )	16-32	32-63	63-126

**Tabela 11.1a** Horizontalni modul reakcije tla  $k_{hI}$  ( $\text{MN/m}^3$ ) za OC-gline prema Terzaghi-u

Za razliku od OC-gline, kod peska i NC-gline, modul reakcije se poput deformabilnosti i čvrstoće menja približno linearno po dubini (Terzaghi, 1955):

$$k_h = n_h (z/d) \quad (11.14b)$$

gde je:  $n_h$  = gradijent horizontalnog modula reakcije peska ( $\text{MN/m}^3$ )  
 $z$  = dubina merena od dna iskopa

Vrsta tla	Preporučene vrednosti	Reference
Meka NC glina	0.16 – 0.35 0.27 – 0.54 0.35 – 0.70	Reese & Matlock (1956) Davisson & Prakash (1963) Tomlinson (1994)
NC organska glina	0.18 – 0.27 0.18 – 0.81 0.15	Peck & Davisson (1962) Davisson (1970) Tomlinson (1994)
Treset	0.05 0.03 – 0.11	Davisson (1970) Wilson & Hilts (1967)
Les	7.8 – 10.8	Bowles (1968)

**Tabela 11.1b** Gradijent horizontalnog modula reakcije  $n_h$  ( $\text{MN/m}^3$ ) za NC-gline

Osim tabele 11.1a-b, za sitnozrna tla (prašine i gline), za određivanje horizontalnog modula reakcije tla se koriste i sledeći korelativni izrazi:

$$k_h = \frac{5}{3} \frac{E_{50}}{d} \quad (\text{Broms, 1964})$$

$$k_h = (80 \div 320) \frac{c_u}{d} \quad (\text{Skempton, 1951}) \quad (11.14c)$$

$$k_h = (0.3 \div 0.5) \frac{M_v}{d} \quad (\text{Gudehus, 1996})$$

gde je:  $E_{50}$  = sekantni modul elastičnosti za  $\frac{1}{2}$  jednoaksijalne čvrstoće tla  
 $c_u$  = nedrenirana čvrstoća  
 $M_v$  = edometarski modul stišljivosti

Za peskove, Terzaghi predlaže gradijent horizontalnog modula reakcije u funkciji zbijenosti i vlažnosti (tabela 11.2), za pritiske do nivoa  $\frac{1}{2}$  graničnog, uzimajući u obzir i pomeranja pri puzaњu. Treba istaći, da je na osnovu probnog opterećenja velikog broja šipova i modelskih ispitivanja, utvrđeno da je modul reakcije tla uglavnom veći od onih prema Terzaghi-u. Zbog toga se u praksi preporučuju i veće vrednosti (Scott, 1981; Reese, 1974; Robinson, 1979).

Stanje zbijenosti peska	Rastresit	Srednje zbijen	Zbijen
Relativna zbijenost $D_r$ (%)	15-35	35-65	65-85
$N$ iz SPT-a (qc u MPa iz CPT-a)	4-10 (2.5-7.5)	10-30 (7.5-15)	30-50 (15-25)
Pesak, suv ili vlažan	2.5 (*5.0)	7.5 (*15.0)	20.0 (*40.0)
Pesak, potopljen	1.5 (*3.0)	5.0 (*10.0)	12.5 (*25.0)

Tabela 11.2 Vrednosti modula peska  $n_h$  (MN/m<sup>3</sup>) prema Terzaghi-u i udvostručene vrednosti (\*)

Odnos između modula  $n_h$  za potopljen i za vlažan pesak, pri istoj relativnoj zbijenosti, nije isti, i kreće se između 0.6-0.65, što je približno odnos između zapreminske težine peska u potopljenom i u vlažnom  $\gamma/\gamma$  stanju. Zapreminska težina određuje efektivni napon usled sopstvene težine tla (geostatički napon), što znači da modul  $n_h$  preko zapreminske težine zavisi od efektivnog napona (horizontalnog i vertikalnog).

Pošto se relativna zbijenost peska određuje in-situ na osnovu standardne (SPT) ili statičke penetracije (CPT), od praktične je koristi direktno povezati gradijent  $n_h$  sa brojem udaraca  $N$  u standardnoj ili otporom konusa  $q_c$  u statičkoj penetraciji.

Ako se prepostavate dvostruko veće vrednosti gradijenta  $n_h$  od Terzaghi-evih, da bi se smanjila konzervativna odstupanja u odnosu na eksperimentalne vrednosti, tada se može u funkciji zbijenosti  $D_r$  odrediti interpolaciona funkcija sa  $n_h$  (P. Santrač, 2014):

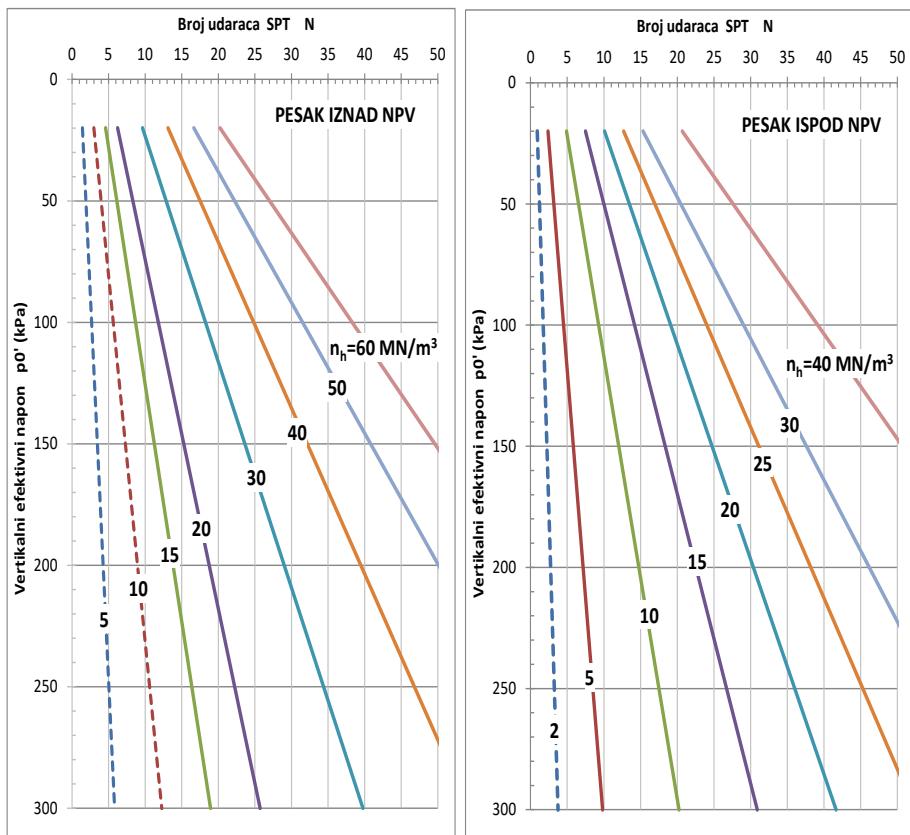
- pesak iznad nivoa podzemne vode:  $n_h = 60.5 \cdot D_r^{1.87}$
- pesak ispod nivoa podzemne vode:  $n_h = 39.8 \cdot D_r^{1.926}$

Polazeći od jednačine relativne zbijenosti (Gibbs i Holtz, 1979) u funkciji efektivnog vertikalnog napona  $p'_0$  i broja udaraca N iz opita standardne penetracije (SPT), može se dobiti direktni izraz za gradijent modula  $n_h$ , za suv (ili vlažan) i potopljen pesak:

$$D_r = \sqrt{\frac{N}{16 + 0.23 p'_0}} \rightarrow n_h = 61.1 \left( \frac{N}{16 + 0.23 p'_0} \right)^{0.935}$$

$$n_h = 39.8 \left( \frac{N}{16 + 0.23 p'_0} \right)^{0.963} \quad (11.15)$$

Na osnovu prethodnih jednačina su urađeni dijagrami u programu EXCEL, za procenu gradijenta modula reakcije peska u funkciji rezultata standardnog penetracionog opita -SPT (Slika 11.10a).



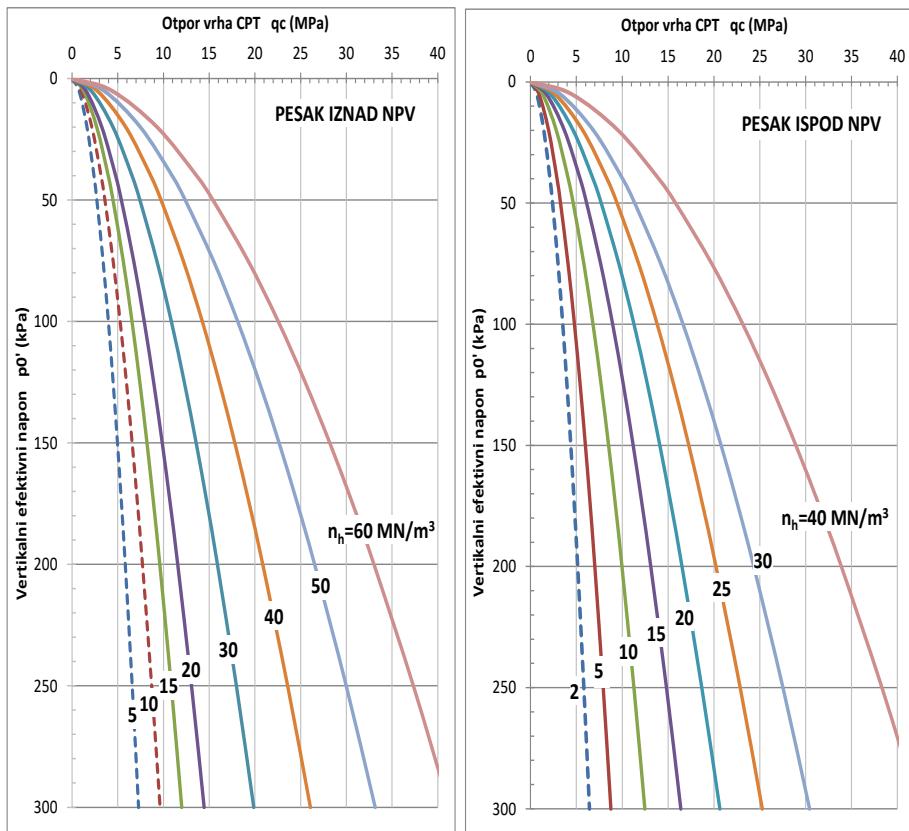
Slika 11.10a Gradijent horizontalnog modula reakcije peska  $n_h$  na osnovu SPT

Polazeći od jednačine za relativnu zbijenost (Bellotti et al., 1989) u funkciji efektivnog vertikalnog napona  $p'_0$  koeficijenta bočnog pritiska  $K_0$  i otpora konusa penetrometra  $q_c$  iz opita statičke penetracije (CPT) može se dobiti izraz sličan prethodnom:

$$D_r = 42 \cdot \ln \left( \frac{q_c}{248(K_o p'_0)^{0.55}} \right) \rightarrow n_h = 12.1 \cdot \ln^{1.870} \left( \frac{q_c}{169.4(p'_0)^{0.55}} \right) \quad (11.16)$$

$$n_h = 7.5 \cdot \ln^{1.926} \left( \frac{q_c}{169.4(p'_0)^{0.55}} \right)$$

Na osnovu prethodnih jednačina su urađeni dijagrami u programu EXCEL, za procenu gradijenta modula reakcije peska u funkciji rezultata statičkog -CPT penetracionog opita (Slika 11.10b).

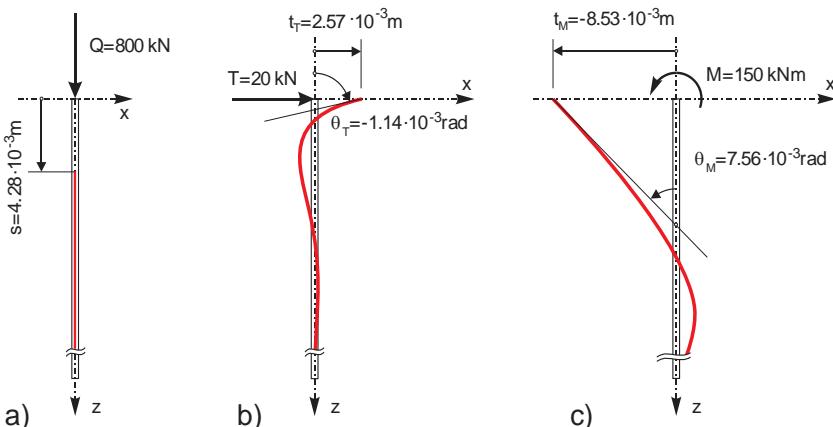


Slika 11.10b Gradijent horizontalnog modula reakcije peska  $n_h$  na osnovu CPT

## BROJNI PRIMER – 11.1

Na lokaciji objekta predviđenog za fundiranje na grupi vertikalnih šipova, izvedeno je probno opterećenje tzv. test šipova. Na jednom šipu je izvedeno opterećenje vertikalnom silom, na drugom horizontalnom silom a na trećem spregom sila (Slika 11.11). Na osnovu dijagrama pomeranja (obrtanja) u funkciji sile (sprega sila), određena su za područje radnog opterećenja (dozvoljenog opterećenja), pomeranja i obrtanja. Koristeći podatke sa slike 9.11, potrebno je:

- Odrediti elemente matrice krutosti šip-tlo,
- Izvršiti kontrolni proračun sila na glavi šipa usled istovremenog dejstva sva tri uticaja - pomeranja



Slika 11.11 Probno opterećenje šipa: a) Aksijalnom silom, b) Horizontalnom silom c) Spregom sila

**Rešenje:**

Na osnovu sila i pomeranje slobodne glave šipa, mogu se odrediti elementi matrice fleksibilnosti šipa i tla, prema sledećim izrazima:

$$F_{Qs} = \frac{s}{Q} = \frac{4.28 \cdot 10^{-3}}{0.800} = 5.35 \cdot 10^{-3} \text{ m/MN}$$

$$F_{Tt} = \frac{t_T}{T} = \frac{2.57 \cdot 10^{-3}}{0.02} = 1.29 \cdot 10^{-1} \text{ m/MN}$$

$$F_{Mt} = \frac{t_M}{M} = \frac{-8.53 \cdot 10^{-3}}{0.15} = -5.70 \cdot 10^{-2} \text{ m/MNm}$$

$$F_{T\theta} = \frac{\theta_T}{T} = \frac{-1.14 \cdot 10^{-3}}{0.02} = -5.70 \cdot 10^{-2} \text{ rad/MN}$$

$$F_{M\theta} = \frac{\theta_M}{M} = \frac{7.56 \cdot 10^{-3}}{0.15} = 5.04 \cdot 10^{-2} \text{ rad/MNm}$$

Matrica fleksibilnosti i matrica krutosti šipa i tla glasi:

$$\begin{aligned} [F_L] &= \begin{bmatrix} F_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & F_T & F_{T\theta} \\ 0 & T_{Mt} & F_{M\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.35 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1.29 \cdot 10^{-1} & -5.70 \cdot 10^{-2} \\ 0 & -5.70 \cdot 10^{-2} & 5.04 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \\ [K_L] &= [F_L]^{-1} = \begin{bmatrix} 186.92 & 0 & 0 \\ 0 & 15.50 & 17.52 \\ 0 & 17.52 & 39.66 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kontrola proračuna će se izvršiti množenjem matrice krutosti tla [ $K_L$ ] sa vektorom pomeranja  $\{U_L\}$ . Za rezultat treba dobiti sile na glavi šipa date na slici 11.11.

$$s = 4.29 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$t = t_T + t_M = 2.57 \cdot 10^{-3} - 8.53 \cdot 10^{-3} = -5.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta = \theta_T + \theta_M = -1.14 \cdot 10^{-3} + 7.56 \cdot 10^{-3} = 6.42 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\{R_L\} = [K_L] \{U_L\}$$

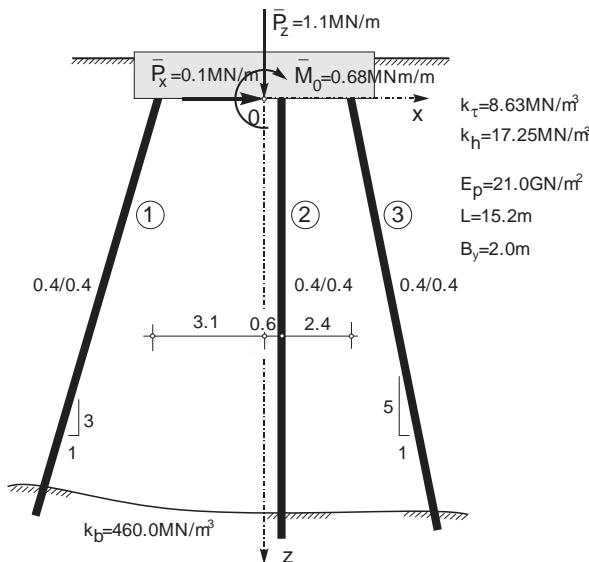
$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 186.92 & 0 & 0 \\ 0 & 15.50 & 17.52 \\ 0 & 17.52 & 39.66 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.29 \\ -5.96 \\ 6.42 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0.80 \\ 0.02 \\ 0.15 \end{Bmatrix} \quad \text{zadovoljava !}$$

Na osnovu rezultata probnog opterećenja, koristeći prethodni postupak, određena je realna matrica krutosti šipa i tla u području radnih opterećenja. Ovakav postupak daje pouzdanije rezultate od indirektnog određivanja matrice krutosti na osnovu modula reakcije tla koji su približne/korelativne veličine. Probno opterećenje implicitno obuhvata specifičnosti lokacije (anizotropija, nelinearnost i nehomogenost tla, način ugradnje šipa, krutost šipa, raspored i dimenzije šipa i dr.) što se ne može obuhvatiti analitičkim putem. U nedostatak probnog opterećenja šipa, spada kompleksnost, visoka cena (model u razmeri 1:1), složena oprema za merenje i stručna radna snaga.

## BROJNI PRIMER – 11.2

Na slici 11.12 je poprečni presek trakastog temelja obalnog zida. Temelj zida je kruta naglavnica na šipovima. Opterećenje potpornog zida je redukovano u težište naglavnice. Podužno rastojanje šipova (upravno na ravan crteža) iznosi  $B_y = 2.0\text{m}$ . U poprečnom preseku, naglavnica je oslonjena na tri AB šipa dimenzija  $0.4/0.4/15.2\text{m}$ . Međusobno rastojanje šipova je takvo da se može zanemariti njihovo međusobno dejstvo na nosivost i pomeranja. Šipovi su uklješteni u naglavnici. Tlo oko naglavnice je homogeno po dubini. Prosečan horizontalni i smičući modul reakcije tla iznosi  $k_h = 17.25 \text{ MN/m}^3$  i  $k_t = 8.63 \text{ MN/m}^3$ , a modul reakcije tla u bazi šipa  $k_b = 460 \text{ MN/m}^3$ . Potrebno je izračunati:

- 1) Pomeranje krute naglavnice  $u, w, \theta$ .
- 2) Sile i pomeranja glave šipa  $Q, T, M$  i  $s, t, \theta$ .
- 3) Izračunati približne sile u šipovima zanemarujući uticaj tla uz omotač šipa i uklještenje šipa u naglavnici. Komentarisati rezultate pod 2) i 3).



Slika 11.12 Dispozicija opterećenja grupe šipova preko krute naglavnice

šip	koordinate glave šipa		koordinate baze šipa		podaci o nagibu šipova	
	x (m)	z (m)	x (m)	z (m)	cosα	sinα
1	-3.10	0.00	-7.91	14.42	-0.3164	0.9487
2	0.60	0.00	0.60	15.20	0.0000	1.0000
3	3.00	0.00	5.98	14.91	0.1961	0.9806

### 1) Rešenje:

Opterećenje naglavnice u koju je uključena i sopstvena težina, data je po m<sup>1</sup> u pravcu ose y, odnosno upravno na ravan crteža. Šipovi su u pravcu ose y na međusobnom rastojanju od B<sub>y</sub>=2.0m. Da bi se dobilo opterećenje grupe šipova u ravni crteža, potrebno je opterećenje po m<sup>1</sup> naglavnice pomnožiti sa rastojanjem šipova B<sub>y</sub>.

- Proračun karakterističnih parametara šipova

$$E_p I = E_p \frac{d^4}{12} = 21000 \frac{0.4^2}{12} = 44.8 \text{ MNm}^2$$

$$E_p A = 21000 \cdot 0.4^2 = 3360.0 \text{ MN} \quad , \quad S = 4d = 4 \cdot 0.4 = 1.6 \text{ m}$$

$$\lambda_\tau = \sqrt{\frac{k_\tau S}{E_p A}} = \sqrt{\frac{8.6 \cdot 1.6}{3360.0}} = 0.0641 \text{ m}^{-1}, \quad \lambda_\tau L = 0.0641 \cdot 15.2 = 0.974$$

$$\lambda_h = \sqrt[4]{\frac{k_h d}{4E_p I}} = \sqrt[4]{\frac{17.2 \cdot 0.4}{4 \cdot 44.8}} = 0.443 \text{ m}^{-1}, \quad \lambda_h L = 0.443 \cdot 15.2 = 6.733$$

- Proračun elemenata matrice krutosti šipa i tla u lokalnom koordinatnom sistemu:

$$Q_b/Q = 0.21$$

$$f = 1.15 \Rightarrow K_{Qs} = \frac{\lambda_\tau E_p A}{f} = \frac{\lambda_\tau L}{f} \frac{E_p A}{L} = 0.847 \cdot 221.05 = 187.25 \text{ MN/m}$$

$$A(\lambda_h L) = 1.0 \Rightarrow K_{Tt} = K_{Tt\infty} = k_h d / \lambda_h = 17.2 \cdot 0.4 / 0.443 = 15.58 \text{ MN/m}$$

$$B(\lambda_h L) = 1.0 \Rightarrow K_{Mt} = K_{Mt\infty} = k_h d / 2\lambda_h^2 = 17.2 \cdot 0.4 / (2 \cdot 0.443^2) = 17.58 \text{ MN/m}$$

$$K_{T\theta} = K_{T\theta\infty} = k_h d / 2\lambda_h^2 = 17.2 \cdot 0.4 / (2 \cdot 0.443^2) = 17.58 \text{ MNm/r}$$

$$C(\lambda_h L) = 1.0 \Rightarrow K_{M\theta} = K_{M\theta\infty} = k_h d / 2\lambda_h^3 = 17.2 \cdot 0.4 / (2 \cdot 0.443^3) = 39.69 \text{ MNm/r}$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} K_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Tt} & K_{T\theta} \\ 0 & K_{Mt} & K_{M\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix}$$

- Matrica [K] krutosti sistema naglavnica–šipovi–tlo

$$\Delta K = K_{Qs} - K_{Tt}$$

$$= 187.25 - 15.58 = 171.68 \text{ MN/m}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum \Delta K \cos^2 \alpha + K_{T_t} \\ &= 171.68(0.3162^2 + 0.1961^2) + 3.0 \cdot 15.58 = 70.502 \text{ MN/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= \sum \Delta K \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 171.68(-0.162 \cdot 0.9487 + 0.1961 \cdot 0.9806) = -18.491 \text{ MN/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{13} &= \sum \Delta K \cos \alpha (z \cos \alpha - x \sin \alpha) + K_{T_t} z + K_{T\theta} \sin \alpha \\ &= 171.680[-0.3162(3.10 \cdot 0.9487) + 0.1961(-3.0 \cdot 0.9806)] + \\ &\quad + 17.58(0.9487 + 1.0 + 0.9806) = -207.213 \text{ MN/r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{22} &= \sum \Delta K \sin^2 \alpha + K_{T_t} \\ &= 171.68(0.9487^2 + 1.0^2 + 0.9806^2) + 3 \cdot 15.8 = 537.989 \text{ MN/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{23} &= \sum \Delta K \sin \alpha (z \cos \alpha - x \sin \alpha) - K_{T_t} x - K_{T\theta} \cos \alpha \\ &= 171.68[0.9489 \cdot 3.10 \cdot 0.9487 - 1.0 \cdot 0.6 \cdot 1.0 - 0.9806 \cdot 3.0 \cdot 0.9806] \\ &\quad - 15.58(-3.1 + 0.6 + 3.0) - 17.58(-0.3162 + 0.1961) = -124.933 \text{ MN/r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{33} &= \sum \Delta K (x \sin \alpha - z \cos \alpha)^2 + K_{T_t} (x^2 + z^2) + (K_{T\theta} + K_{Mt})(z \sin \alpha + x \cos \alpha) + K_{M\theta} \\ &= 171.68[(-3.1 \cdot 0.9487)^2 + (0.6 \cdot 1.0)^2 + (3.0 \cdot 0.9806)^2] + \\ &\quad + 15.58(3.1^2 + 0.6^2 + 3.0^2) + (17.58 + 17.58)(3.1 \cdot 0.3162 + 3.0 \cdot 0.1961) + 3 \cdot 39.69 \\ &= 3502.014 \text{ MNm/r} \end{aligned}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.502 & -18.491 & -207.213 \\ -18.491 & 537.989 & -124.933 \\ -207.213 & -124.933 & 3502.014 \end{bmatrix}$$

Pomeranje naglavnice će se odrediti za koordinatni početak 0, na osnovu matrice krutosti [K] i opterećenja {P} na dužini koja odgovara rastojanju šipova upravno na ravan crteža, odnosno od dužini  $B_y=2.0\text{m}$ .

$$\{U\} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix} = [K]^{-1} \{P\} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 17.545 & 0.853 & 1.071 \\ 0.853 & 1.919 & 0.119 \\ 1.071 & 0.119 & 0.354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.20 \\ 2.20 \\ -1.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ m}$$

## 2) Rešenje:

- Pomeranja glave šipa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & -x \sin \alpha + z \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & x \cos \alpha + z \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} , \quad \{U_L\} = [T] \{U\}$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -0.3162 & 0.9487 & 2.9409 \\ 0.9487 & 0.3162 & 0.9803 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.75 \cdot 10^{-3} \\ 5.07 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} (m, rad)$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & -0.6000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.23 \cdot 10^{-3} \\ 3.94 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} (m, rad)$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0.1961 & 0.9806 & -2.9417 \\ 0.9806 & -0.1961 & 0.5883 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.94 \cdot 10^{-3} \\ 3.03 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} (m, rad)$$

- Sile na glavi šipa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Ts} & K_{T\theta} \\ 0 & K_{Ms} & K_{M\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix} , \quad \{R_L\} = [K_L] \{U_L\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.75 \cdot 10^{-3} \\ 5.07 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.515 \\ 0.079 \\ 0.089 \end{Bmatrix} (MN, MNm)$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.23 \cdot 10^{-3} \\ 3.94 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.791 \\ 0.061 \\ 0.069 \end{Bmatrix} (MN, MNm)$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.94 \cdot 10^{-3} \\ 3.03 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.923 \\ 0.047 \\ 0.053 \end{Bmatrix} (MN, MNm)$$

- Kontrola globalne ravnoteže prema jednačini (11.12)

$$\sum X = \sum (Q \cos \alpha + T \sin \alpha)_i - P_x = 0$$

$$0.515 \cdot (-0.3162) + 0.079 \cdot 0.949 + 0.061 + 0.923 \cdot 0.1961 + 0.047 \cdot 0.981 - 0.2 = 0.0$$

$$\sum Z = \sum (Q \cos \alpha - T \sin \alpha)_i - P_z = 0$$

$$0.515 \cdot 0.9487 + 0.079 \cdot 0.3162 + 0.791 + 0.923 \cdot 0.9806 + 0.047 \cdot (-0.981) - 2.2 = 0.0$$

$$\sum M = \sum [M_i + (Q \cos \alpha + T \sin \alpha)_i z_i - (Q \cos \alpha - T \sin \alpha)_i x_i] - M_o = 0$$

$$0.089 + 0.069 + 0.053 - (0.515 \cdot 0.9487 + 0.079 \cdot 0.3162)(-3.1) - (0.791)0.6 - \\ - (0.923 \cdot 0.9806 + 0.047 \cdot (-0.981))3.1 + (-1.36) = 0.0$$

### 3) Rešenje:

U približnoj analizi se zanemaruje tlo duž omotača šipa i uklještenje šipova u naglavnicu. Pretpostavlja se da su šipovi zglobno vezani za naglavnicu i zglobno oslonjeni u bazi. Na taj način se šipovi svode na proste štapove koji prenose samo aksijalne sile. Kontrola statičke određenosti sistema za n=6 stepeni slobode (n=broj tačaka), za broj štapova Z<sub>s</sub>=5, broj krutih uglova Z<sub>k</sub>=1, broj oslonaca Z<sub>o</sub>=6 i broj uklještenja Z<sub>u</sub>=0, glasi:

$$Z_s + Z_k + Z_o + Z_u = 2n \quad \Rightarrow \quad 5 + 1 + 6 + 0 = 2n \quad 12 = 2 \cdot 6$$

Pošto je sistem statički određen, sile u šipovima se mogu odrediti iz uslova ravnoteže:

$$\sum Q_i \cos \alpha_i = P_x \quad \Rightarrow \quad Q_1(-0.3162) + Q_2 \cdot 0 + Q_3 0.1961 = 0.20$$

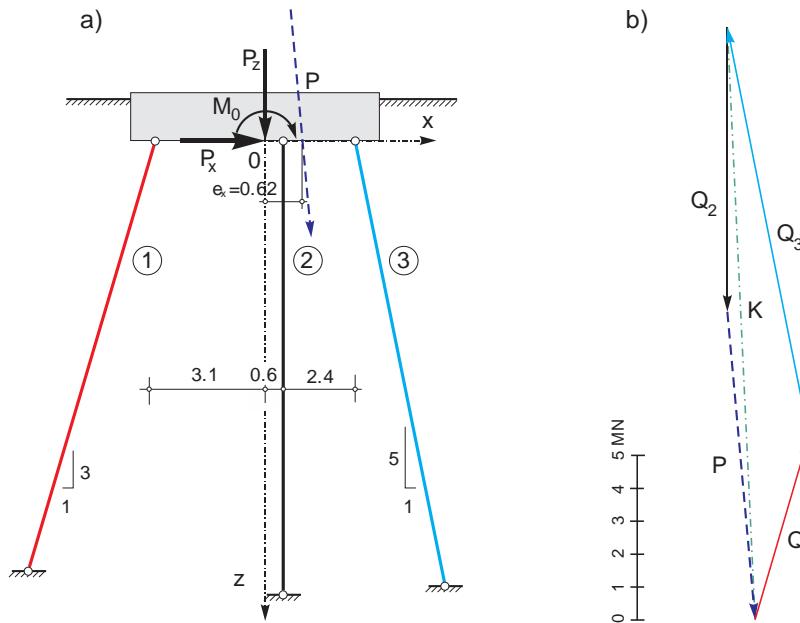
$$\sum Q_i \sin \alpha_i = P_z \quad \Rightarrow \quad Q_1 0.9487 + Q_2 1 + Q_3 0.9806 = 2.20$$

$$\sum Q_i \sin \alpha_i x_i = M_o \quad \Rightarrow \quad Q_1 0.9487(-3.1) + Q_2 0.6 + Q_3 0.9806 \cdot 3.0 = -(-1.36)$$

$$\begin{bmatrix} -0.3162 & 0 & 0.1961 \\ 0.9489 & 1 & 0.9806 \\ -2.9416 & 0.6 & 2.9418 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.20 \\ 2.20 \\ 1.36 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.49 \\ 22.61 \\ -12.64 \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0.515 \\ 0.791 \\ 0.923 \end{Bmatrix} (MN)$$

Ako se sile dobijene prema uprošćenom postupku, uporede sa silama dobijenim na osnovu Vinkler-ove metode, mogu se konstatovati neprihvatljivo velike razlike, koje u konkretnom slučaju ne opravdavaju primenu uprošćene metode.

Na slici 11.13a je prikazana dispozicija šipova za uprošćen postupak proračuna. Zadato opterećenje vertikalnom silo, horizontalnom silom i spregom sila, može se svesti na ekscentričnu i kosu silu P (prikazano isprekidanom linijom).



a) Dispozicija šipova za uprošćenu metodu proračuna b) Poligon sila (Cullman)

Na slici 11.13b je prikazan poligon sila sa rezultatom grafičkog postupka prema Cullman-u. Zbog ograničene veličine crteža, postupak nije prikazan na planu položaja sila (Slika 11.13a).

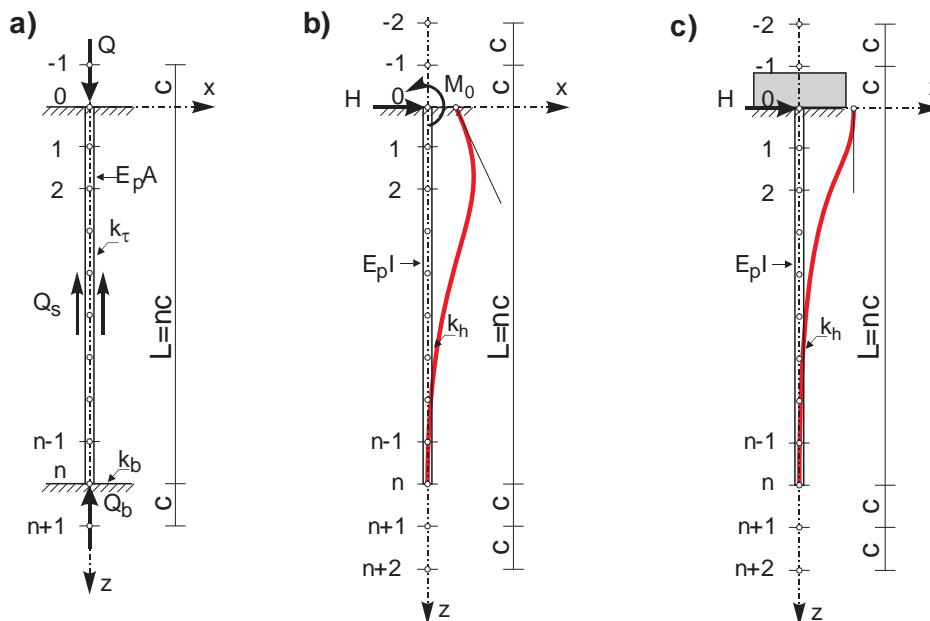
U udžbenicima iz fundiranja, može se naći velik broj praktičnih primera fundiranja na manjoj grupi šipova povezanih krutom naglavnicom (vidi Osnovi Fundiranja), gde se sile određuju na osnovu uprošćene metode.

Kada omotač šipa prolazi kroz slabo nosive slojeve, odnosno kada je nosivosti omotača šipa zanemarljiva, šipovi su u statickom smislu stoeći jer prenose opterećenje isključivo bazom. U tom slučaju, sile u šipovima se mogu relativno tačno odrediti na osnovu uprošćene metode.

## PRIBLIŽAN PRORAČUN ŠIPA U VINKLER-OVOJ SREDINI

U opštem slučaju, kada je horizontalni modul reakcije tla proizvoljno promenljiva veličina po dubini, može se primeniti neka od približnih numeričkih metoda, kao npr. metoda konačnih razlika (MKR) ili metoda konačnih elemenata (MKE). Osim promenljivog modula reakcije tla po dubini, numeričke metode omogućavaju uvođenje nelinearne zavisnosti između kontaktnog napona i pomeranja.

Kod vertikalno opterećenog šipa, nelinearna zavisnost se uvodi preko tzv. **t-z** a kod horizontalno opterećenog šipa **p-y** funkcije. Nelinearnost ima prvenstveno velik uticaj na ponašanje horizontalno opterećenih šipova, jer se na maloj dubini, već pri vrlo niskim opterećenjima pojavljuju plastične deformacije tla usled iscrpljenja njegove nosivosti. Pomoću **p-y** funkcije, koje se određuju teorijski i eksperimentalno, mogu se aproksimirati deformacijske karakteristike tla kako pri statičkom tako i dinamičkom ili cikličkom opterećenju. To je vrlo korisno kod projektovanja šipova za objekte izložene povremenom ili cikličnom opterećenju, kao npr. dejstvu talasa, vетра, udarnom dejstvu leda i sl. (offshore platforme, pristaništa, vetrogeneratori). Pošto je jednostavnija za primenu, prikazće se samo MKR. Na slici 12.1 je prikazana diskretizacija šipa za vertikalno i bočno opterećenje (horizontalnom silom i momentom), sa oznakama čvorova za primenu MKR.



**Slika 12.1** a) Vertikalno opterećen šip  
b) Bočno opterećen šip – slobodna glava, c) Bočno opterećen šip – Uklještena glava

## 12.1 Šip opterećen aksijalnom silom

Ako se diferencijalna jednačina aksijalno opterećnog šipa (11.1a) napiše u diferencnom obliku za proizvoljnu tačku "i" dobija se sledeći izraz:

$$E_p A \frac{d^2 w}{dz^2} - S \cdot k_\tau(z) \cdot w = 0 \Rightarrow E_p A \left( w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} - \frac{Sc^2 k_\tau}{E_p A} w_i \right) = 0 \quad (12.1)$$

gde je:  $S, E_p A$  = obim i aksijalna krutost šipa  
 $k_\tau(z)$  = smičući modul reakcije tla duž omotača šipa u MN/m<sup>3</sup>

Granični uslovi za glavu i bazu šipa su određeni na osnovu ukupne sile Q koja deluje na glavi šipa (Slika 12.1a) i komponente ukupne sile  $Q_b = A_b k_b w_n$  koja deluje u bazi šipa ( $A_b$  je površina baze šipa, a  $k_b$  je modul reakcije tla ispod baze šipa).

$$F(z) = -E_p A \frac{dw}{dz} \Rightarrow F_i = -E_p A \frac{-w_{i-1} + w_{i+1}}{2c} \quad (12.2a)$$

$$F_0 = Q = -E_p A \frac{-w_{-1} + w_1}{2c} \Rightarrow w_{-1} = w_1 + \frac{2Qc}{E_p A} \quad (12.2b)$$

$$F_n = Q_b = A_b k_b w_n = -E_p A \frac{-w_{n-1} + w_{n+1}}{2c} \Rightarrow w_{n+1} = w_{n-1} + \frac{2c k_b A_b}{E_p A} w_n \quad (12.2c)$$

Diferencna jednačina za tačku  $i=0$ , nakon uvođenja graničnog uslova 12.2b, glasi:

$$E_p A \left( -2w_0 + 2w_1 - \frac{Sc^2 k_\tau}{E_p A} w_0 \right) = -2Q$$

Diferencna jednačina za tačku  $i=n$ , nakon uvođenja graničnog uslova 12.2c, glasi:

$$E_p A \left( 2w_{n-1} - 2w_n - \frac{Sc^2 k_\tau}{E_p A} \left( 1 - \frac{2A_b}{Sc} \frac{k_b}{k_\tau} \right) w_n \right) = 0$$

Ako se diferencna jednačina (12.1) napiše za sve čvorne tačke  $i=0,1..n$ , grupisanjem koeficijenata uz nepoznata pomeranja, dobija se sledeća matrična jednačina:

$$E_p A \left( [D] + \frac{Sc^2}{E_p A} [\xi k_\tau] \right) \{w\} = \{P\} \quad , \quad [K_p] \{w\} = \{P\} \quad (12.3)$$

$$[K_p] = E_p A \left( [D] + \frac{Sc^2}{E_p A} [\xi k_\tau] \right), \quad \xi = \begin{cases} 1 & i = 0, \dots, n-1 \\ 1 - 2 \frac{A_b}{Sc} \frac{k_b}{k_\tau} & i = n \end{cases}$$

U jednačini 12.3, dijagonalna matrica  $[k_{\tau}]$  može imati proizvoljne vrednosti u zavisnosti od deformacijskih karakteristika tla koje se menjaju duž omotača šipa. Matrica diferencnog operatora i vektor opterećenja za vertikalno opterećen šip su:

$$[D] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{bmatrix} -2Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 12.2 Šip opterećen horizontalnom silom i momentom

Kod bočno opterećenih šipova, po pravilu se mogu javiti dva karakteristična slučaja, u zavisnosti od graničnih uslova (Slika 12.1b i 12.1c).

Ako je glava šipa slobodna, tada su granični uslovi po silama, odnosno transverzalna sila i moment savijanja na glavi šipa moraju biti jednak horizontalnoj sili i momentu koji deluje na glavi šipa. Ako je obrtanje glave šipa sprečeno (uklještenje), tada su granični uslovi mešoviti, po silama i pomeranjima, odnosno transverzalna sila je jednakoj horizontalnoj sili koja deluje na glavi šipa a obrtanje glave šipa je nula. Što se tiče baze šipa, na njoj su granični uslovi identični kao kod grede sa slobodnim krajevima, odnosno homogeni po silama.

Diferencijalna jednačina šipa u Vinklerovoј sredini, koji je na glavi opterećen horizontalnom silom i momentom, glasi:

$$E_p I \frac{d^4 u}{dz^4} = -q(z), \quad q(z) = d \cdot k_h(z) \cdot u \quad (12.4)$$

gde je:  $q$  = kontaktni napon duž šipa u  $\text{kN/m}$

$E_p I$  = krutost šipa na savijanje  $\perp$  na pravac pomeranja u

$d$  = dimenzija šipa u pravcu  $\perp$  na pravac pomeranja u

$k_h(z)$  = horizontalni modul reakcije tla duž omotača šipa

$u$  = horizontalno pomeranje šipa

Jednačina (12.4) je slična jednačini (3.1) grede na Vinklerovoј podlozi, s tom razlikom što je aktivno opterećenje  $p(z)$  duž ose šipa jednako nuli. U diferencnom obliku, za proizvoljnu tačku i jednačina glasi:

$$E_p I \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{c^4} + d \cdot k_h \cdot u_i = 0 \quad (12.5)$$

Diferencna jednačina se može napisati za sve tačke šipa i=0,..n stim što se fiktivna pomeranja u tačkama i= -2 i i= -1 moraju odrediti na osnovu graničnih uslova na glavi šipa. Glava šipa može biti slobodna – slobodno pomerljiva ili uklještena.

Bez obzira na granične uslove na glavi šipa, granični uslovi u bazi su identični kao kod temeljnog nosača sa slobodnim krajevima, odnosno:

$$M_n = -E_p I \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{c^2} = 0 \Rightarrow u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad (12.6)$$

$$T_n = -E_p I \frac{-u_{n-2} + 2u_{n-1} - 2u_{n+1} + u_{n+2}}{2c^3} = 0 \Rightarrow u_{n+2} = u_{n-2} - 2u_{n-1} + 2u_{n+1} \quad (12.7)$$

$$u_{n+2} = 4u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}$$

### 12.2.1 Slobodna glava šipa

Na slici 12.1b je prikazana diskretizacija šipa i opterećenje na glavi šipa koja je slobodno pomerljiva. Prema usvojenoj konvenciji, pozitivna horizontalna sila deluje u pravcu pozitivne ose x (na desnu stranu), dok pozitivan moment (spreg sila) deluje suprotno od smera obrtanja kazaljke na satu. Pozitivno pomeranje je u smeru +x a pozitivan nagib  $\theta$  elastične linije je u pravcu I-III kvadrant (mereno od ose z suprotno od smera kretanja kazaljke na satu). Moment savijanja i granični uslov na glavi šipa glasi:

$$M(z) = -E_p I \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad M(0) = M_0$$

$$-E_p I \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{c^2} = M_0 \Rightarrow u_{-1} = 2u_0 - u_1 - \frac{c^3}{E_p I} \frac{M_0}{c} \quad (12.8)$$

Transverzalna sila i granični uslov na glavi šipa glasi:

$$T(z) = -E_p I \frac{d^3 u}{dz^3}, \quad T(0) = H$$

$$-E_p I \frac{-u_{-2} + 2u_{-1} - 2u_1 + u_2}{2c^3} = -H \Rightarrow u_{-2} = 2u_{-1} - 2u_1 + u_2 - \frac{2c^3}{E_p I} H$$

$$u_{-2} = 2 \left( 2u_0 - u_1 - \frac{c^3}{E_p I} \frac{M_0}{c} \right) - 2u_1 + u_2 - \frac{2c^3}{E_p I} H$$

$$u_{-2} = 4u_0 - 4u_1 + u_2 - \frac{2c^3}{E_p I} \left( H + \frac{M_0}{c} \right) \quad (12.9)$$

Diferencna jednačine savijanja šipa (12.5) za čvorne tačke i=0 i i=1, nakon smene fiktivnih pomeranja  $u_{.1}$  i  $u_{.2}$  (prema izrazima 12.8 i 12.9) i sređivanja, glasi:

$$i=0 \quad \frac{E_p I}{c^3} \left( 2u_0 - 4u_1 + 2u_2 + \frac{dc^4}{E_p I} k_h u_0 \right) = 2 \left( H - \frac{M_0}{c} \right) \quad (12.10)$$

$$i=1 \quad \frac{E_p I}{c^3} \left( -2u_0 + 5u_1 - 4u_2 + u_3 + \frac{dc^4}{E_p I} k_h u_1 \right) = \frac{M_0}{c} \quad (12.11)$$

Diferencna jednačine savijanja šipa (12.5) za čvorne tačke i=n-1 i i=n, nakon smene fiktivnih pomeranja  $u_{n+1}$  i  $u_{n+2}$  (prema izrazima 10.6 i 10.7) i sređivanja, glasi:

$$i=n-1 \quad \frac{E_p I}{c^3} \left( u_{n-3} - 4u_{n-2} + 5u_{n-1} - 2u_n + \frac{dc^4}{E_p I} k_h u_{n-1} \right) = 0 \quad (12.12)$$

$$i=n \quad \frac{E_p I}{c^3} \left( 2u_{n-2} - 4u_{n-1} + 2u_n + \frac{dc^4}{E_p I} k_h u_n \right) = 0 \quad (12.13)$$

Konstantni koeficijenti uz nepoznata horizontalna (bočna) pomeranja šipa, formiraju elemente matrice diferencnog operatara [D], koja je identična matrici diferencnog operatora za temeljnu gredu na deformabilnoj podlozi. U matričnom obliku, jednačina savijanja šipa glasi:

$$\frac{E_p I}{c^3} \left( [D] + \frac{dc^4}{E_p I} [k_h] \right) \{u\} = \{P\} \quad , \quad [K_p] \{u\} = \{P\} \quad (12.14)$$

$$[K_p] = \frac{E_p I}{c^3} \left( [D] + \frac{dc^4}{E_p I} [k_h] \right)$$

Množitelj vektora pomeranja na levoj strani jednačine 12.14 je matrica krutosti šipa i tla [ $K_p$ ] a desna strana jednačine je vektor opterećenja  $\{P\}$ .

U jednačini 12.14, dijagonalna matrica  $[k_h]$  može imati proizvoljne vrednosti u zavisnosti od deformacijskih karakteristika tla koje se menjaju duž omotača šipa.

Matrica diferencnog operatora i vektor opterećenja za poprečno opterećen šip sa slobodnom glavom, glase:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 2 & -4 & 2 & & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 5 & -2 & & \\ 2 & -4 & 2 & & & \end{array} \right], \quad \{P\} = \left\{ \begin{array}{l} 2(H - M_0/c) \\ M_0/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

## 12.2.2 Uklještena glava šipa

Na slici 12.1c je prikazana diskretizacija šipa i opterećenje na glavi šipa čije je obrtanje sprečeno (uklještenje). Prema usvojenoj konvenciji, pozitivna horizontalna sila deluje u pravcu pozitivne ose x (na desnu stranu), dok spoljni-aktivni moment  $M_0$  jednak nuli. Pozitivno pomeranje je u smeru +x a pozitivan nagib  $\theta$  elastične linije je u pravcu I-III kvadrant (mereno od ose z suprotno od smera kretanja kazaljke na satu). Nagib elastične linije i granični uslov na glavi šipa glasi:

$$\theta(z) = \frac{du}{dz}, \quad \theta(0) = 0$$

$$\frac{-u_{-I} + u_I}{2c} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{-I} = u_I \quad (12.15)$$

Transverzalna sila i granični uslov na glavi šipa glasi:

$$T(z) = -E_p I \frac{d^3 u}{dz^3}, \quad T(0) = H$$

$$-E_p I \frac{-u_{-2} + 2u_{-I} - 2u_I + u_2}{2c^3} = -H \Rightarrow u_{-2} = -\frac{2c^3}{E_p I} H + 2u_{-I} - 2u_I + u_2$$

$$u_{-2} = -\frac{2c^3}{E_p I} H + u_2 \quad (12.16)$$

Diferencna jednačine savijanja šipa (12.5) za čvorne tačke  $i=0$  i  $i=1$ , nakon smene fiktivnih pomeranja  $u_{-1}$  i  $u_{-2}$  (prema izrazima 12.15 i 12.16) i sređivanja, glasi:

$$i=0 \quad \frac{E_p I}{c^3} \left( 6u_0 - 8u_1 + 2u_2 + \frac{dc^4}{E_p I} k_h u_0 \right) = 2H \quad (12.17)$$

$$i=I \quad \frac{E_p I}{c^3} \left( -4u_0 + 7u_1 - 4u_2 + u_3 + \frac{dc^4}{E_p I} k_h u_I \right) = 0 \quad (12.18)$$

Konstantni koeficijenti uz nepoznata horizontalna (bočna) pomeranja šipa, formiraju elemente matrice diferencnog operatora [D]. U matričnom obliku, jednačina savijanja šipa glasi:

$$[K_p] = \frac{E_p I}{c^3} \left( [D] + \frac{dc^4}{E_p I} [k_h] \right) \quad (12.19)$$

Jednačina šipa sa uklještenom glavom je slična jednači 12.14 za šip sa slobodnom glavom. Razlika je u matrici diferencnog operatora [D] i vektoru opterećenja {P}. Matrica diferencnog operatora i vektor opterećenja za poprečno opterećen šip sa uklještenom glavom, glase:

$$[D] = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 2 \\ -4 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \{P\} = \begin{bmatrix} 2H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## BROJNI PRIMER – 12.1

Čelični šip  $\varnothing 610\text{mm}$ , dužine  $L=16.0\text{m}$ , pobijen je u rečno dno. Poprečni presek šipa je  $A=188\text{cm}^2$ , moment inercije  $I=84680\text{cm}^4$ , otporni moment  $W=2778\text{cm}^3$  a dozvoljeni napon savijanja  $\sigma_{s,\text{dop}}=16\text{kN/cm}^2$ . Rečno dno je srednje zbijen pesak ( $n_h=9.0 \text{ MN/m}^3$ ). Dužina šipa u rečnom dnu je  $10.0\text{m}$ . Horizontalna sila na glavi šipa iznosi  $T=100 \text{ kN}$ . Koristeći MKR, za podelu šipa na  $n=10$  delova, za varijantu da je glava šipa slobodna ili uklještena, odrediti: a) pomeranja po MKR i po Barber-u i presečne sile duž šipa po MKR, b) Maksimalni računski napon savijanja u šipu, c) Matricu krutosti šipa.

Rešenje:

- a) Duž gornjeg dela šipa od  $0.0-6.0\text{m}$  koji prolazi kroz vodu, elementi matrice krutosti  $[k_h]$  su jednaki nuli. Na donjem delu šipa od  $D=6.0-16.0\text{m}$ , elementi matrice krutosti  $[k_h]$  su određeni prema izrazu  $k_h=n_h(z/d)$ .

Elementi transponovane matrice  $[k_h]^T$  u  $\text{MN/m}^3$  i opterećenja  $\{P\}$  u  $\text{kN}$  glase:

$$[k_h]^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5.91 & 29.53 & 53.15 & 76.77 & 100.39 & 124.02 & 147.64 \end{vmatrix}$$

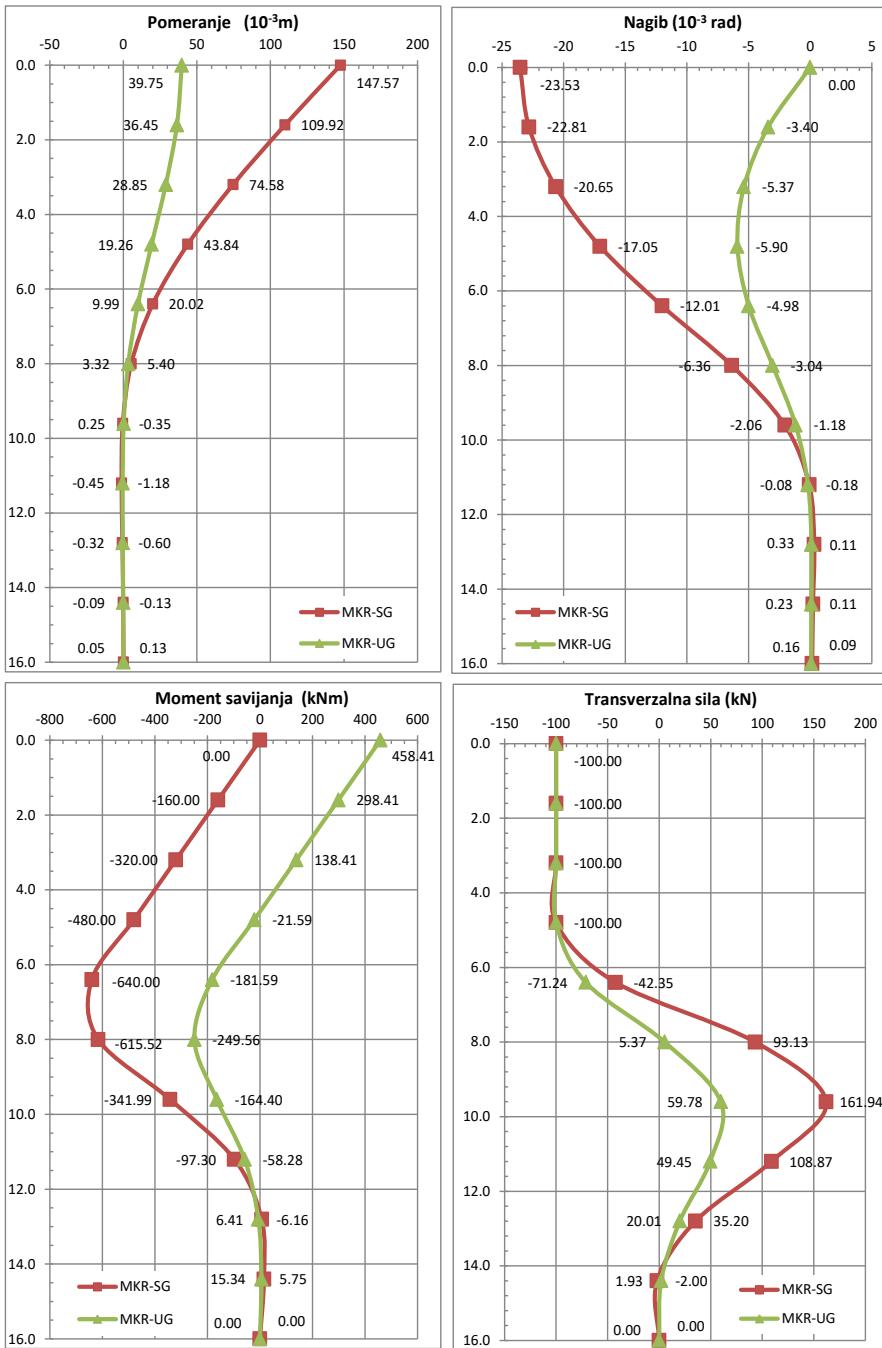
$$\{P\}^T = \begin{vmatrix} 200.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Na osnovu jednačine (10.14), matrica krutosti za slobodnu glavu šipa  $[K_p]$  glasi:

$$[K_p] = \begin{vmatrix} 86.83 & -173.66 & 86.83 & & & & & & & & \\ -86.83 & 217.08 & -173.66 & 43.42 & & & & & & & \\ 43.42 & -173.66 & 260.49 & -173.66 & 43.42 & & & & & & \\ & 43.42 & -173.66 & 260.49 & -173.66 & 43.42 & & & & & \\ & & 43.42 & -173.66 & 266.25 & -173.66 & 43.42 & & & & \\ & & & 43.42 & -173.66 & 289.29 & -173.66 & 43.42 & & & \\ & & & & 43.42 & -173.66 & 312.33 & -173.66 & 43.42 & & \\ & & & & & 43.42 & -173.66 & 335.37 & -173.66 & 43.42 & \\ & & & & & & 43.42 & -173.66 & 358.41 & -173.66 & 43.42 \\ & & & & & & & 43.42 & -173.66 & 338.04 & -86.83 \\ & & & & & & & & 86.83 & -173.66 & 230.83 \end{vmatrix}$$

Na osnovu jednačine (10.19), matrica krutosti za uklještenu glavu šipa  $[K_p]$  glasi:

$$[K_p] = \begin{vmatrix} 260.49 & -347.32 & 86.83 & & & & & & & & \\ -173.66 & 303.91 & -173.66 & 43.42 & & & & & & & \\ 43.42 & -173.66 & 260.49 & -173.66 & 43.42 & & & & & & \\ & 43.42 & -173.66 & 260.49 & -173.66 & 43.42 & & & & & \\ & & 43.42 & -173.66 & 266.25 & -173.66 & 43.42 & & & & \\ & & & 43.42 & -173.66 & 289.29 & -173.66 & 43.42 & & & \\ & & & & 43.42 & -173.66 & 312.33 & -173.66 & 43.42 & & \\ & & & & & 43.42 & -173.66 & 335.37 & -173.66 & 43.42 & \\ & & & & & & 43.42 & -173.66 & 315.00 & -86.83 & 43.42 \\ & & & & & & & 43.42 & -173.66 & 338.04 & -86.83 \\ & & & & & & & & 86.83 & -173.66 & 230.83 \end{vmatrix}$$



Slika 12.2

a) Pomeranja duž šipa  $\{u\}$  i  $\{\theta\}$ b) Presečne sile duž šipa  $\{M\}$  i  $\{T\}$

b) Maksimalni računski napon u šipu na savijanje

Maksimalni moment savijanja u šipu sa slobodnom glavom iznosi oko  $M_{max}=650\text{kNm}$  a sa uklještenom glavom oko  $M_{max}=250\text{kNm}$ . Maksimalni napon na savijanje za šip sa slobodnom i uklještenom glavom iznosi:

$$\sigma_{s,max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{650 \cdot 100}{2778} = 23.4 \text{kN/cm}^2 > \sigma_{s,dop} = 16.0 \text{kN/cm}^2$$

$$\sigma_{s,max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{250 \cdot 100}{2778} = 9.0 \text{kN/cm}^2 < \sigma_{s,dop} = 16.0 \text{kN/cm}^2$$

Pomeranje i obrtanje šipa u nivou terena (rečnog dna) prema Barber-u:

$$E_p I = 210.0 \cdot 10^3 \cdot 8.468 \cdot 10^{-4} = 177.828 \text{ MNm}^2$$

$$\eta L = \sqrt[5]{\frac{n_h}{E_p I}} \cdot L = \sqrt[5]{\frac{9.0}{177.828}} \cdot 10.0 = 5.506 > 4$$

$$t_0 = \frac{2.4T}{n_h^{0.6}(E_p I)^{0.4}} + \frac{1.6T \cdot e}{n_h^{0.4}(E_p I)^{0.6}} = \frac{2.4 \cdot 0.10}{9^{0.6} 177.83^{0.4}} + \frac{1.6 \cdot 0.10 \cdot 6}{9^{0.4} 177.83^{0.6}}$$

$$t_0 = 25.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_0 = -\frac{1.6T}{(n_h)^{0.4}(E_p I)^{0.6}} - \frac{1.74T \cdot e}{(n_h)^{0.2}(E_p I)^{0.8}} = -\frac{1.6 \cdot 0.10}{9^{0.4} 177.83^{0.6}} - \frac{1.74 \cdot 0.10 \cdot 6}{9^{0.2} 177.83^{0.8}}$$

$$\theta_0 = -13.6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Na pomeranje i obrtanje šipa u nivou terena, treba dodati uticaje konzolnog dela šipa iznad rečnog dna, visine  $h=6.0\text{m}$ , usled sile  $T=0.1 \text{ MN}$ , prema sledećem izrazu:

$$t = t_0 - \theta_0 h + \frac{Th^3}{3E_p I} = 25.9 \cdot 10^{-3} + 13.6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 + \frac{0.10 \cdot 6^3}{3 \cdot 177.83} = 148.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{Th^2}{2E_p I} = 13.6 \cdot 10^{-3} - \frac{0.10 \cdot 6^2}{2 \cdot 177.828} = -23.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Dobijene vrednosti su prosečno veće za oko 0.5% u odnosu na vrednosti po MKR.

c) Matrica krutosti šipa:

Za proračun grupe šipova povezanih krutom naglavnicom, neophodno je odrediti matricu krutosti šipa  $[K_L]$  u lokalnom koordinatnom sistemu. Za šip u homogenom tlu sa konstantnim modulom reakcije  $k_\tau$  i  $k_h$  duž šipa, matrica krutosti se može odrediti direktno, prema izrazima 11.4, 11.6, 11.7, dok se za šip sa proizvoljnom promenom modula reakcije duž šipa, matrica krutosti može odrediti preko matrice fleksibilnosti.

Usled jedinične horizontalne sile  $T=1\text{MN}$  u nivou glave šipa, koja deluje u pozitivnom smeru ose x, horizontalno pomeranje i obrtanje glave šipa iznosi  $s_T = 1.4757 \text{ m/MN}$  i  $\theta_T = -0.2353 \text{ rad/MN}$ .

Usled jediničnog momenta  $M=1\text{MNm}$  u nivou glave šipa, koji deluje suprotno od smera obrtanja kazaljke na satu, horizontalno pomeranje i obrtanje glave šipa iznosi  $s_M = -0.2353 \text{ m/MNm}$  i  $\theta_M = 0.0513 \text{ rad/MNm}$ .

Dobijena pomeranja i obrtanja, mogu se prikazati matricom fleksibilnosti  $[F_L]$

$$[F_L] = \begin{bmatrix} F_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & 1.4757 & -0.2353 \\ 0 & -0.2353 & 0.0513 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti šipa pretstavlja inverznu matricu fleksibilnosti, i iznosi:

$$[K_L] = [F_L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/F_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & 2.5170 & 11.5362 \\ 0 & 11.5362 & 72.3529 \end{bmatrix}$$

Pošto su vandijagonalni elementi u 1 redu i koloni matrice fleksibilnosti jednaki nuli, elementi matrice krutosti se mogu odrediti inverzijom submatrice, čiji se elementi nalaze u presecima 2 i 3 reda sa 2 i 3 kolonom, dok se element matrice krutosti  $K_{Qs}$  može dobiti direktno kao recipročna vrednost elementa matrice  $F_{Qs}$ .

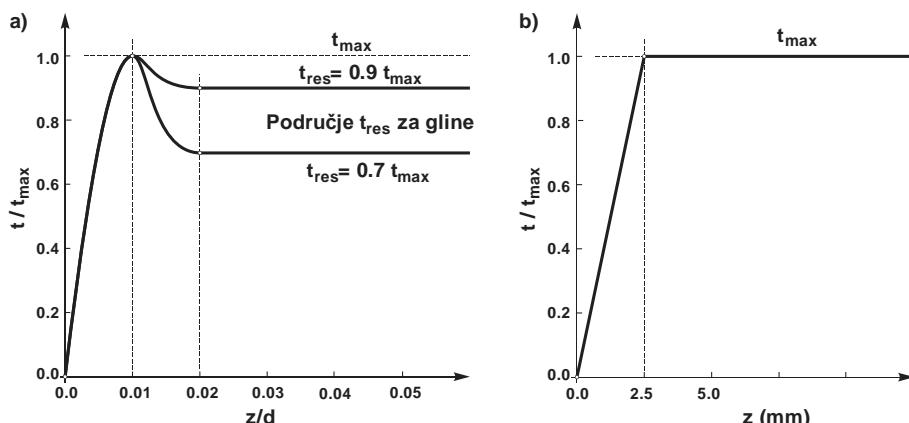
## 12.3 Šip u nelinearnoj Vinkler-ovoj sredini

Kao što je već prethodno istaknuto, granični otpor tla uz omotač šipa se dostiže pri relativno malim pomeranjima. Kod šipa opterećenog aksijalnom silom, otpor tla uz omotač se iscrpljuje pri smicanju šip-tlo reda veličine 0.5% od prečnika šipa, počev od površine terena prema dubini. Kod baze šipa, lom je drugačiji jer se nosivost iscrpljuje pri znatno većim pomeranjima, reda 10-20% prečnika šipa. Kod bočno opterećenog šipa, relativna pomeranja pri iscrpljenju nosivosti su sličnog reda kao kod smicanja kontakta šip-tlo pri aksijalnom opterećenju šipa.

Da bi se uzele u obzir nelinearne naponsko deformacije u tlu i plastifikacija tla oko omotača pri nivoima radnog opterećenja šipa, u praksi je razvijen koncept nelinearnih Vinkler-ovih opruga. Kod aksijalno opterećenih šipova je razvijen  $t$ - $z$  i  $Q$ - $z$  model, a kod bočno opterećenih šipova  $p$ - $y$  model. Ovi modeli odgovara su razvijeni za različite tipove tla u uslovima statičkog i cikličkog opterećenja i ugrađeni su u velik broj komercijalnih softvera. U narednim poglavljima će se zbog široke primene ovih modela, ukazati na njihove osnovne karakteristike.

### 12.3.1 Aksijalno opterećen šip ( $t$ - $z$ i $Q$ - $z$ krive )

Krive  $t$ - $z$  i  $Q$ - $z$  su numerički modeli, koji su prvi put razvijeni za potrebe fundiranja naftnih ofšor platformi, koje moraju biti sposobljene za prijem velikih statičkih i cikličkih aksijalnih opterećenja. Aksijalna nosivost šipa, kao što je poznato, pretstavlja zbir otpornosti na trenje duž omotača i otpora u bazi šipa. Odnos između mobilisanog otpora na trenje duž omotača šipa i lokalnog aksijalnog pomeranja šipa na bilo kojoj dubini, opisuje se pomoću  $t$ - $z$  krive. Veličina  $t$  ima dimenziju [ $\text{kN}/\text{m}$ ] i pretstavlja angažovanu trenje po obimu šipa, dok veličina  $z$  [ $\text{m}$ ] pretstavlja relativno vertikalno pomeranje kontakta šip-tlo. Slično tome, odnos između mobilisanog otpora u bazi šipa i sleganja baze šipa, opisan je pomoću  $Q$ - $z$  krive.  $Q$  ima dimenziju sile [ $\text{kN}$ ] i pretstavlja angažovan otpor tla u bazi šipa, a  $z$  je vertikalno pomeranje baze šipa. Postoji velik broj preporuka za  $t$ - $z$  krive, a jedan od karakterističnih oblika prema API RP2A, prikaje slika (12.3a) za gline i (12.3b) za pesak.



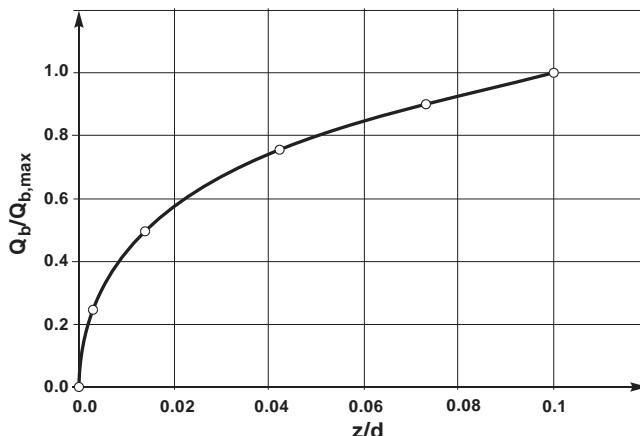
Slika 12.3 a) Skica t-z krive za gline b) Skica t-z krive za peskove

Aksijalna nosivost šipa usled trenja okolnog tla i aksijalna deformacija baze šipa, sastoji se od 4 komponente: elastične deformacije šipa, elastične deformacije tla, plastične deformacije tla i plastičnog smicanja šip-tlo. Svrha  $t$ -z krive je modelovanje poslednje tri komponente.  $Q$ -z kriva modeluje elasto-plastične deformacije tla oko baze šipa. Elastična deformacija šipa nije direktno vezana za karakteristike tla već se modeluje kao aksijalno napregnut štapni element.

U prošlosti,  $t$ -z krive su bile zasnovane direktno na eksperimentalnim dokazima koje su dali Coyle and Reese (1966). To je dovelo do usvojenog standarda, da se vršna čvrstoća omotača u pesku mobilise pri relativnom pomeranju šip-tlo ( $Z_c$ ) od 2.54 mm (0.1 inč). Za gline, vrednost je 1% prečnika šipa. Pokazano je teorijski i eksperimentalno, da će oblik  $t$ -z krive biti funkcija dužine i prečnika šipa, krutosti tla i otpornosti omotača (Kraft et al., 1981).

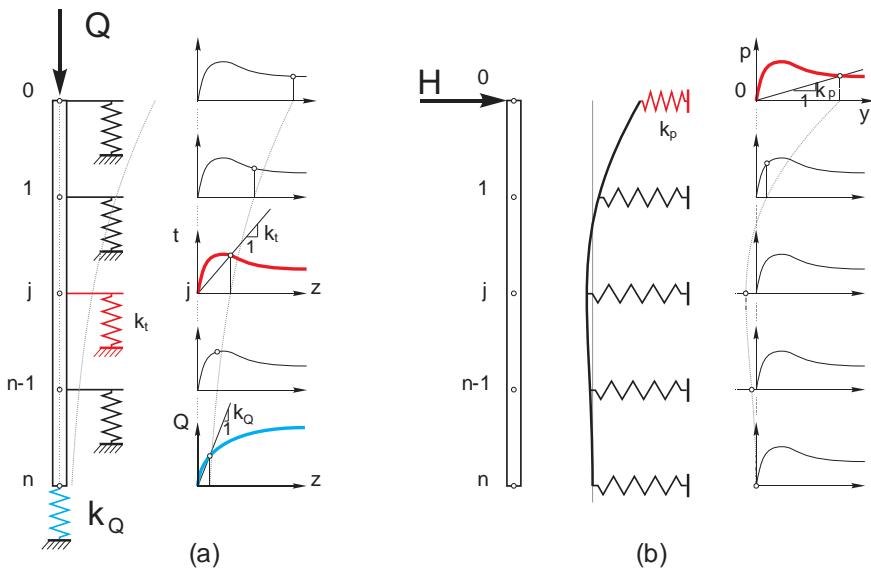
Kod peskova se koristi elasto-plastični model otpornosti omotača, koji se može adaptirati na vršno-rezidualni oblik prema Wiltsie et al. (1982). Kod glina se koristi vršno-rezidualni oblik otpora omotača, pri čemu je rezidualni otpor 70-90% vršnog. Vijayvergiya (1977) ukazuje na to da se odnos smanjuje sa porastom stepena prekonsolidacije. Odnos  $t_r/t_{max}$  zavisi od više faktora: naponsko-deformacijske karakteristike i naponska istorija tla, način ugradnje šipa i dr. Za pouzdanije određivanje ovog odnosa, vrlo su korisna terenska i laboratorijska ispitivanja.

Za određivanje  $Q$ -z krive, neophodno je probno opterećenje šipa sa merenjem sile i sleganja baze šipa. Međutim, opšte je poznato da se nosivost baze iscrpljuje pri relativno velikom vertikalnom pomeranju, reda veličine 10-20% od prečnika baze šipa, kako u pesku tako i u glini. U nedostatku drugih podataka, preporučuje se kriva na slici (4.6) i za pesak i za glinu.



Slika 12.4 Prikaz  $Q$ -z krive za gline i peskove

U analizi, šip se deli na male vertikalne segmente, a za svaki segment se kao ulaz daju  $t$ -z i  $Q$ -z krive. U zavisnosti od veličine vertikalnog pomeranja šipa, otpor tla na omotaču iz  $t$ -z krive i otpora u bazi iz  $Q$ -z krive se može odrediti iterativno. Razvojem numeričkih metoda (MKE, MKR), računara i komercijalnih softvera, analiza aksijalno opterećenih šipova zasnovanih na ovom konceptu je danas najviše u upotrebi za praktične proračune.



Slika 12.5 Mehanička interpretacija za: a) t-z krive, Q-z krive b) p-y krive

### 12.3.2 Bočno opterećen šip ( p-y krive )

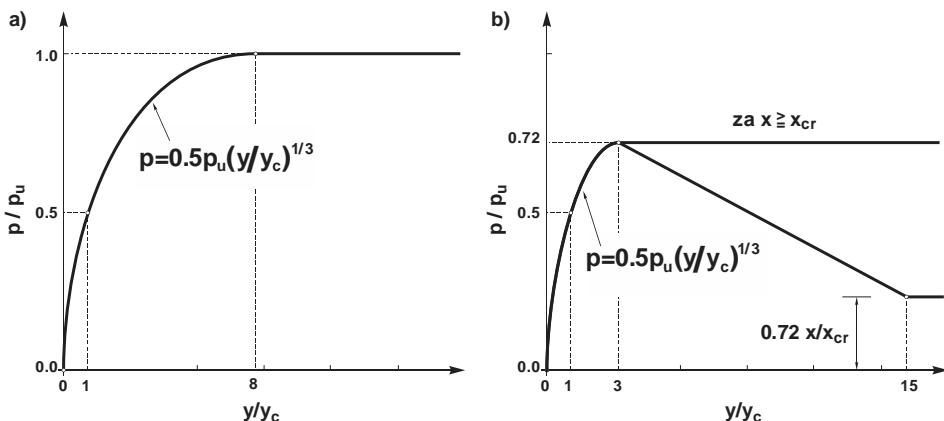
Kao i prethodno opisane krive za aksijalna opterećenja,  $p$ -y krive su numerički modeli koji se koriste za simuliranje otpornosti tla pri statickom i cikličnom bočnom opterećenju. Veličina  $p$  je bočni otpor tla [ $\text{kN/m}$ ] duž omotača pri bočnom pomeranju šipa  $y$ . U ovoj aproksimaciji, tlo je predstavljeno nizom nelinearnih opruga, čije se karakteristike menjaju po dubini i vrsti tla.

Ovaj koncept je prvi put razvijen tokom 1940-50 godine, za potrebe izgradnje naftnih ofšor platformi, koje su trebale izdržati velika horizontalna opterećenja od talasa. Najranije preporuke za  $p$ -y krive se mogu pratiti od '50-tih godina prošlog veka u radovima Skempton and Terzaghi. U međuvremenu, predložene krive su više puta izmenjene, a i danas se nalaze u stalnom procesu usavršavanja.

Idealno bi bilo da se  $p$ -y krive generišu iz terenskih opita bočnog opterećenja, na merno opremljenim šipovima. U nedostatku eksperimentalno izvedenih  $p$ -y krive, moguće je koristiti empirijske formulacije koje su predložene u literaturi za različite vrste tla.

Od '70-tih god. prošlog veka, vršene su dalje modifikacije i poboljšanja  $p$ -y koncepta. Umesto da se krutosti opruge unosi u proračun kao ulazni podatak, prihvaćena je ideja ulazni podatak za proračun bude kompletan  $p$ -y kriva. Tokom proteklog perioda, razvijene su različite  $p$ -y krive za različite tipove tla, za različite tipove opterećenja, koje daju veličinu bočnog otpora tla u funkciji bočnog pomeranja šipa.

Danas postoji velik broj različitih formulacija p-y krive, uglavnom kao empirijski zasnovane nelinearne veze između parametara čvrstoće i krutosti tla duž šipa, koje se mogu meriti u laboratoriji i na terenu. Generalna podela p-y krivih je prema tipu tla (meka glina, čvrsta glina, pesak, likvifabilan pesak i dr.) i opterećenja (statička, ciklična).



Slika 12.6 Tipična p-y kriva: a) statičko opterećenje b) Cikličko opterećenje

U numeričkoj analizi, šip se deli na male vertikalne segmente, a za svaki segment se kao ulaz daje p-y kriva. U zavisnosti od veličine bočnog pomeranja šipa, bočni otpor tla iz p-y krive se može odrediti iterativnim postupkom. Razvojem numeričkih metoda (MKE, MKR) i računara, analiza bočno opterećenih šipova zasnovanih na p-y konceptu, danas je najviše u upotrebi.

## PRIBLIŽNA ANALIZA INTERAKCIJE GRUPE ŠIPOVA

Šipovi retko prenose opterećenje pojedinačno, već u grupi, u kojoj pojedini šipovi ili grupe mogu imati različite pravce, kako bi se bolje prilagodili rezultanti opterećenja. Da bi se obezbedio zajednički rad, glave šipova su međusobno povezane krutom armirano betonskom konstrukcijom koja se naziva naglavnica. Broj šipova u grupi može biti različit, od svega nekoliko šipova pa do više desetina. Kada je broj šipova u grupi mali, kao npr. ispod stuba, naglavnica se može smatrati apsolutno krutom. U slučaju većeg broja šipova ispod ploče velikog gabarita, deblijina naglavnice je znatno manja od njene dužine ili širine, zbog čega se naglavnica mora računati kao savitljiva.

Ranije je pomenuto, da se metode proračuna grupe šipova mogu podeliti na metode koje analiziraju samo interakciju šipova kroz naglavnici, i metode koje analiziraju interakciju šipova i kroz naglavnici i kroz tlo.

U ovom poglavlju će se prikazati približna metoda za jednostavniji slučaj opterećenja, koja analizira interakciju šip-naglavnica-tlo. Analiziraće se idealno kruta naglavnica koja povezuje malu grupu šipova, na malom međusobnom rastojanju, opterećenih vertikalnim silom ili horizontalnom silom.

Zbog malog rastojanja, postoji međusoban uticaj šipova na pomeranje cele grupe, koji se naziva efekat grupe. Zbog efekta grupe, sleganje grupe šipova je veće od sleganja pojedinačnog šipa pod prosečnim opterećenjem grupe. Efekat grupe se smanjuje sa povećanjem međusobnog rastojanja šipova.

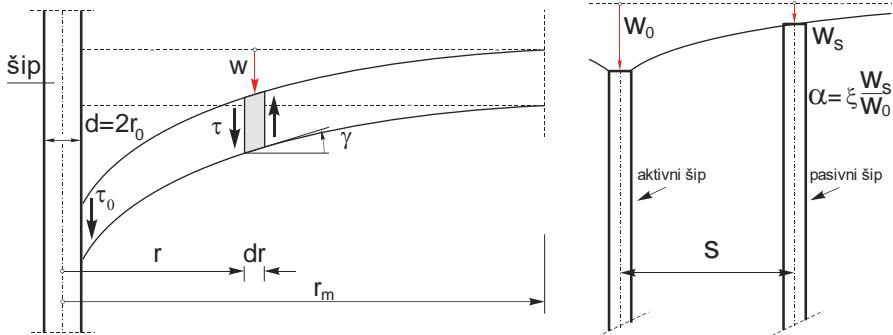
Međusobni uticaj grupe šipova na pomeranje, odnosno sleganje grupe šipova, ne može se računati na osnovu Vinklerovog modela, jer se radi o sistemu nepovezanih elastičnih opruga, odnosno o sredini koja nema svojstvo kontinualnosti. Kroz takvu sredinu se ne može prenositi uticaj opterećenja koje deluje u jednoj tački na okolne tačke. Najjednostavniji model koji ima kontinualnost je linearno elastična sredina (poluprostor, polubeskonačna masa), ali je relativno složena i obimna u primeni na grupu šipova. Šipove u linearno elastičnoj sredini, detaljno je obradio Poulos (1980).

Znatno jednostavnije, približno rešenje problema interakcije, može se dobiti preko uticajnih funkcija sleganja između šipova, zasnovanih na modelu deformacije sloja tankih cilindričnih diskova oko šipa (Randolph, 1978). Posebno se moraju odrediti uticajne funkcije za grupu šipova pod vertikalnim opterećenjem a posebno za grupu šipova pod horizontalnim opterećenjem.

U narednom poglavlju će se analizirati samo jednostavni problemi, u kojem su šipovi vertikalni, zglobovno vezani sa naglavnicom, a opterećenje naglavnice je vertikalno i centrično ili vertikalno i ekscentrično.

### 13.1 Interakcija između vertikalno opterećenih šipova

Uproščeno rešenje interakcije sleganja za vertikalno opterećene šipove, prikazali su Randolph & Wroth (1978), polazeći od idealizovane promene smičućeg napona u radijalnom pravcu, u tankom kružnom disku oko šipa. Prikazaće se rešenje pri konstantnoj krutosti tla duž omotača, za sleganje pojedinačnog šipa i za uticajnu funkciju sleganja susednog (pasivnog) šipa usled opterećenja aktivnog šipa.



**Slika 13.1** a) Smičuća deformacija tankog kružnog diska oko omotača šipa      b) Interakcija sleganja između dva vertikalno opterećena šipa

Autori su pretpostavili da se smičući napon  $\tau$  oko šipa, smanjuje obrnuto сразмерно rastojanju  $r$  od šipa (slika 13.1a). Na rastojanju  $r_m$  (radius dejstva), smičući naponi su zanemarljivi. Radijus dejstva je:

$$\frac{r_m}{d} = \frac{L}{d} \left[ 0.25 + \frac{G_{s,L}}{G_{s,b}} \left( 2.5 \frac{G_{s,av}}{G_{s,L}} (1 - \nu_s) - 0.25 \right) \right] \quad (13.1)$$

U gornjoj jednačini,  $G_{s,L}$ ,  $G_{s,av}$  i  $G_{s,b}$  su modul klizanja tla u nivou baze šipa, na polovini dužine šipa i ispod baze šipa. Promena modula klizanja po dubini je linearna. Za šip u homognom tlu, vitkosti  $L/d=15-30$ , radijus dejstva je  $r_m = 25d-50d$ . Sleganje  $w$  i smičući napon  $\tau$ , na osnovu rastojanju  $r$  od vertikalno opterećenog šipa, prema slici 13.1a, može se odrediti prema sledećem izrazu:

$$\gamma = \frac{dw}{dr} = \frac{\tau}{G_s}, \quad \tau = \tau_0 \frac{r_0}{r} \quad \rightarrow \quad w = \int_r^{r_m} dw = \int_r^{r_m} \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \frac{dr}{r} = \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \ln\left(\frac{r_m}{r}\right) \quad (13.2)$$

Sleganje aktivnog  $w_0$  i pasivnog  $w_s$  na osovinskom rastojanju rastojanju  $s$  od aktivnog šipa, kao i faktor interakcije  $\alpha$ , mogu se odrediti prema sledećim izrazima:

$$w_0 = \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right), \quad w_s = \xi \frac{\tau_0 r_0}{G_s} \ln\left(\frac{r_m}{s}\right), \quad \alpha = \frac{w_s}{w_0} = \xi \frac{\ln(r_m/s)}{\ln(r_m/r_0)} \quad (13.3)$$

Imajući u vidu gornje jednačine, smičući modul reakcije  $k_\tau$  po Vinkleru, koji povezuje smičući napon duž omotača šipa  $\tau_0$  i sleganje duž omotača šipa  $w_0$  iznosi:

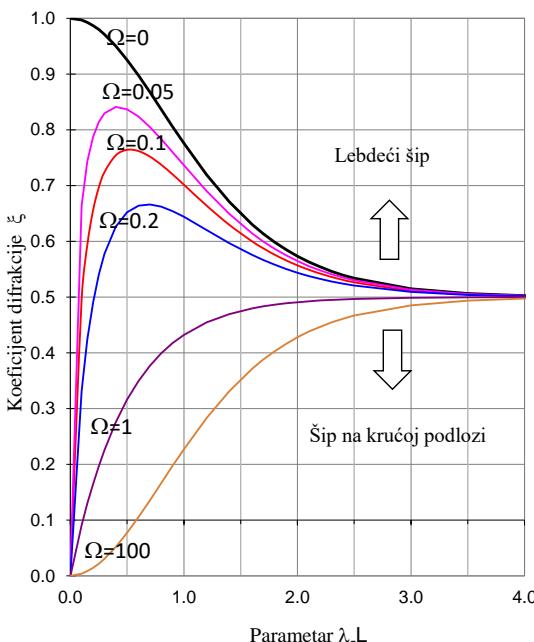
$$k_\tau = \frac{\tau_0}{w_0} = \frac{G_s}{r_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_m}\right) \quad (13.4a)$$

Smičući modul reakcije tla se može izraziti (Mylonakis i Gazetas, 1998) kao:

$$k_\tau = \delta \frac{G_s}{d\pi} \quad , \quad \delta \approx 1.3 \left( \frac{E_s}{E_p} \right)^{\frac{1}{40}} \left( 1 + 7 \left( \frac{L}{d} \right)^{-0.6} \right) \quad (13.4b)$$

Koeficijent  $\delta$  je kod lebdećih šipova vitkosti  $L/d=100$  oko 1.5, i raste sa povećanjem udela nosivosti baze. Za vitkost:  $L/d = 50, 25, 10$ , koeficijent  $\delta \approx 1.8, 2.2, 3.0$ . Faktor interakcije  $\alpha$ , sadrži logaritamsko prigušenje sleganja i faktor difrakcije  $\xi$  kojim se uvodi efekat kruće podloge u bazi šipa i ojačanja tla susednim šipovima. Faktor difrakcije se može odrediti prema sledećem izrazu (Mylonakis i Gazetas, 1998):

$$\xi = \frac{\eta + \sinh \eta + \Omega^2 \sinh \eta - \eta + 2\Omega \cosh \eta - 1}{2 \sinh \eta \quad 1 + \Omega^2 + 4\Omega \cosh \eta} \quad , \quad \eta = 2L\lambda_\tau \quad (11.5)$$



$$\lambda_\tau = \sqrt{\frac{k_\tau S}{E_p A}} \quad , \quad \Omega = \frac{k_b A_b}{\lambda_\tau E_p A}$$

$k_\tau$  smičući modul reakcije tla  
duž omotača šipa ( $\text{kN/m}^3$ )

$k_b$  vertikalni modul reakcije  
tla u bazi šipa ( $\text{kN/m}^3$ )

$S$  obim omotača šipa (m)

$A$  poprečni presek šipa ( $\text{m}^2$ )

$A_b$  poprečni presek baze ( $\text{m}^2$ )

$\xi$  faktor difrakcije

Slika 13.2 Faktor difrakcije šipa  $\xi$

Za dugačke šipove, faktor difrakcije  $\xi$  bez obzira na krutost tla u bazi šipa konvergira ka 0.5. Kod kratkih šipova na krućoj podlozi faktor difrakcije je manji od 0.5, dok je za većinu lebdećih šipova između 0.5 i 1. Jednačina 13.3, se može prikazati kao:

$$\alpha_{ij} = \xi \frac{\ln(r_m/s_{ij})}{\ln(2r_m/d)} = \xi \frac{\ln(r_m/s_{ij} \cdot d/d)}{\ln(2r_m/d)} = \xi \frac{\ln(r_m/d)}{\ln(2r_m/d)} - \xi \frac{\ln(s_{ij}/d)}{\ln(2r_m/d)} \quad (13.6)$$

Faktor interakcije uvek mora biti pozitivan ( $\alpha_{ij} \geq 0$ ), zbog čega negativne vrednosti uvek treba zameniti nulom. U praksi se često koristi faktor interakcije prema izrazu koji su predložili Mandolini i Viggiani (1997), u jednom od sledeća dva oblika:

$$\alpha_{ii} = 1, \quad i \neq j \Rightarrow \alpha_{ij} = A(s_{ij}/d)^B, \quad \alpha_{ij} = C + D \ln(s_{ij}/d)$$

$$C = \xi \frac{\ln(r_m/d)}{\ln(2r_m/d)}, \quad D = -\xi \frac{1}{\ln(2r_m/d)}$$

Za tipične uslove, koeficijenti u prvoj jednačini su između A=0.57 i 0.98, B=-0.6 i -1.2, dok su koeficijenti u drugoj jednačini C ≈ 1.0 i D ≈ -0.26. Prepostavlja se takođe, da je za rastojanja veća od  $r_m$ , faktor interakcije nula. Za konkretnu lokaciju, koeficijenti A, B, C i D, mogu se pouzdano odrediti terenskim ispitivanjima i probnim opterećenjem.

Faktori interakcije za grupu šipova, mogu se pregledno prikazati u matričnom obliku preko matrice faktora interakcije  $[\alpha]$ , nakon čega se ceo postupak proračuna sila i pomeranja šipova može uraditi matrično.

Ulagani podaci za matricu faktora interakcije su međusobna rastojanja šipova  $s_{ij}$  koja se mogu odrediti na osnovu koordinata šipova x, y. Koordinatni sistem se po pravilu postavlja u težište naglavnice, da se iskoristi njena simetrija ako postoji i na taj način pojednostavi proračun.

$$s_{ii} = d/2, \quad i \neq j \Rightarrow s_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (13.7)$$

Sleganje šipa i u grupi od n šipova iste krutosti  $K_{Qs}$  koji su opterećeni vertikalnim silama  $Q_1, \dots, Q_n$ , može se napisati u sledećem obliku:

$$w_i = \sum_{j=1}^n w_{jj} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{K_{Qs}} \alpha_{ij} \quad (13.8)$$

Sleganje grupe aksijalno opterećenih šipova u matričnom obliku glasi:

$$\{w\} = \frac{1}{K_{Qs}} [\alpha] \cdot \{Q\} = F_{Qs} [\alpha] \cdot \{Q\} \quad (13.9)$$

Jednačina (13.9) povezuje sleganje glave šipa i aksijalnu silu na glavi šipa, pri čemu je broj nepoznatih dvostruko veći od broja jednačina. Problem je staticki neodređen. Za Proračun su osim jednačina ravnoteže, potrebni i uslovi kompatibilnosti pomeranja glave šipa i idealno krute naglavnice. U narednom poglavlju će se prikazati primjeri rešavanja jednostavnijih slučajeva opterećenja.

## 13.2 Grupa šipova opterećena vertikalnom silom

U n uslovnih jednačina (13.9), nepoznato je n sleganja i n sila na glavi aksijalno opterećenih šipova. Za rešenje problema, pored jednačina ravnoteže, potrebno je uvesti i dopunske uslovne jednačine. Kada se radi o grupi šipova zgloboz povezanih sa krutom naglavnicom, dopunske jednačine se određuju na osnovu kompatibilnosti pomeranja naglavnice i glave šipa, odnosno iz geometrijskog položaja šipova. Sile i pomeranja šipova se mogu jednostavno odrediti za dva uprošćena slučaja:

- 1) Poznata je sila u svakom šipu, pri čemu se pomeranje svakog šipa može odrediti direktno na osnovu jednačine (13.9). U ovom slučaju se pojavljuje diferencijalno sleganje između šipova.
- 2) Naglavica koja povezuje šipove je apsolutno kruta i nema rotaciju. U ovom slučaju je sleganje svih šipova jednak, a različite sile u šipovima se mogu odrediti direktno na osnovu jednačine (13.9), za dato pomeranje naglavnice.

Za slučaj 2), usvajajući da su šipovi istog prečnika, dužine i relativne krutosti, sleganje grupe šipova i sile u šipovima se može odrediti na dva načina. Prvi, opšiji postupak, vrši se preko matričnog računa. U tom smislu, prvo se mora odrediti sleganje šipa  $w(Q_{sr})$  usled prosečnog opterećenja šipova u grupi  $Q_{sr}$  a zatim faktor sleganja grupe šipova  $R_s$  prema sledećem:

$$w(Q_{sr}) = \frac{Q_{sr}}{K_{Qs}} = \frac{1}{n} \frac{\sum Q}{K_{Qs}} = \frac{1}{n} \frac{V}{K_{Qs}} \quad (13.10)$$

gde je:  
 $Q_{sr}$  = prosečno opterećenje grupe šipova  
 $w(Q_{sr})$  = sleganje šipa usled prosečnog opterećenja grupe šipova  
 $V$  = ukupno vertikalno opterećenje grupe šipova  
 $n$  = ukupan broj šipova u grupi

Pošto šipovi imaju istu krutost, a sleganje grupe šipova  $w_g$  mora biti jednako sa sleganjem naglavnice, na osnovu jednačine (13.9) se može izvesti sledeće:

$$w_g \{I\} = [\alpha] F_{Qs} [I] \{Q\} = F_{Qs} [\alpha] \{Q\} \Rightarrow \{Q\} = w_g K_{Qs} [\alpha]^{-1} \{I\}$$

$$\{I\}^T \{Q\} = w_g K_{Qs} \{I\}^T [\alpha]^{-1} \{I\}, \quad \sum Q = w_g K_{Qs} \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1}$$

$$w_g = \frac{\sum Q}{K_{Q_s}} \frac{1}{\sum \sum \alpha_{ij}^{-1}} = \frac{Q_{sr}}{K_{Q_s}} \frac{n}{\sum \sum \alpha_{ij}^{-1}} \Rightarrow w_g = w(Q_{sr}) \frac{n}{\sum \sum \alpha_{ij}^{-1}} \quad (13.11)$$

Faktor sleganja grupe šipova  $R_s$  je definisan kao odnos sleganje  $w_g$  grupe šipova prema sleganju šipa usled prosečnog opterećenja grupe  $w(Q_{sr})$ , ili matematički:

$$R_s = \frac{w_g}{w(Q_{sr})} = \frac{I}{w(Q_{sr})} w(Q_{sr}) \frac{n}{\sum \sum \alpha_{ij}^{-1}} \Rightarrow R_s = \frac{n}{\sum \sum \alpha_{ij}^{-1}} \quad (13.12)$$

Nakon što se odredi faktor sleganja grupe, sleganje naglavnice i sile u šipovima se mogu odrediti na sledeći način:

$$w_g = R_s \frac{Q_{sr}}{K_{Q_s}} = R_s \frac{V/n}{K_{Q_s}}, \quad \{Q\} = w_g K_{Q_s} [\alpha]^{-1} \{I\} = \frac{R_s V}{n} [\alpha]^{-1} \{I\} \quad (13.13)$$

Krutost grupe šipova iznosi:  $K_p = V/w_g$

Krutost šipa  $K_{Qs,i}$  usled uticaja–interakcije svih susednih šipova u grupi  $j=1,..,n$ , može se odrediti na sledeći način:

$$\{K_{Q_s}\} = \frac{1}{w_g} \{Q\} = K_{Q_s} [\alpha]^{-1} \{I\} \Rightarrow K_{Qs,i} = K_{Q_s} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^{-1} \quad (13.14)$$

Drugi način je pogodan za ručni proračun, za malu grupu simetrično raspoređenih šipova koji su opterećeni vertikalnom i centričnom silom, zbog čega je broj jednačina mali, uglavnom 2 do 3. Koristeći uslove simetrije, prvo se rednim brojevima označe podgrupe simetričnih šipova u kojima su iste sile. Zatim se ispišu jednačine sleganja (13.8) za svaku podgrupu. Pošto je sleganje svih šipova isto, zajedno sa jednačinom ravnoteže sile u vertikalnom pravcu, mogu se izvesti jednačine po nepoznatim silama za svaku podgrupu. Nakon što se odrede sile u šipovima, može se odrediti i sleganje grupe šipova odnosno naglavnice.

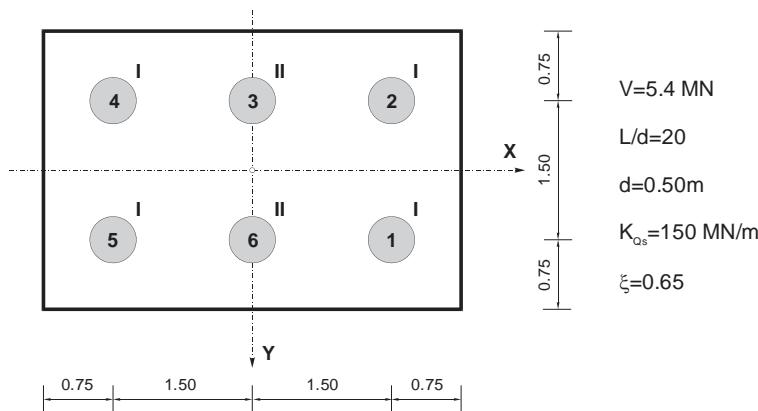
Faktor sleganja grupe šipova  $R_s$  se može proceniti i približnim izrazima. Vesić (1969), predlaže sledeći približan izraz:

$$R_s = \sqrt{I + B^*/d}$$

gde je:  $B^*$  = minimalno osovinsko rastojanje između krajnjih šipova  
 $d$  = prečnik šipa

### BROJNI PRIMER – 13.1

Data je armirano betonska, kruta naglavnica, prema slici, koja prenosi vertikalno i centrično opterećenje na grupu od 6 šipova. Potrebno je odrediti faktor sleganja grupe šipova  $R_s$ , sleganje pojedinačnog šipa usled prosečne sile u šipovima  $w(Q_{sr})$ , sleganje naglavnice  $w_g$ , sile u šipovima  $Q$  i krutost grupe šipova  $K_p$ . Proračun izvršiti a) matrično pomoću programa EXCEL i b) uprošćeno koristeći 2-osnu simetriju osnove šipova. Izračunati i prikazati grafički faktor grupe šipova  $R_s$  u funkciji relativnog rastojanja  $s/d=0.5, 1, 2, 3, 5$  i  $10$ , faktora difrakcije šipa  $\xi=0.65$  i  $0.30$ , i dati komentar. Potrebni podaci za proračun, dati su na priloženom crtežu.



Slika 13.3 Grupa šipova zglobno povezana krutom naglavnicom

Rešenje:

- a) Za matrični proračun grupe od  $n$  šipova, prvo treba odrediti matricu rastojanja  $[s]$  pomoću koordinata šipova  $\{x\}, \{y\}$ , a zatim matricu faktora interakcije  $[\alpha]$ .

Prema slici 11.2, koordinate glava šipova  $\{x\}$  i  $\{y\}$  i matrica rastojanja šipova  $[s]$  su :

$$\{x\} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{y\} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.75 \\ -0.75 \\ -0.75 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{pmatrix} 0.250 & 1.500 & 2.121 & 3.354 & 3.000 & 1.500 \\ 1.500 & 0.250 & 1.500 & 3.000 & 3.354 & 2.121 \\ 2.121 & 1.500 & 0.250 & 1.500 & 2.121 & 1.500 \\ 3.354 & 3.000 & 1.500 & 0.250 & 1.500 & 2.121 \\ 3.000 & 3.354 & 2.121 & 1.500 & 0.250 & 1.500 \\ 1.500 & 2.121 & 1.500 & 2.121 & 1.500 & 0.250 \end{pmatrix}$$

Matrica rastojanja šipova  $[s]$  i matrica faktora interakcije  $[\alpha]$  su simetrične matrice.

Za faktor difrakcije šipa  $\xi=0.65$  i  $r_m=25d$ , elementi matrice  $[\alpha]$  glase:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.352 & 0.295 & 0.219 & 0.237 & 0.352 \\ & 1.000 & 0.352 & 0.237 & 0.219 & 0.295 \\ & & 1.000 & 0.625 & 0.295 & 0.352 \\ & & & 1.000 & 0.352 & 0.295 \\ & & & & 1.000 & 0.352 \\ & & & & & 1.000 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica faktora interakcije  $[\alpha]^{-1}$  je simetrična, sa sledećim članovima:

$$[\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.268 & -0.289 & -0.133 & -0.052 & -0.085 & -0.269 \\ & 1.268 & -0.269 & -0.085 & -0.052 & -0.133 \\ & & 1.268 & -0.269 & -0.133 & -0.222 \\ & & & 1.268 & -0.289 & -0.133 \\ & & & & 1.268 & -0.269 \\ & & & & & 1.268 \end{bmatrix}$$

Faktor sleganja grupe šipova  $R_s$  i sleganje šipa usled prosečne sile u šipovima iznose:

$$R_s = \frac{n}{\sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1}} = \frac{6}{2.394} = 2.506 \quad w(Q_{sr}) = \frac{V/n}{K_{Qs}} = \frac{5.4/6}{150.0} = 6.0 \cdot 10^{-3} m$$

Približna vrednost  $R_s$  (Vesić, 1969), iznosi:  $R_s = \sqrt{I + B^*/d} = \sqrt{I + 1.5/0.5} = 2.0$

Sleganje grupe šipova  $w_g$  i sile u šipovima  $\{Q\}$  u MN iznose:

$$w_g = R_s w(Q_{sr}) = 2.506 \cdot 6.0 \cdot 10^{-3} = 15.04 \cdot 10^{-3} m, \quad \{Q\} = R_s V / n [\alpha]^{-1} \{I\}$$

$$\{Q\} = \frac{2.506 \cdot 5.4}{6} \begin{bmatrix} 1.268 & -0.289 & -0.133 & -0.052 & -0.085 & -0.269 \\ & 1.268 & -0.269 & -0.085 & -0.052 & -0.133 \\ & & 1.268 & -0.269 & -0.133 & -0.222 \\ & & & 1.268 & -0.289 & -0.133 \\ & & & & 1.268 & -0.269 \\ & & & & & 1.268 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.989 \\ 0.989 \\ 0.721 \\ 0.989 \\ 0.989 \\ 0.721 \end{Bmatrix}$$

Kontrola uslova ravnoteže sila:  $\sum_i Q_i = 4 \cdot 0.989 + 2 \cdot 0.721 = 5.400 MN = V$

- b) Za ručni proračun, mogu se izdvojiti dve podgrupe šipova u kojima su iste sila (na crtežu su podgrupe označene sa I i II). Sleganje obe podgrupe je isto. Iz podgrupe I, bira se, npr. šip 1, čije je sleganje  $w_1$  a u podgrupi II, šip 3, čije je sleganje  $w_3$ .

$$w_1 = w_3$$

$$w_1 = Q_I / K_{Qs} (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{15}) + Q_H / K_{Qs} (\alpha_{13} + \alpha_{16})$$

$$w_3 = Q_I / K_{Qs} (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{34} + \alpha_{35}) + Q_H / K_{Qs} (\alpha_{33} + \alpha_{36})$$

$$Q_I (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{15} - \alpha_{31} - \alpha_{32} - \alpha_{34} - \alpha_{35}) + Q_H (\alpha_{13} + \alpha_{16} - \alpha_{33} - \alpha_{36}) = 0$$

Nakon smene faktora interakcije  $\alpha$ , dobija se uslovna jednačina :

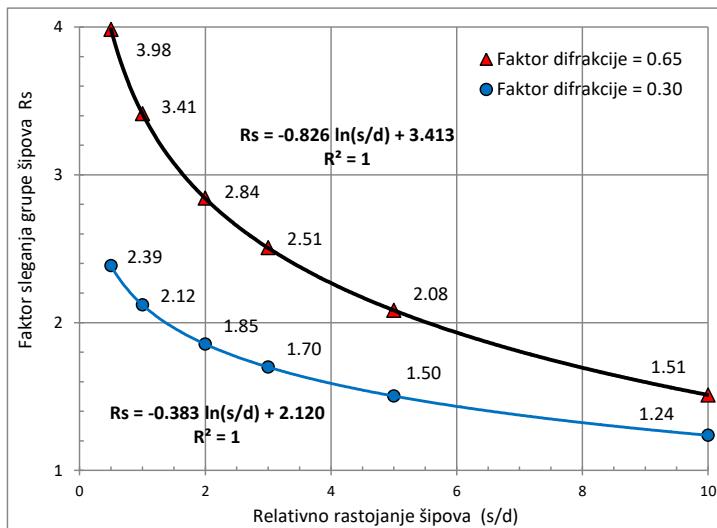
$$0.514Q_I - 0.705Q_H = 0$$

Na osnovu uslova ravnoteže sila u vertikalnom pravcu, dobija se:

$$4Q_I + 2Q_H = V \Rightarrow 4Q_I + 2Q_H = 5.40$$

Rešenje jednačine:  $Q_I = 0.989MN$ ,  $Q_H = 0.721MN$

Rezultati proračuna faktora sleganja grupe šipova  $R_s$  u funkciji relativnog rastojanja šipova  $s/d$  i faktora difrakcije  $\xi$ , prikazani su na donjoj slici.



Slika 13.4 Faktor sleganja grupe u funkciji relativnog rastojanja i faktora difrakcije šipova

Sa povećanjem rastojanja, opada međusobni uticaj šipova i faktor sleganja grupe. Za  $s/d \geq 25$ , faktor sleganja grupe je  $R_s=1$  a sile u šipovima su iste i iznose  $5.4/6=0.9MN$ . Manji faktor difrakcije šipa  $\xi$ , znači veći deo nosivosti baze a manji omotača. Faktor difrakcije  $\xi=0.65$ , odgovara šipu koji pretežno nosi omotačem, a  $\xi=0.30$  šipu koji pretežno nosi bazom. Faktor sleganja grupe šipova, veći je kod lebdećih nego stojećih šipova (sl. 13.1). Krutost grupe je  $K_p=\sum Q/wg=5.4/0.01504=359.0\text{ MN/m}$ .

### 13.3 Grupa šipova opterećena vertikalnom silom i momentom

Kod prostorne grupe vertikalnih šipova, zglobno povezanih idealno krutom naglavnicom, opterećenom vertikalnom silom i momentom, postoje samo vertikalna pomeranja glave šipova. Za malu grupu, naglavnica se može smatrati idealno krutom, i može se postaviti kinematička veza između pomeranja naglavnice i sleganja glave šipova. Problem je definisan sa n jednačina (13.9), n veza između pomeranja naglavnice i pomeranja šipova, i 3 uslova ravnoteže ili ukupno  $2n+3$  jednačina. Kao nepoznate pojavljuju se 3 komponente pomeranja naglavnice i  $2n$  sleganja i sila glave šipova.

Za šipove iste aksijalne krutosti  $K_{Qs}$  jednačina (13.9) glasi:

$$\{w\} = I/K_{Qs} [\alpha] \{Q\} \Rightarrow \{Q\} = K_{Qs} [\alpha]^{-1} \{w\} \quad (13.15)$$

Veza između sleganja  $\{w\}$  glave vertikalnih šipova sa koordinatama  $\{x\}$  i  $\{y\}$ , usled sleganja  $w_g$  i obrtanja  $\{\theta_x\}$  i  $\{\theta_y\}$  krute naglavnice, glasi:

$$\{w\} = w_g \{I\} + \theta_x \{y\} - \theta_y \{x\} \quad (13.16)$$

Smenom jednačine (13.15) u jednačinu (13.16), dobija se:

$$\{Q\} = K_{Qs} [\alpha]^{-1} (w_g \{I\} + \theta_x \{y\} + \theta_y \{-x\}) \quad (13.17)$$

ili kondenzovano, u matričnom obliku:

$$\{Q\} = K_{Qs} [\alpha]^{-1} [[I], [y], [-x]] \{U\}, \quad [T] = [[I], [y], [-x]] \Rightarrow \{Q\} = K_{Qs} [\alpha]^{-1} [T] \{U\}$$

Vektor pomeranja težišta naglavnice  $\{U\}$  i matrica subvektora  $[T]$  glase:

$$\{U\} = \begin{pmatrix} w_g \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & -x_1 \\ 1 & y_2 & -x_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & y_n & -x_n \end{bmatrix}$$

Nepoznata pomeranja naglavnice se mogu odrediti iz jednačina ravnoteže:

$$\sum Z = 0 \Rightarrow \{I\}^T \{Q\} - V = 0 \quad (13.18)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \{y\}^T \{Q\} - M_x = 0 \quad (13.19)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \{-x\}^T \{Q\} - M_y = 0 \quad (13.20)$$

Smenom jednačine (13.17) u jednačine ravnoteže, dobijaju se tri uslovne jednačine po nepoznatim pomeranjima naglavnice. Uslov ravnoteže sila u vertikalnom pravcu:

$$\begin{aligned} K_{Qs}\{I\}^T[\alpha]^{-1}(w_g\{I\} + \theta_x\{y\} + \theta_y\{-x\}) - V &= 0 \\ K_{Qs}\{I\}^T[\alpha]^{-1}\{I\}w_g + K_{Qs}\{I\}^T[\alpha]^{-1}\{y\}\theta_x + K_{Qs}\{I\}^T[\alpha]^{-1}\{-x\}\theta_y &= V \end{aligned} \quad (13.21)$$

$$\left( K_{Qs} \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} \right) w_g + \left( K_{Qs} \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} y_j \right) \theta_x - \left( K_{Qs} \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} x_j \right) \theta_y = V$$

ili u matričnom obliku:

$$K_{Qs}\{I\}^T[\alpha]^{-1}[T]\{U\} = V$$

Uslov ravnoteže momenata sila oko x-ose:

$$\begin{aligned} K_{Qs}\{y\}^T[\alpha]^{-1}(w_g\{I\} + \theta_x\{y\} + \theta_y\{-x\}) - M_x &= 0 \\ K_{Qs}\{y\}^T[\alpha]^{-1}\{I\}w_g + K_{Qs}\{y\}^T[\alpha]^{-1}\{y\}\theta_x + K_{Qs}\{y\}^T[\alpha]^{-1}\{-x\}\theta_y &= M_x \end{aligned} \quad (13.22)$$

$$\left( K_{Qs} \sum_i y_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} \right) w_g + \left( K_{Qs} \sum_i y_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} y_j \right) \theta_x - \left( K_{Qs} \sum_i y_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} x_j \right) \theta_y = M_x$$

ili u matričnom obliku:

$$K_{Qs}\{y\}^T[\alpha]^{-1}[T]\{U\} = M_x$$

Uslov ravnoteže momenata sila oko y-ose:

$$\begin{aligned} K_{Qs}\{-x\}^T[\alpha]^{-1}(w_g\{I\} + \theta_x\{y\} + \theta_y\{-x\}) - M_y &= 0 \\ K_{Qs}\{-x\}^T[\alpha]^{-1}\{I\}w_g + K_{Qs}\{-x\}^T[\alpha]^{-1}\{y\}\theta_x + K_{Qs}\{-x\}^T[\alpha]^{-1}\{-x\}\theta_y &= M_y \end{aligned} \quad (13.23)$$

$$-\left( K_{Qs} \sum_i x_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} \right) w_g - \left( K_{Qs} \sum_i x_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} y_j \right) \theta_x + \left( K_{Qs} \sum_i x_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} x_j \right) \theta_y = M_y$$

ili u matričnom obliku:

$$K_{Qs} \{-x\}^T [\alpha]^{-1} [T] \{U\} = M_y$$

Jednačine ravnoteže (13.21–13.23), mogu se pregledno prikazati pomoću sledećeg izraza:

$$K_{Qs} \begin{bmatrix} \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} & \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} y_j & -\sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} x_j \\ \sum_i y_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} & \sum_i y_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} y_j & -\sum_i y_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} x_j \\ -\sum_i x_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} & -\sum_i x_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} y_j & \sum_i x_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1} x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_g \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (13.24)$$

ili u matričnom obliku:

$$K_{Qs} [T]^T [\alpha]^{-1} [T] \{U\} = \{P\} \quad (13.25)$$

Vektor opterećenja naglavnice  $\{P\}$  i matrica subvektora  $[T]^T$  glase:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} V \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}, \quad [T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ -x_1 & -x_2 & \dots & -x_n \end{bmatrix}$$

Ako je aksijalna krutost šipova međusobno različita, jednačina (13.25) glasi:

$$[T]^T [K_{Qs}] [\alpha]^{-1} [T] \{U\} = \{P\} \quad (13.26)$$

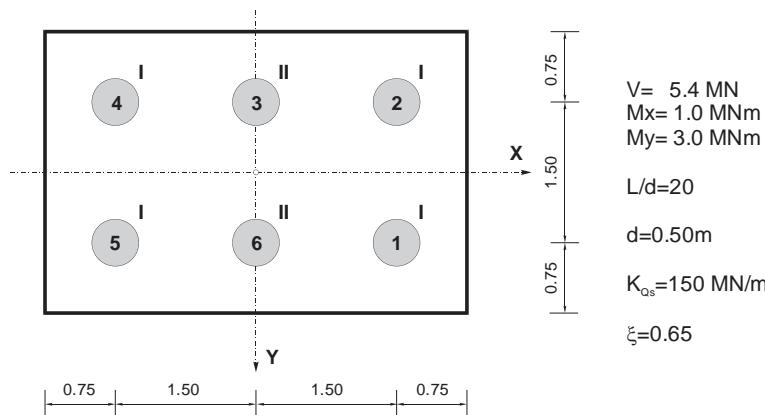
gde je  $[K_{Qs}]$  dijagonalna matrica aksijalne krutosti šipa.

Elementi matrice uslovnih jednačina i rešenje jednačina, može se vrlo jednostavno odrediti pomoću programa Excell. Ako su šipovi simetrični u odnosu na osu x i y, koje prolaze kroz težište naglavnice i napadne tačke vertikalne sile, vandijagonalni članovi matrice u jednačini (13.24) i (13.25) su jednaki nuli, pa se pomeranje naglavnice može odrediti direktno :

$$w_g = \frac{V}{K_{Qs} \{I\}^T [\alpha]^{-1} \{I\}}, \quad \theta_x = \frac{M_x}{K_{Qs} \{y\}^T [\alpha]^{-1} \{y\}}, \quad \theta_y = \frac{M_y}{K_{Qs} \{x\}^T [\alpha]^{-1} \{x\}}$$

### BROJNI PRIMER – 13.2

Data je armirano betonska, kruta naglavnica, prema slici, koja prenosi vertikalno i ekscentrično opterećenje na grupu od 6 šipova. Faktor difrakcije šipa iznosi  $\xi=0.65$ , a efektivni radijus dejstva  $r_m=25d$ . Potrebno je odrediti faktor sleganja grupe šipova  $R_s$ , pomeranje krute naglavnice  $w_g$ ,  $\theta_y$  i  $\theta_x$ , sleganje glava šipova  $\{w\}$  i sile na glavama šipova  $\{Q\}$ . Proračun izvršiti matrično pomoću programa EXCEL, a) sa uticajem, i b) bez uticaja interakcije šipova. Potrebni podaci za proračun su dati na priloženom crtežu.



Slika 13.5 Grupa šipova zglobno povezana krutom naglavnicom

Rešenje:

- a) Za matrični proračun grupe od  $n$  šipova, prvo treba odrediti matricu rastojanja  $[s]$  pomoću koordinata šipova  $\{x\}, \{y\}$ , a zatim matricu faktora interakcije  $[\alpha]$ .

Prema slici 11.4, koordinate glava šipova  $\{x\}$  i  $\{y\}$  i matrica rastojanja šipova  $[s]$  su :

$$\{x\} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{y\} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.75 \\ -0.75 \\ -0.75 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{bmatrix} 0.250 & 1.500 & 2.121 & 3.354 & 3.000 & 1.500 \\ & 0.250 & 1.500 & 3.000 & 3.354 & 2.121 \\ & & 0.250 & 1.500 & 2.121 & 1.500 \\ & & & 0.250 & 1.500 & 2.121 \\ & & & & 0.250 & 1.500 \\ & & & & & 0.250 \end{bmatrix}$$

Pošto su koordinate glava šipova, faktor difrakcije i efektivni radijus identični kao u brojnom primeru-1, elemente inverzne matrice  $[\alpha]^{-1}$  ne treba ponovo računati.

Međurezultati proračuna:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & -1.50 \\ 1 & -0.75 & -1.50 \\ 1 & -0.75 & 0 \\ 1 & 0.75 & 1.5 \\ 1 & 0.75 & 1.5 \\ 1 & 0.75 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{Qs}[\alpha]^{-1}[T] = \begin{bmatrix} 65.804 & 156.245 & -250.952 \\ 65.804 & -156.245 & -250.952 \\ 47.956 & -145.907 & 0 \\ 65.804 & -156.245 & 250.952 \\ 65.804 & 156.245 & 250.952 \\ 47.956 & 145.907 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{Qs}[T]^T[\alpha]^{-1}[T] = \begin{bmatrix} 359.126 & 0 & 0 \\ 0 & 687.597 & 0 \\ 0 & 0 & 1505.712 \end{bmatrix}$$

Uslovne jednačine po nepoznatim komponentama pomeranja naglavnice i rešenje:

$$\begin{bmatrix} 359.126 & 0 & 0 \\ 0 & 687.597 & 0 \\ 0 & 0 & 1505.712 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_g \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 1.0 \\ 3.0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} w_g \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.04 \\ 1.45 \\ 1.99 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} 10^{-3} \text{ m} \\ \text{rad} \end{array}$$

Sleganje glave šipa, aksijalna sila na šipu i povratno određena ekvivalentna aksijalna krutost šipa, sa uticajem interakcije iznosi:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} 13.14 \\ 10.96 \\ 13.95 \\ 16.93 \\ 19.12 \\ 16.13 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} 0.717 \\ 0.262 \\ 0.509 \\ 1.262 \\ 1.717 \\ 0.933 \end{Bmatrix} \text{ MN}, \quad \{K_{Qs}\} = 150.0 \begin{Bmatrix} 0.36 \\ 0.16 \\ 0.24 \\ 0.50 \\ 0.60 \\ 0.39 \end{Bmatrix} \text{ MN/m}$$

Zbog dvoosne simetrije šipova, pomeranje naglavnice se može odrediti direktno:

$$w_g = \frac{V}{K_{Qs} \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{-1}} = \frac{5.4}{150.0 \cdot 2.394} = 15.04 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_x = \frac{M_x}{K_{Qs} \{y\}^T [\alpha]^{-1} \{y\}} = \frac{1.0}{150.0 \cdot 4.584} = 1.45 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_y = \frac{M_y}{K_{Qs} \{x\}^T [\alpha]^{-1} \{x\}} = \frac{3.0}{150.010.038} = 1.99 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Faktor sleganja grupe šipova, izraženo kao sleganje naglavnice sa i bez interakcije šipova, identično je kao kod grupe šipova opterećenih samo vertikalnom silom:

$$R_s = \frac{w_g}{w(Q_{sr})} = \frac{15.04}{6.0} = 2.506, \quad w(Q_{sr}) = \frac{V/n}{K_{Qs}} = \frac{5.4/6}{150.0} = 6.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- b) Ako se zanemari međusobni uticaj odnosno interakcija između šipova ( $\xi = 0$ ), matrica faktora interakcije se svodi na jediničnu matricu, odnosno  $[\alpha] = [I]$ .

Uslovna jednačina i rešenje za taj slučaj glasi:

$$\begin{bmatrix} 900.00 & 0 & 0 \\ 0 & 506.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1350.00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_g \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 1.0 \\ 3.0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} w_g \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.00 \\ 1.98 \\ 2.22 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ m rad}$$

Faktor sleganja grupe šipova, izražen kao sleganje naglavnice bez interakcije šipova, mora biti  $R_s = 1$ , odnosno:

$$R_s = \frac{w_g}{w(Q_{sr})} = \frac{6.0}{6.0} = 1.0, \quad w(Q_{sr}) = \frac{V/n}{K_{Qs}} = \frac{5.4/6}{150.0} = 6.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

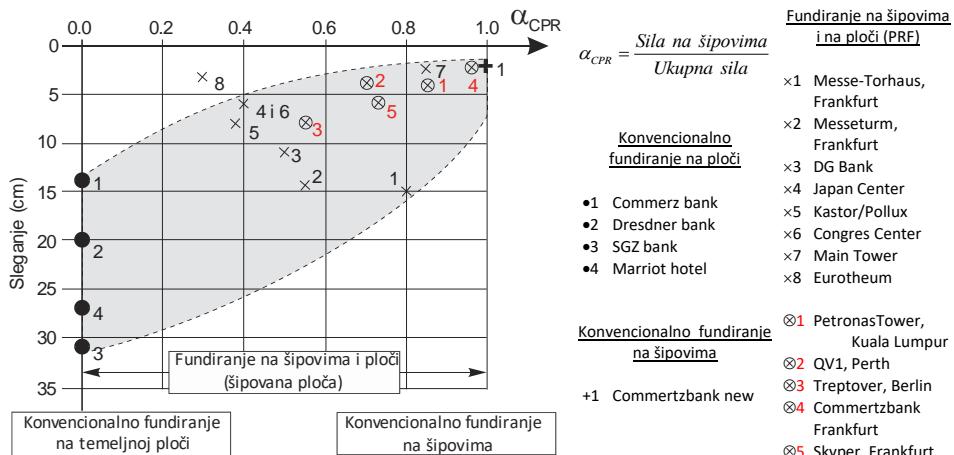
Sleganje glave šipa  $\{w\}$ , aksijalna sila na šipu  $\{Q\}$  i aksijalna krutost šipa  $\{K_{Qs}\}$ , bez uticaja interakcije iznosi:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} 4.15 \\ 1.18 \\ 4.52 \\ 7.82 \\ 10.81 \\ 7.48 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} 0.622 \\ 0.178 \\ 0.678 \\ 1.178 \\ 1.622 \\ 1.122 \end{Bmatrix} \text{ MN}, \quad \{K_{Qs}\} = 150.0 \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \text{ MN/m}$$

Obrtanja naglavnice  $\theta_x$  i  $\theta_y$ , uzimajući u obzir interakciju šipova, neznatno je manje od obrtanja naglavnice bez interakcije šipova. Odnos je 0.73 za osu-x i 0.87 za osu-y.

## INTERAKCIJA NAGLAVNICE ŠIPOVA I TLA

Tradicionalna projektantska praksa, temeljenje na šipovima zasniva na pretpostavci da celokupno opterećenje nose šipovi, pri čemu se svaki doprinos kontakta temeljne ploče (naglavnice) zanemaruje. Ovaj je pristup preterano konzervativan, jer je ploča u direktnom kontaktu s tlom, i nosi značajan deo tereta. Filozofija projektovanja je u poslednje vreme postepeno promenjena. Šipovana ploča ili koncept kombinovanog temeljenja na ploči i šipovima (engl. Piled Raft Foundation) je kombinacija dubokog i plitkog fundiranja. Skraćena oznaka za ovakav tip temeljenja (od engl. naziva) je PRF. Raspodela komponenti nosivosti pri kombinovanom fundiranju na šipovima i ploči, može se prikazati pomoću koeficijenta  $\alpha_{CPR}$  na donjoj slici.



Slika 14.1 Komponente nosivosti u funkciji koeficijenta  $\alpha_{CPR}$

Danas je opšte prihvaćeno, da kod PRF sistema, opterećenje od objekta delimično preuzimaju šipovi, a ostatak preuzima temeljna ploča. Šipovi su projektovani samo da smanje sleganje (reduktori sleganja), a ne da preuzmu ukupno opterećenje. Ova ideja korištenja šipova kao reduktora sleganja, nastala je 70-ih godina (Hansbo i dr., 1973; Burland i dr., 1977). U slučaju PRF na glini, ova filozofija je u Švedskoj razvijena u profinjenu projektantsku praksu. Prema njoj, opterećenje od objekta, koje je veće od pritiska prekonsolidacije, prenose šipovi (stanje puzaanja), dok preostali deo tereta prenosi temeljna ploča pritiskom u temeljnoj spojnici (Hansbo, 1984; Jendeby, 1986; Hansbo & Jendeby, 1998). Sličan pristup je u Velikoj Britaniji uveo Burland (1986). Ogroman doprinos razvoju PRF koncepta učinjen je u Nemačkoj tokom 80-ih i 90-ih godina prošlog veka. U Frankfurtskoj glini su urađeni mnogi PRF sistemi za visoke i teške objekte (Sommer i dr., 1985; Katzenbach i dr., 2003). Postoje i metode za krupnozrno tlo, poput Berlinskog peska (El-Mossallamy i dr., 2006). U novije vreme, za visoke zgrade u persijskom zalivu, uglavnom projektuju PRF sistemi. Opterećenje se deli između lebdećih šipova (trenje) i temeljne ploče, pri čemu grupa šipova nosi oko 80% ukupnog tereta, direktno u dublje slojeve (Davids i dr., 2008). Phung (1993), je za PRF u krupnozrnatom tlu izveo sistematska eksperimentalna istraživanja.

Studija je pokazala, da osim pomenutih efekata postoji značajan doprinos kontaktnih napona na nosivost šipova. Mehanizam prenosa i raspodele opterećenja između šipova, temeljne ploče (naglavnice) i okolnog tla, je izuzetno složen i komplikovan. Poslednjih decenija je razvijen znatan broj metoda proračuna sleganja slobodno-stojeće grupe šipova i temeljnih ploča sa šipovima kao reduktorima sleganja. Metode zasnovane na linearnoj elastičnosti imaju ograničenu važnost, jer se nosivost šipa iscrpljuje pri relativno malim sleganjima, već pri radnom radnom opterećenju PRF sistema. Kada je nosivost šipa iscrpljena, isti se može zameniti siloma, a naglavnica je i dalje u elastičnoj zoni. Postojeće metode proračuna, mogu se svrstati u tri grupe:

- Uprošćene i poluempijske metode proračuna
- Približne numeričke metode
- Složene metode zasnovane na diskretizaciji zapremine angažovanog tla metodom konačnih razlika ili konačnih elemenata i nelinearnim modelima tla

Pri projektovanju PRF sistema, prvo treba primeniti uprošćene i/ili približne metode, koje zahtevaju manje vremena, a tek nakon toga na stroge numeričke metode. Detaljna analiza temeljenja vrlo visokih objekata na PRF sistemu, mora se vršiti pomoću softvera zasnovanim na numeričkim metodama (FEM ili FDM). Danas je na raspolaganju velik broj softvera u 2D i 3D verziji, među kojima su: PLAXIS, FLAC, ABAQUS, SOFiSTiC, DIANNA & Midas i dr. Postoji nekoliko pristupa kojima se mogu izvesti numeričke analize: potpuna 3D analiza, ekvivalentni 2D i ekvivalentni aksi-simetrični model. Potpune 3D numeričke analize za komplikovane konfiguracije temelja, postale su moguće tek u poslednjih nekoliko godina, zahvaljući brzim računarima za koje je razvijen odgovarajući softver.

## 14.1 Približna analize interakcije šip-naglavnica-tlo

Ovde će se prikazati uprošćena metoda zasnovana na metodi Poulos & Davis (1980), koja je poboljšana metodom koju je predložio Randolph (1984). Metoda omogućava vrlo jednostavnu konstrukciju 3-linearnog dijagrama komponenti nosivosti (šipovi, naglavnica i kombinacija u funkciji sleganja). Sleganje grupe šipova  $w_p$  i krute naglavnice  $w_r$  u linearno elastičnoj sredini, usled vertikalne centrične sile  $V$ , može se prikazati sledećom matričnom jednačinom:

$$\begin{Bmatrix} w_p \\ w_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K_p & \alpha_{pr}/K_r \\ \alpha_{rp}/K_p & 1/K_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_p \\ V_r \end{Bmatrix}, \quad V = V_p + V_r \quad (14.1)$$

U gornjoj jednačini,  $K_p$  je krutost grupe šipova a  $K_r$  krutost naglavnice na sleganje,  $\alpha_{pr}$  je uticajni koeficijenti sleganja grupe šipova usled sile  $V_r$  na naglavnici a  $\alpha_{rp}$  je uticajni koeficijent sleganja naglavnice usled sile  $V_p$  na šipovima. Na osnovu teoreme o uzajamnosti pomeranja kod linearno elastičnog sistema, važi jednačina:

$$\alpha_{rp}/K_r = \alpha_{pr}/K_p \Rightarrow \alpha_{pr} = \alpha_{rp} K_r / K_p \quad (14.2)$$

Krutost grupe šipova je, prema ranijem  $K_p=V/w_g$ . Krutost naglavnice  $K_r$  na sloju debljine  $H$ , koji ima modul elastičnosti  $E_s$ , za  $v_s=0.5$ , može se odrediti na osnovu jednačine (Janbu, Bjerrum and Kjaernsli, 1956):

$$w_r = \mu_0 \mu_I \frac{V_r}{BL} \frac{B}{E_s} \rightarrow K_r = \frac{V_r}{w_r} = \frac{E_s L}{\mu_0 \mu_I}, \quad \mu_0 = \mu_0 \left( \frac{D_f}{B}, \frac{L}{B} \right), \quad \mu_I = \mu_I \left( \frac{H}{B}, \frac{L}{B} \right)$$

U gornjoj jednačini,  $\mu_0$  i  $\mu_I$  su faktori oblika. Jednačina daje prosečno sleganje sloja u nedreniranim uslovima.  $K_r$  se može se odrediti i drugim izrazima teorije elastičnosti ili na osnovu metoda geomehanike (metoda jednodimenzionalne deformacije). Uticaj šipova na povećanje nosivosti i krutosti tla obuhvaćenog šipovima se zanemaruje! Na osnovu superpozicije pomeranja prouzrokovanih dejstvom jednog šipa i kružne naglavnice (Randolph, 1983), faktor interakcije  $\alpha_{rp}$  je približno:

$$\alpha_{rp} = \ln(2r_m/D_r)/\ln(2r_m/d) \quad (14.3)$$

gde je:  $D_r$  = srednji prečnik površine naglavnice koji otpada na jedan šip  
 $d, r_m$  = prečnik šipa, radius dejstva šipa

Smenom (14.2) u polaznu jednačinu (14.1), dobija se:

$$(14.2) \rightarrow (1.1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} w_p \\ w_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I/K_p & \alpha_{rp}/K_p \\ \alpha_{rp}/K_p & I/K_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_p \\ V_r \end{Bmatrix} \quad (14.4)$$

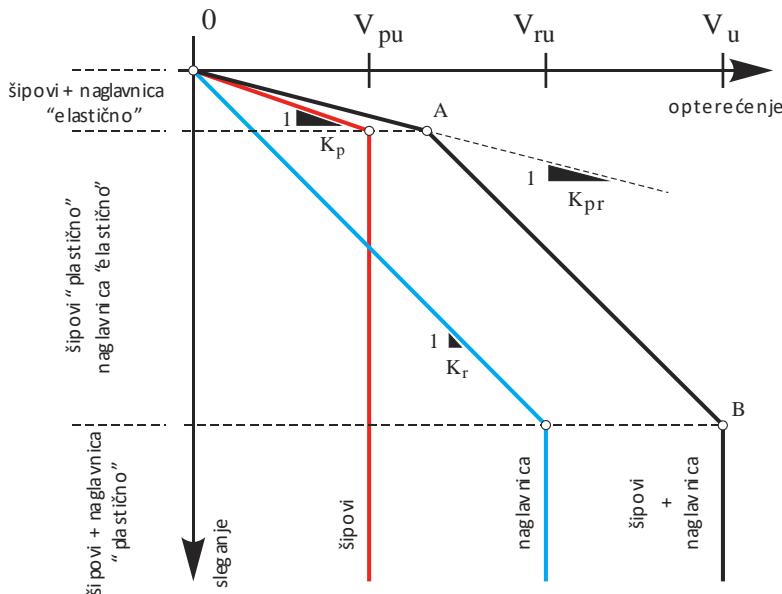
Zbog uslova kompatibilnosti pomeranja, sleganje grupe šipova i sleganje naglavnice mora biti jednak ili  $w_p=w_r$ . Ako se sleganje  $w_p$  i  $w_r$  u (14.4) zameni sleganjem  $w_{pr}$  sistema šipovi-naglavnica, dobija se izraz za sile  $V_p$  i  $V_r$  u funkciji sleganja  $w_{pr}$  ili:

$$\begin{Bmatrix} V_p \\ V_r \end{Bmatrix} = \frac{K_r K_p w_{pr}}{I - \alpha_{rp}^2 K_r / K_p} \begin{bmatrix} I/K_r & -\alpha_{rp}/K_p \\ -\alpha_{rp}/K_p & I/K_p \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

Sabiranjem sile  $V_p$  i  $V_r$  u ukupnu silu  $V$  i deljenjem sa sleganjem  $w_{pr}$  dobija se izraz:

$$K_{pr} = \frac{V}{w_{pr}} = \frac{K_p + K_r (1 - 2\alpha_{rp})}{I - \alpha_{rp}^2 K_r / K_p} \quad (14.6)$$

Količnik ukupne sile  $V$  i sleganja  $w_{pr}$  na levoj strani jednačine je ukupna krutost šipova i naglavnice  $K_{pr}$ . Slika 14.2 prikazuje razvoj komponenti nosivosti sistema šipovi-naglavnica u funkciji sleganja. Grupa šipova uvek ima veću krutost na sleganje  $K_p$  od naglavnice  $K_r$ , dok je ukupna nosivost šipova  $V_p$  koji deluju kao reduktori sleganja, manja od nosivosti naglavnice  $V_r$ . Pri porastu opterećenja  $V$  do iscrpljenja nosivosti šipova (tačka A), sistem šipovi-naglavnica je linearno elastičan, pri čemu je ukupna krutost sistema  $K_{pr}$  određena jednačinom (14.6). Od tačke A do tačke B, krutost sistema je jednaka krutosti naglavnice  $K_r$  a proračun sleganja se vrši tako, što se na naglavnicu nanese samo razlika opterećenja  $V - V_{pu}$  gde je  $V_{pu}$  granična nosivost šipova. Ustvari, od tačke A do tačke B, na naglavnicu deluje opterećenje  $V$  i reaktivno opterećenje od šipova  $V_{pu}$  koje je usmereno prema gore.



Slika 14.2 Razvoj komponenti nosivosti sistema šipovi-naglavnica

Sila  $V_A$  koja deluje na sistem šipovi-naglavnica i sleganje  $w_A$  pri kojem je nastupilo iscrpljenje nosivosti šipova  $V_{pu}$  može se odrediti na osnovu sledećih jednačina:

$$V_{pu} + \beta_V \cdot V = V_A \rightarrow V_A = \frac{V_{pu}}{1 - \beta_V}, \quad \beta_V = \frac{V_A - V_{pu}}{V_A} = \frac{V_r}{V} \quad (14.7)$$

$$w_A = \frac{V_A}{K_{pr}} = \frac{V_{pu}}{K_{pr}(1 - \beta_V)}$$

U gornjoj jednačini  $\beta_V$  je udeo nosivosti naglavnice  $V_r$  u odnosu na ukupnu silu  $V$ , i za  $V \leq V_A$  je konstantan i može se odrediti prema sledećoj jednačini:

$$\beta_V = \frac{V_r}{V} = \frac{1 - \alpha_{rp}}{K_p/K_r + 1 - 2\alpha_{rp}}, \quad V \leq V_A \quad (14.8)$$

Za  $V > V_A$  udeo nosivosti naglavnice  $\beta_{vu}$  koji raste od  $\beta_V$  do 1, i sleganje naglavnice  $w_{pr}$  može se odrediti na osnovu sledećih jednačina:

$$\beta_{vu} = 1 - \frac{V_{pu}}{V}, \quad w_{pr} = \frac{V_A}{K_{pr}} + \frac{V - V_A}{K_r} = \frac{V}{K_r} \left( 1 - \frac{1 - \beta_{vu}}{1 - \beta_V} \left( 1 - \frac{K_r}{K_{pr}} \right) \right) \quad (14.9)$$

Koefficijent redukcije sleganja naglavnice (odnosno temeljne ploče), usled dodavanja šipova, za opterećenje  $V > V_A$  raste od  $\beta_w$  do 1, prema izrazu:

$$\beta_{wu} = \frac{w_{pr}}{w_r} = 1 - \frac{1 - \beta_{Vu}}{1 - \beta_V} \left( 1 - \frac{K_r}{K_{pr}} \right) , \quad V > V_A \quad (14.10)$$

### BROJNI PRIMER – 14.1

Koristeći rezultate iz prethodnog proračuna za naglavnicu, koja prenosi vertikalno i centrično opterećenje na grupu od 6 šipova, potrebno je odrediti deo opterećenja koji prenosi naglavnica i sleganje naglavnice za opterećenje od  $V=18.0$  MN. Granična nosivost grupe šipova iznosi  $V_{pu}=10.8$  MN, a krutost naglavnice je  $K_r=120.0$  MN/m.

Rešenje:

$$\text{Krutost grupe šipova na sleganje: } K_p = V/w_g = 5.4/0.01504 = 359.04 \text{ MN/m}$$

Prosečna površina naglavnice koja otpada na jedan šip iznosi:

$$D_r = \frac{4}{p} \sqrt{\frac{BL}{n}} = \frac{4}{p} \sqrt{\frac{3.0 \times 4.5}{6}} = 1.91 \text{ m}$$

$$\text{Faktor interakcije šipa i naglavnice } \alpha_{rp} \text{ iznosi: } \alpha_{rp} = 1 - \frac{\ln(1.91/0.5)}{\ln(100)} = 0.71$$

Udeo nosivosti naglavnice pri sili  $V \leq V_A$  je konstantan i iznosi:

$$\beta_V = \frac{V_r}{V} = \frac{1 - \alpha_{rp}}{K_p/K_r + 2\alpha_{rp}} = \frac{1 - 0.71}{359.04/120.0 - 2 \cdot 0.71} = 0.18$$

Ukupna krutost šipova i naglavnice  $K_{pr}$  iznosi:

$$K_{pr} = \frac{K_p + K_r (1 - 2\alpha_{rp})}{1 - \alpha_{rp}^2 K_r / K_p} = \frac{359.04 + 120.0 (1 - 2 \cdot 0.71)}{1 - 0.71^2 \cdot 120.0 / 359.04} = 371.18 \text{ MN/m}$$

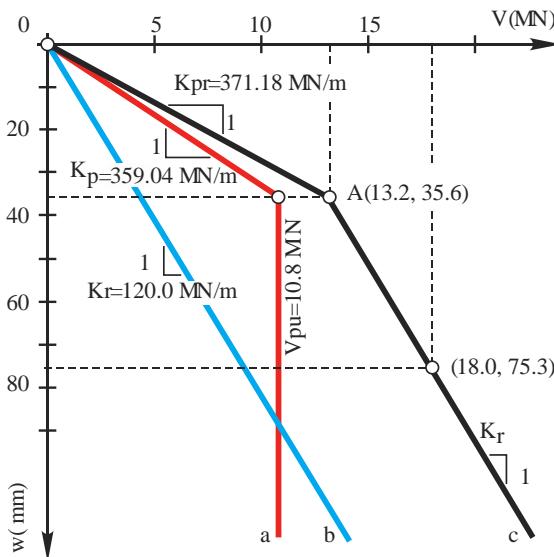
Ukupna sila  $V_A$  i sleganje  $w_A$  pri kojoj se iscrpljuje nosivost šipova (tačka A), iznosi:

$$V_A = \frac{V_{pu}}{(1 - \beta_V)} = \frac{10.8}{(1 - 0.18)} = 13.2 \text{ MN} , \quad w_A = \frac{V_A}{K_{pr}} = \frac{13.24}{371.18} = 35.6 \text{ mm}$$

Sleganje za  $V=18.0$  MN ( $V > V_A$ ), nakon iscrpljenja granične nosivosti šipova, iznosi:

$$w_{pr} = \frac{V}{K_r} - \frac{V_{pu}}{1-\beta_V} \left( \frac{1}{K_r} - \frac{1}{K_{pr}} \right) = \frac{18.0}{120.0} - \frac{10.8}{1-0.18} \left( \frac{1}{120.0} - \frac{1}{371.18} \right) = 75.3 \text{ mm}$$

Na donjoj slici je prikazan razvoj komponenti nosivosti ( $V$ ) za šipove sa naglavnicom, zatim za šipove posebno i za naglavnicu posebno. Linija 0-a je sila koju primaju šipovi, linija 0-b je sila koju prima naglavnice, a linija 0-c je ukupna sila koju prenose šipovi i naglavnica. Nakon što iscrpljenja nosivost šipova kao krućeg elementa, opada krutost sistema šipovi+naglavnica sa  $K_{pr}=371.18 \text{ MN/m}$  na  $K_{pr}=K_r=120.0 \text{ MN/m}$ , što je krutost tla ispod naglavnice ( $K_r$ ). Pošto sila u šipovima ostaje konstantna, proračunski model se svodi na sleganje naglavnice, na koju osim zadatog opterećenja, deluje rezultanta sila u šipovima intenziteta  $V_{pu}=10.8 \text{ MN}$ , usmerena na više.



Slika 14.3 Sile u sistemu šipovi i naglavnica u funkciji sleganja

Udeo nosivosti naglavnice pri sili  $V > V_A$  raste, i za silu  $V=18.0 \text{ MN}$  iznosi:

$$\beta_{V_u} = 1 - \frac{V_{pu}}{V} = 1 - \frac{10.8}{18.0} = 0.40 > 0.18$$

Koeficijent redukcije sleganja  $\beta_w$  temeljne ploče (odnosno naglavnice), pri sili  $V < V_A$  je konstantan i iznosi:

$$\beta_w = K_r / K_{pr} = 120.0 / 371.18 = 0.32$$

Koefficijent redukcije sleganja  $\beta_{wu}$  temeljne ploče (odnosno naglavnice), pri sili  $V > V_A$  raste, i za silu  $V=18.0$  MN iznosi:

$$\beta_{wu} = 1 - \frac{1 - \beta_{vu}}{1 - \beta_V} \left( 1 - \frac{K_r}{K_{pr}} \right) = 1 - \frac{1 - 0.40}{1 - 0.18} \left( 1 - \frac{120.0}{371.18} \right) = 0.50$$

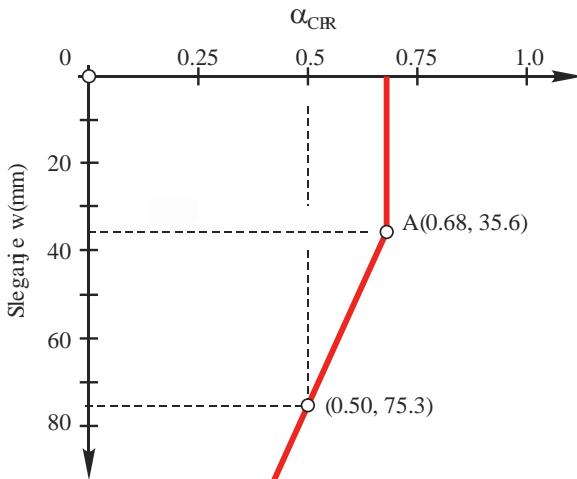
Udeo nosivosti šipova u odnosu na ukupnu silu, odnosno koefficijent  $\alpha_{CPR}$  pri sili  $V < V_A$  je konstantan i iznosi:

$$\alpha_{CPR} = 1 - \beta_w = 1 - 0.32 = 0.68$$

Udeo nosivosti šipova u odnosu na ukupnu silu, odnosno koefficijent  $\alpha_{CPR}$  pri sili  $V > V_A$  opada, i za silu  $V=18.0$  MN iznosi:

$$\alpha_{CPR} = \frac{V_p}{V} = \frac{V_p}{V_p + V_r} = 1 - \beta_{wu} = 1 - 0.50 = 0.50$$

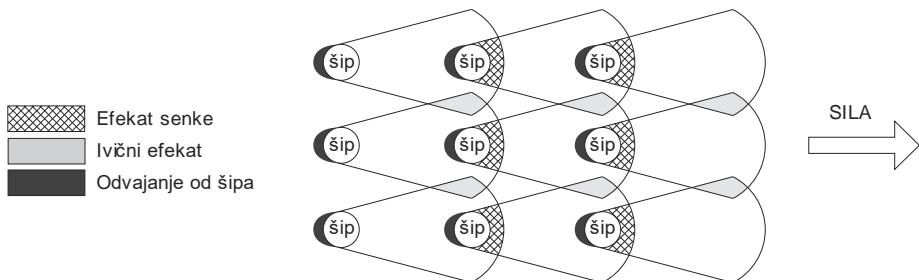
Na slici 14.4 je prikazana promena sile koju nose šipovi u odnosu na ukupnu silu na naglavnici, tzv.  $\alpha_{CPR}$  koefficijent. Dok je sleganje šipova u linearnoj oblasti, koefficijent nosivosti šipova je konstantan. Nakon iscrpljenja nosivosti, koefficijent  $\alpha_{CPR}$  počinje linearno da opada uz ubrzani porast sleganja.



Slika 14.4 Udeo sile ( $V_p$ ) koju prenosi grupa šipova prema ukupnoj sili ( $V$ )

## GRUPA ŠIPOVA OPTEREĆENA HORIZONTALNOM SILOM

Proračun interakcije između grupe šipova koja je opterećena horizontalnom silom, znatno je složenije od proračuna interakcije vertikalno opterećene grupe šipova. Pri dejstvu horizontalne sile na grupu šipova, najveći deo opterećenja primaju čeoni šipovi, a svaka sledeća kolona, zbog efekta senke preuzima manji deo opterećenja. Takođe, zbog ivičnog efekta, centralni šipovi u koloni primaju veće opterećenje od ivičnih šipova (Slika 15.1).



Slika 15.1 Efekat senke i ivični efekat kod horizontalno opt. grupe šipova (Walsh, 2005)

Većina autora smatra, da osovinsko rastojanje šipova u pravcu sile ima najvažniji uticaj na rezultujuće horizontalno pomeranje i momente savijanja grupe šipova. Kada je osovinsko rastojanje šipova u pravcu sile  $>8d$  ( $d$ =prečnik šipa), uticaj grupe je zanemarljiv uz uslov da je osovinsko rastojanje upravno na pravac dejstva sile  $>3d$ .

Postoji velik broj različitih metoda za rešavanje ovog problema, od kojih se u praksi koriste empirijske metode, metode zasnovana na redukciji horizontalnog modula reakcije tla za pojedinačni šip (Brown, 1988), i metode zasnovane na aproksimaciji tla elastičnim kontinuumom (Poulos i Davis, 1980) i dr.

Na osnovu modelskih ispitivanja, Prakash (1962) predlaže vrlo uprošćen postupak smanjenja horizontalnog modula reakcije tla: za 2 šipa na rastojanju od  $3d$  u pravcu sile na  $0.5k_h$ , za 3-4 šipa na  $0.33k_h$  a za  $\geq 5$  šipova na  $0.25k_h$ . Malo detaljniji pristup redukciji modula reakcije tla za grupu šipova, daje tabela 15.1, koja sadrži empirijske preporuke prema "Canadian Foundation Engineering Manual" (1992, 3<sup>rd</sup> edition), kanadskog geotehničkog društva (Canadian Geotechnical Society).

Osnovno rastojanje šipova $\perp$ na pravac dejstva sile	Osnovno rastojanje šipova u pravcu dejstva sile	Faktor redukcije u pravcu dejstva sile
$> 3d$	$3d$	0.25
$> 3d$	$4d$	0.40
$> 3d$	$6d$	0.70
$> 3d$	$8d$	1.00

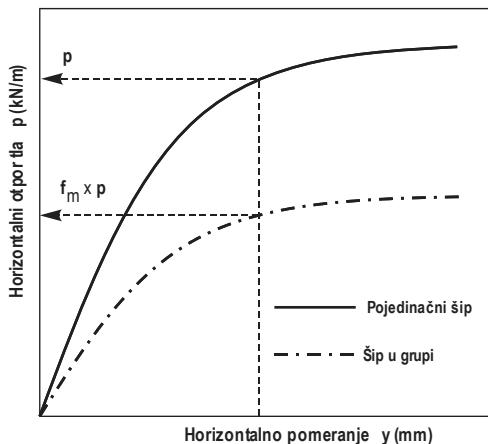
Tabela 15.1 Faktori redukcije horizontalnog modula reakcije tla u pravcu dejstva sile (CGS, 1992)

Osim rastojanja, na smanjenje horizontalnog modula reakcije tla, značajan uticaj ima naizmenično opterećenje (uticaj vетра, talasa i sl.). Za 50 i više ciklusa, utvrđeno je da se horizontalni modul reakcije može smanjiti na svega 30% početne vrednosti za statičko opterećenje. Pri kombinaciji efekta grupe i cikličnosti opterećenja, modul reakcije se može smanjiti ispod 10% od inicijalne. Određivanje horizontalnog modula reakcije tla duž šipa i uticaj opterećenja (statičko, dinamičko, ciklično) na smanjenje horizontalnog modula reakcije tla, detaljno je opisao Reese (1975).

Efekti konsolidacije i puzanja tla za horizontalno opterećen šip su po pravilu uključeni u vrednost modula reakcije tla. U nedostatku drugih podataka, može se usvojiti, da dugotrajna vrednost horizontalnog modula reakcije, za srednje do jako prekonsolidovane gline opadne do 0.5-0.25, a za meke i vrlo meke gline do 0.3-0.15 od inicijalne vrednosti. Za peskove, pošto ne postoje efekti konsolidacije, odnos ostaje 1.0.

### 15.1 Metoda p-multiplikatora za horizontalno opterećenu grupu šipova

Šip u grupi reaguju na bočno opterećenje drugačije od pojedinačnog izolovanog šipa. Interakcija šip-tlo-šip ili "zasenjivanje" nastaje kada su redovi šipova dovoljno blizu da prenesu opterećenje u istu zonu unutar tla oko šipa. Kao rezultat toga, tlo je više opterećeno, a pomeranja i momenti šipova su veći. Taj se fenomen može objasniti smanjenjem otpora tla u p-y analizama (p je otpor tla na jedinicu dužine šipa, a y je pomeranje šipa). Množenjem p-vrednosti faktorom  $f_m < 1$ , smanjuje se otpor-krutost tla, tako da se korišćenjem odgovarajuće vrednosti  $f_m$  može objasniti "zasenjivanje" unutar grupe šipova (Slika 15.2).



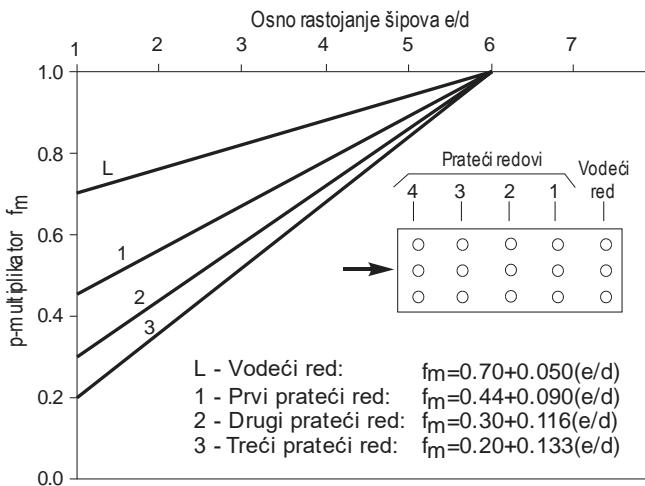
Slika 15.2 Definicija p-multiplikatora ( $f_m$ )

Postoje različite formulacije p-y krive, uglavnom kao empirijski zasnovane nelinearne veze između parametara čvrstoće i krutosti tla duž šipa, koje se mogu meriti u laboratoriji i na terenu. U analizi interakcije pomoću p-multiplikatora, Mokwa et all (1977), funkciju između horizontalnog pomeranja  $y$  (mm) i otpora tla  $p$  (kN/m), aproksimiraju kubnom parabolom:

$$p = 0.5 p_u \left( \frac{y}{y_c} \right)^{1/3}, \quad y_c = A \varepsilon_{50} d$$

U gornjem izrazu,  $p$  je otpor tla ( $\text{kN/m}$ ),  $p_u$  je maksimalni otpor pri velikim pomera-njima,  $y$  je horizontalno pomeranje ( $\text{mm}$ ),  $d$  je prečnik šipa ( $\text{mm}$ ),  $\varepsilon_{50}$  je deformacija potrebna za mobilizaciju 50% čvrstoće tla i  $A$  je empirijski parametar. Maksimalni otpor tla  $p_u$  se određuje analitički prema Brinch Hansenu (1961).

Mokwa i Duncan (2001) su uradili studiju 37 eksperimentalnih rezultata ispitivanja u kojima su mereni učinci interakcije. Studija je obuhvatila terenske, laboratorijske i centrifugalne opite, kao i podatke testova na terenskom poligonu Virginia Tech za potrebe razvoja i praktičnu primenu p-y koncepta u projektovanju grupe šipova. Njihove preporučene vrednosti su na slici 15.3. Slika prikazuje vrednosti p-množitelja  $f_m$  koji se smanjuju sa povećanjem razmaka između redova šipova i odstojanjem od čeonog reda. Smer opterećenja je upravan na red. Vrednost  $f_m$  je proporcionalan opterećenju koji nosi svaki red šipova, jer je pomeranje šipova u grupi isto. Grafikon pokazuje da vodeći red, odnosno red na prednjoj strani grupe, preuzima najviše opterećenja. Opterećenje opada u 1. 2. i 3. redu i dalje ostaje konstantno. Vrednosti  $f_m$  opadaju sa smanjujem razmaka između redova. Za grupe međusobno udaljene više od  $6d$ , vrednost  $f_m=1$ , što ukazuje da je interakcija grupe zanemarljiva.



Slika 15.3 Projektne linije p-multiplikatora, prema Mokwa i Duncan (2001)

Eksperimenti na osnovu kojih su utvrđene vrednosti  $f_m$  pokazuju, da su maksimalni momenti savijanja u šipovima u grupi približno isti ako je rastojanje unutar reda  $\geq 3d$ . Za rastojanje šipova  $< 3d$ , maksimalni momenti i transverzalne sile u ugaonom šipu vodećeg reda je veći nego u ostalim šipovima u grupi. Zbog toga, momente savijanja i transverzalne sile izračunate prema slici 15.2, za ugaoni šip u vodećem redu, treba pomnožiti faktorom  $f_{mc}$  prema donjoj tabeli.

Osno rastojanje šipova u redu (upravno na pravac dejstva sile)	Množitelj $f_{mc}$ za ugaone šipove u vodećem redu
3d	1.0
2d	1.2
1d	1.6

Tabela 15.2 Mltiplikator  $f_{mc}$  za korekciju presečnih sila ugaonog šipa u vodećem redu

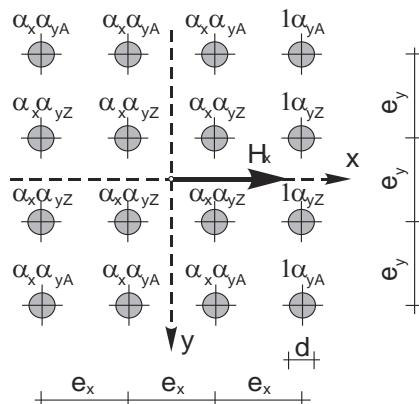
## 15.2 Metoda prema DIN1045 za horizontalno opterećenu grupu šipova

U nastavku će se prikazati alternativna metoda kojom se vrši redukcija horizontalnog modula reakcije tla za horizontalno opterećenu grupu šipova, prema standardu DIN1054 (Smolczik, 2006). Za i-ti šip u tlu sa konstantnim ili linearno promenljivim modulom reakcije tla po dubini, redukcija se vrši prema jednačinama (15.1) ili (15.2). Međuvrednosti u intervalu  $2 < \lambda_h L < 4$  ili  $2 < \eta_h L < 4$  se linearno interpoliraju.

$$\lambda_h L \geq 4 \rightarrow k_{h,i} = k_h (\alpha_x \alpha_y)_i^{4/3}, \quad \lambda_h L \leq 2 \rightarrow k_{h,i} = k_h (\alpha_x \alpha_y)_i \quad (15.1)$$

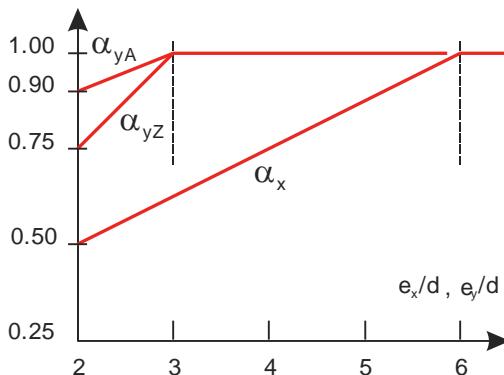
$$\eta_h L \geq 4 \rightarrow n_{h,i} = n_h (\alpha_x \alpha_y)_i^{5/3}, \quad \eta_h L \leq 2 \rightarrow n_{h,i} = n_h (\alpha_x \alpha_y)_i \quad (15.2)$$

Koeficijent redukcije  $\alpha$  zavisi od položaja šipa u odnosu na pravac sile i međusobno rastojanje šipova. Postoje dva tipa koeficijenta redukcije;  $\alpha_x$  koji zavisi od udaljenosti  $e_x$  šipa u pravcu paralelno sa silom, i  $\alpha_{yA}$  i  $\alpha_{yz}$  koji zavise od udaljenosti šipa  $e_y$  u pravcu upravno na silu. Prema konvenciji, pravci šipova koji su upravljni na silu formiraju redove, a pravci šipova koji su paralelni sa silom formiraju kolone. Koordinatne ose x,y se poklapaju sa osama simetrije grupe šipova. Za vodeći red šipova koeficijent  $\alpha_x=1$ , a za sve sledeće redove je  $\alpha_x<1$ . Koeficijent  $\alpha_{yA}$  važi za sve ivične šipove, odnosno šipove u krajnjim kolonama, koeficijent  $\alpha_{yz}$  važi za sve šipove u unutrašnjim kolonama (slika 15.4).



Slika 15.4 Raspored koeficijenata redukcije modula reakcije tla (Smolczik, 2006)

Za rastojanje šipova u pravcu upravno na silu od  $e_y/d \geq 3$ , koeficijent  $\alpha_{yA} = \alpha_{yz} = 1$ , a za rastojanje šipova u pravcu paralelno sa silom od  $e_x/d \geq 6$ , koeficijent  $\alpha_x = 1$ . Ako postoji horizontalne sile u pravcu obe koordinatne ose, redukcija se vrši u pravcu svake ose ponaosob. Koeficijenti redukcije su prikazani grafički na slici (15.5).



Slika 15.5 Koeficijenti redukcije modula reakcije tla (Smoltczik, 2006)

Koeficijenti redukcije se mogu prikazati u sledećem analitičkom obliku:

$$2 \leq (e_x/d) \leq 6 \rightarrow \alpha_x = 0.50 + 0.125(e_x/d - 2) \quad (15.3)$$

$$2 \leq (e_y/d) \leq 3 \rightarrow \alpha_{yA} = 0.90 + 0.100(e_y/d - 2) \quad (15.4)$$

$$2 \leq (e_y/d) \leq 3 \rightarrow \alpha_{yz} = 0.75 + 0.250(e_y/d - 2) \quad (15.5)$$

Horizontalna sila na i-tom šipu se može približno odrediti prema sledećem izrazu:

$$H_i = H \cdot \alpha_i / \sum \alpha_i \quad , \quad \alpha_i = \alpha_x \alpha_y \quad (15.6)$$

Tačniji proračun, pri kojem se mogu odrediti i pomeranja i obrtanja naglavnice u Vinklerovoj sredini, može se izvršiti prema jednačini (11.13), koristeći redukovane module reakcije tla, za aksijalno ( $k_t$  i  $k_b$ ) i bočno opterećenje ( $k_h$ ). Redukovana aksijalna krutost šipa  $K_{qs}$  se može odrediti na jednačine (13.14).

Pošto horizontalna sila uglavnom nije paralelna sa koordinatnom osom, već deluje pod nekim uglom (npr.  $\varphi$  sa x-osom), treba izračunati ekvivalentni modul  $k_{hp}$  ili  $n_{hp}$ . Ako se moduli u pravcima koordinatnih osa shvate kao glavni radijusi elipse, ekvivalentni modul je radius elipse u pravcu dejstva sile  $H$ , odnosno pod uglom  $\varphi$  u odnosu na x-osu.

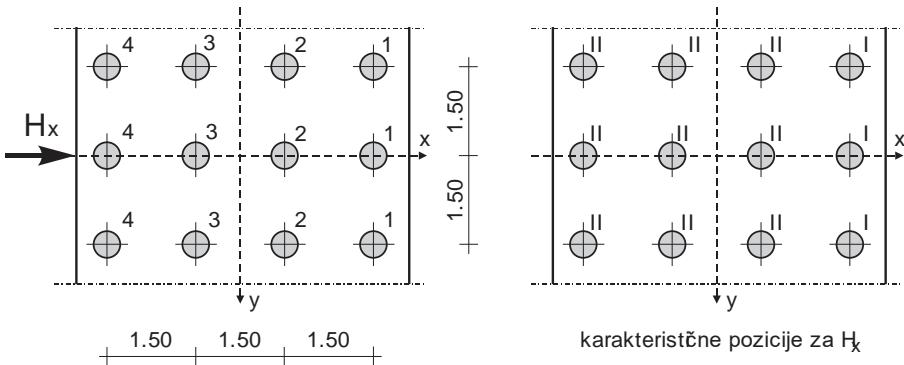
Ekvivalentni moduli reakcije tla u određenom pravcu, za šip u tlu sa konstantnim ili linearno promenljivim modulom, može se prikazati sledećim analitičkim izrazima:

$$k_{h\varphi} = k_{hx} k_{hy} \sqrt{\frac{1 + \tan^2(\varphi)}{k_{hy}^2 + k_{hx}^2 \tan^2(\varphi)}} , \quad \tan(\varphi) = \frac{H_y}{H_x} \quad (15.7)$$

$$n_{h\varphi} = n_{hx} n_{hy} \sqrt{\frac{1 + \tan^2(\varphi)}{n_{hy}^2 + n_{hx}^2 \tan^2(\varphi)}} , \quad \tan(\varphi) = \frac{H_y}{H_x} \quad (15.8)$$

### BROJNI PRIMER – 15.1

Potrebno je izračunati raspodelu horizontalne sile  $H_x=40.0\text{kN/m}$ , na vertikalnu grupu šipova ispod zida, prema slici 15.6. Pasivni otpor tla i trenje na kontaktu naglavnice i tla zanemariti. Horizontalni modul reakcije tla je  $k_h=15.0\text{ MN/m}^3$  a smičući  $k_c=5.0\text{ MN/m}^3$ . Šip je lebdeći, odnosno  $k_b \approx k_c$ . Šipovi su od armiranog betona, ( $E_b=21.0\text{ GPa}$ ), prečnika  $d=0.60\text{m}$  i dužine  $L=15.0\text{m}$ . Osno rastojanje šipova iznosi  $e_x=e_y=1.5\text{m}$ . Grupu šipova ispod zida analizirati kao ravanski problem. Horizontalnu interakciju šipova obuhvatiti prema metodi DIN1045.



Slika 15.6 Grupa šipova opterećena horizontalnom silom u smeru x-ose

Rešenje:

$$e_x/d = e_y/d = 1.5/0.6 = 2.5 , \quad E_b J = E_b \cdot d^4 \pi / 64 = 133.53 \text{ MNm}^2$$

$$\lambda_h L = \sqrt[4]{\frac{k_h d}{4E_b J}} \cdot L = 5.11 > 4 \rightarrow k_{h,i} = k_h \cdot \alpha_x \alpha_y \cdot \alpha_i^{4/3}$$

Proračun koeficijenata redukcije  $\alpha$ , za  $e_x/d = e_y/d = 2.5$ :

$$\alpha_x = 0.50 + 0.125(e_x/d - 2) = 0.5625$$

$$\alpha_{yz} = 0.75 + 0.250(e_y/d - 2) = 0.8750$$

Nakon što se odrede koeficijenti redukcije  $\alpha$ , mogu se odrediti redukovani horizontalni moduli reakcije tla  $k_{h,i}$  za karakteristične pozicije I - (1) i II - (2,3,4) prema slici 15.6 na desnoj strani. Redukovani horizontalni moduli reakcije tla za šipove glase:

$$k_{h,I} = k_h \cdot 1.0 \cdot \alpha_{yz}^{4/3} = 12.0 \cdot 1.0 \cdot 0.875^{4/3} = 12.0 \cdot 0.837 = 10.03 \text{ MN/m}^3$$

$$k_{h,II} = k_h \cdot \alpha_x \cdot \alpha_{yz}^{4/3} = 12.0 \cdot 0.5625 \cdot 0.875^{4/3} = 12.0 \cdot 0.389 = 4.66 \text{ MN/m}^3$$

Na osnovu redukovanih horizontalnih modula reakcije tla, elementi matrice krutosti šipa se mogu odrediti prema sledećim izrazima:

$$\lambda_h L > 2.5 \rightarrow K_{Tl} = k_h d / \lambda_h , \quad K_{T\theta} = k_h d / 2\lambda_h^2$$

$$\lambda_h L > 2.5 \rightarrow K_{Ml} = k_h d / 2\lambda_h^2 , \quad K_{M\theta} = k_h d / 2\lambda_h^3$$

Rezultati proračuna su prikazani tabelarno.

i	$k_{h,i}$	$\lambda_{h,i}$	$\lambda_{h,i}L$	$K_{Tl,i}$	$K_{T\theta,i}$	$K_{Ml,i}$	$K_{M\theta,i}$
	MN/m <sup>3</sup>	1/m	-	MN/m	MN/rad	MNm/m	MNm/rad
1	10.03	0.326	4.88	18.49	28.38	28.38	87.17
2,3,4	4.66	0.269	4.03	10.39	19.34	19.34	71.95

Pri dejstvu horizontalne sile na grupu vertikalnih šipova koji su kruto vezani za naglavnicu, u šipovima se pojavljuju i vertikalne sile. Zbog interakcije, smičući modul reakcije tla za ivični šip je manji oko 20%, a za unutrašnji oko 35% od vrednosti za pojedinačni šip (5.0MN/m<sup>3</sup>). Aksijalna krutost šipa se može odrediti na osnovu jednačine (11.1d). Rezultati su prikazani u donjoj tabeli.

$$K_{Qs} = \frac{\lambda_\tau L}{f} \left( \frac{E_p A}{L} \right), \quad f = \frac{1 + \Omega \tanh \lambda_\tau L}{\Omega + \tanh \lambda_\tau L}, \quad \Omega = \frac{k_b A_b}{\lambda_\tau E_p A}$$

i	$k_{\tau,i}$	$\lambda_{\tau,i}$	$\lambda_{\tau,i}L$	$\Omega_i$	$f_i$	$K_{Qs,i}$
	MN/m <sup>3</sup>	1/m	-	-	-	MN/m
1, 2	4.00	0.356	0.0535	$5.35 \times 10^{-3}$	2.029	104.23
3, 4	3.75	0.345	0.0345	$5.18 \times 10^{-3}$	2.084	98.25

Na osnovu proračuna grupe šipova, prema jednačini (11.13), pomeranja i presečne sile na glavama šipova koji su kruto vezani za naglavnicu, prikazan je u donjoj tabeli.

i	u (mm)	w (mm)	$\theta_y$ (rad)	Q (kN)	Tx (kN)	My (kNm)
1	13.4	1.8	$-7.9 \times 10^{-4}$	185.4	225.9	312.3
2		0.6		58.3	124.4	202.8
3		-0.6		-58.3	124.4	202.8
4		-1.8		-185.4	125.3	203.8

Za zglobnu vezu šip-naglavnica, postoji samo horizontalno pomeranje i transverzalne sile, koje su prikazane u donjoj tabeli. Razlika u rezultatima je (za pomeranje  $u$  i silu  $T_x$ ) je zanemarljiva.

i	u (mm)	w (mm)	$\theta_y$ (rad)	Q (kN)	Tx (kN)	My (kNm)
1	12.1	0.0	0.0	0.0	222.9	0.0
2,3					125.4	
4					126.2	

Približne vrednosti horizontalne sile  $H_i$  ili transverzalne sile  $T_{xi}$  koje deluju na pojedinačne šipove, mogu se odrediti prema jednačini (15.6).

$$\alpha_I = \alpha_x \alpha_{yz} = 1.0 \cdot 0.875 = 0.837 \quad , \quad \alpha_{II} = \alpha_x \alpha_{yz} = 0.5625 \cdot 0.875 = 0.492$$

$$\sum \alpha_i = 1 \cdot 0.837 + 3 \cdot 0.492 = 2.313$$

$$H_I = H_x \cdot \alpha_I / \sum \alpha_i = 600.0 \cdot 0.837 / 2.313 = 217.1 kN$$

$$H_{II} = H_x \cdot \alpha_{II} / \sum \alpha_i = 600.0 \cdot 0.492 / 2.313 = 127.6 kN$$

Rezultati proračuna su prikazani tabelarno

i	u (mm)	w (mm)	$\theta_y$ (rad)	Q (kN)	Tx (kN)	My (kNm)
1	-	-	-	-	222.9	-
2,3,4					125.4	

## LITERATURA

- Balay, J. (1984). Recommandations pour le choix des paramètres de calcul des écrans de soutènement par la méthode aux modules de réaction. Note d'Information Technique, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
- Barber, E. S. (1953). "Discussion to paper by S. M. Gleser." ASTM, STP 154, 94-101.
- Biot, M. A., Bending of an infinite beam on an elastic foundation, J. App. Mech., Trans. ASME, 4, pp. A1-A7, 1937.
- Boussinesq, J. (1885), Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion, 2nd ed. Brussels.
- Bowles J.E., 1997. Foundation Analysis And Design 5<sup>th</sup> Ed. The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Brinch Hansen, J. (1961), "The Ultimate Resistance of Rigid Piles Against Transversal Forces," Danish Geotechnical Institute Bulletin, No. 12, Copenhagen, pp 5-9.
- Broms, B.B. (1964), "Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 90, No. SM#, Proc. Paper 3909, May, pp 123-156.
- Brown, D. A., Morrison, C., and Reese, L. C., (1988), "Lateral Load Behavior of Pile Group in Sand," ASCE Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 114, No. 11, pp. 1261-1276.
- Burland, J.B., Broms, B.B., De Mello, V.F.B. (1977). Behaviour of foundations and structures. Proc. 9th ICSMFE, Tokyo, Vol. 2, 495-546.
- Caquot A.I., et al. (1948).Table for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure, and Bearing Capacity of Foundations. Librairie du Bureau des Longitudes, de L'école Polytechnique. GauthierVillars, Paris. 120.
- Chadeisson, R. (1961). "Parois continues moul'ees dans le sols". Proceedings of the 5th European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 2, Dunod, Paris, pp.563-568.
- Cosserat E, Cosserat F (1909) Theorie des corps deformables. A.Herrman, Paris.
- El-Mossallamy, Y. (2008). Modeling the behaviour of piled raft applying Plaxis 3D Foundation Version 2. Plaxis Bulletin, Issue 23, March, Delft.
- Jamiolkowski, M., Ghionna, V. N., Lancellotta, R. and Pasqualini, E. (1988): "New correlations of penetration tests for design practice," Proc. Penetration Testing ISOPT-1, pp. 263-296.
- Jendeby, L. (1986). Friction piled foundations in soft clay - A study of load transfer and settlement. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.
- Katzenbach, R., Schmitt, A., Turek, J.(2003). Reducing the costs for deep foundations of high-rise buildings by advanced numerical modelling. ARI The Bulletin of the Istambul Technical University, Vol. 53, No.2.

- Kerisel J., et al. Active and Passive Earth Pressure Tables. Balkema, Rotterdam. 1990. 220.
- Lancellotta R. Analytical Solution of Passive Earth Pressure. *Geotechnique*. 2002. 52 (8) 617-619.
- Filolenko-Borodich, M. (1963), Theory of Elasticity, Peace Publishers, Moscow.
- Flamant, A., (1892). Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *Compte. Rendu. Acad. Sci. Paris*, vol. 114, p. 1465.
- Gibbs, H.J. & Holtz, W.G. (1957 "Research on Determining the Density of Sands by Spoon Penetration Testing" *Proceedings 4th ICSMFE*, Vol.1, pp.35-39, London.
- Hansbo, S., Hofmann, E., Mosesson, J. (1973). Östra Nordstaden, Gothenburg. Experience concerning a difficult foundation problem and its unorthodox solution. *Proc. 8th ICSMFE*, Moscow, Vol. 2, 105-110.
- Hansbo, S. (1984). Foundations on friction creep piles in soft clay. *Proc. Int. Conf. on Case Histories in Geotechnical Engineering*, St. Louis, Vol. 2, pp. 913-922.
- Hetyenyi, M., (1950), A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity, *J. App. Phys.*, 21, pp. 55-58.
- Mandolini, A., Viggiani, C. (1997) Settlement of piled foundations. *Géotechnique*, 47, No 4, pp: 791-816.
- Marchetti, S., Totani, G., Calabrese, M. & Monaco, P. (1991). P-y curves from DMT data for piles driven in clay. *Proc. 4th DFI Int. Conf. Piling and Deep Foundations*, Stresa, 1: 263-272.
- Mickens, R. E. (1991): Difference Equations: Theory and Applications (Chapman and Hall/CRC) ISBN 978-0442001360.
- Mokwa, R. L. and Duncan, J. M. (2001), "Laterally Loaded Pile Group Effects and p-y Multipliers," ASCE Geotechnical Special Publication No 113, pp. 728-742.
- Monnet, A. (1994). "Module de réaction, coefficient de décompression, au sujet des paramètres utilisés dans la méthode de calcul 'elastoplastique'", *Revue française de Géotechnique*, No.65, pp.67-72.
- Mylonakis, G. and Gazetas, G. 1998. Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil. *Géotechnique*, 48(1), 55-72.
- Pasternak, P. L. (1954), On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants, Gos. Izd. Lit. po Stroit i Arkh.
- Poulos, H.G. and Davis, E.H. 1980. Pile foundation analysis and design. New York, NY: Wiley, 397 p.
- Randolph, M.F. and Wroth, C.P. 1978. Analysis of deformation of vertically loaded piles. *ASCE Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 104(GT12), 1465–1488.
- Randolph, M.F. and Wroth, C.P. 1979. Analysis of vertical deformation of pile groups. *Géotechnique*, 48(1), 55-72.
- Randolph, M.F. (1983). Design of piled raft foundations. Cambridge University, Engineering Dept., Research Report, Soils TR143.

- Reissner, E. (1958), Deflection of plates on viscoelastic foundation. J. Appl. Mech. (Trans. A.S.M.E.), 80: 144-145.
- Reese, L.C., Cox, W.R., Koop, F.D., (1974) , Analysis of Laterally Loaded Piles in Sand., Proc. 6th Offshore Tech., Vonf., Houston, Paper OCT 2080 pp 473-483.
- Reese, L.C. ( 1984), "Handbook on Design of Piles and Drilled Shafts Under Lateral Loads," U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration.
- Robinson, K.E., (1979), Horizontal Subgrade Reaction Estimated from Lateral Tests on Timber Piles., Behaviour of Deep Found., STP 670, ASTM, pp 520-536.
- Scott R.F. (1981), Foundation Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Page 256.
- Simvulidi I.A. (1973), Analysis of engineering structures on elastic foundation. 3rd ed. Moscow.
- Skempton, A.W. (1951), "The Bearing Capacity of Clays" Building Research congress, Division I, Part 3, London, pp 180- 189.
- Selvadurai, A.P.S. (1979). Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Department of Civil Engineering, New York.
- Schmitt, P. 1995. Méthode empirique d'évaluation du coefficient de réaction du sol vis-à-vis des ouvrages de soutènement souples. Revue Française de Géotechnique 71: 3-10.
- Sokolovski V.V., (1965). Statics of Granular Media. Pergamon Press, Oxford, 270.
- Terzaghi, K. 1955. Evaluation of coefficients of subgrade reactions. Géotechnique. Vol. 4
- Ulrich Smoltczyk (2003), Geotechnical Engineering Handbook, Volume 3, Elements and Structures, Ernst & Soohn, A Wiley Company, pp. 163-167.
- Vesic, A. B., (1961). Bending of beams resting on isotropic elastic solid, J. Engg. Mech. Divn., Proc. ASCE, 87(EM2), pp. 35-53.
- Vesic, A.S. (1969). Experiments with instrumented pile groups in sand. Performance of Deep Foundations, ASTM STP 444, pp. 177-222
- Vlasov, V. Z. and N. N. Leontiev (1966), Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation, Israel Program of Scientific Translations, NTIS No. N67 – 14238, 1966.
- Winkler, E. (1867), Die Lehre von Elastizität und Festigkeit (On elasticity and fixity), Prague, p.182
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu J. Z.: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Butterworth-Heinemann (2005).
- Zimmerman, H. (1888), Die Verechnung des Eisenbahnoberbaues (The Analysis of the Railroad Track), Verlag W. Ernst and Sohn, Berlin.