

NUMERIČKO REŠAVANJE JEDNAČINA VODNOG UDARA

Mirjana Isić¹,
Miodrag Spasojević²
Zoltan Horvat³

UDK: 532.511:167.7

Rezime: U radu je prikazano rešavanje jednačina neustaljenog tečenja u sistemima pod pritiskom primenom dva postupka sa fiksnom računskom mrežom. Prvi postupak podrazumeva rešavanje pojednostavljenih jednačina (takozvani tačan eksplicitni postupak), dok se kod drugog postupka rešavaju kompletne jednačine uz interpolaciju (takozvani interpolacioni eksplicitni postupak). Primenom izvedenih jednačina su formirana dva numerička modela sa ciljem upoređivanja rezultata.

Ključne reči: Sistemi pod pritiskom, neustaljeno tečenje, numerički model.

1. UVOD

Neustaljeno linijsko tečenje u sistemima pod pritiskom opisano je sa dve parcijalne diferencijalne jednačine, jednačinom kontinuiteta (1) i dinamičkom jednačinom (2),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} - v \cdot \sin \alpha + \frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\lambda \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0, \quad (2)$$

gde su x i t nezavisno promenljive, a , g , λ , D i α poznati parametri, a nepoznate su zavisno promenljive $\Pi = \Pi(x, t)$ i $v = v(x, t)$. Jednačine (1) i (2) se metodom karakteristika prevode u četiri obične diferencijalne jednačine koje se onda rešavaju.

¹ Mirjana Isić, dipl.grad.inž. – master, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554 – 300, e – mail: jsicm@gf.uns.ac.rs

² Prof. dr Miodrag Spasojević, dipl.grad.inž., Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554 – 300, e – mail: mspasojevic@gf.uns.ac.rs

³ Zoltan Horvat dipl.grad.inž. – master, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554 – 300, e – mail: horvatz@gf.uns.ac.rs

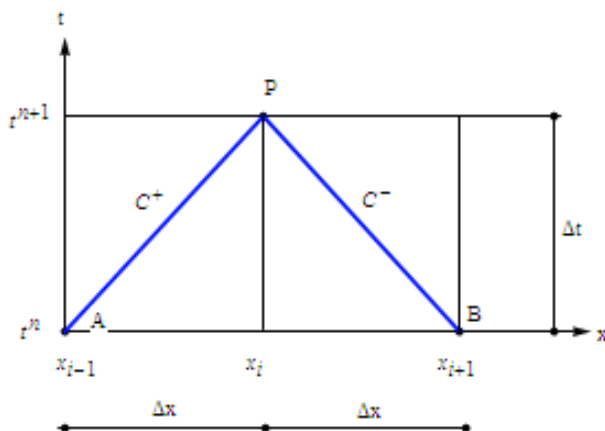
2. REŠAVANJE POJEDNOSTAVLJENIH JEDNAČINA

Brzina strujanja (v) može da se zanemari ako se pretpostavi da je brzina propagacije poremećaja (a) mnogo veća od nje $a \gg |v|$. Uz ovu pretpostavku se polazne parcijalne diferencijalne jednačine (1) i (2), primenom metode karakteristika, pretvaraju u obične diferencijalne jednačine (3) i (4)

$$C^+ : \frac{d\Pi}{dt} + \frac{a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} - v \cdot \sin \alpha + \frac{a}{g} \cdot \frac{\lambda \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0 \quad \text{što važi duž } \frac{dx}{dt} = a, \quad (3)$$

$$C^- : \frac{d\Pi}{dt} - \frac{a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} - v \cdot \sin \alpha - \frac{a}{g} \cdot \frac{\lambda \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0 \quad \text{što važi duž } \frac{dx}{dt} = -a. \quad (4)$$

Pretpostavljajući da je $a = \text{const.}$ može da se formira računski mreža koja zadovoljava uslov $a = dx/dt$, uz napomenu da su u ovom slučaju karakteristične linije (C^+ i C^-) prave (slika 1), a podnožje karakterističnih linija se poklapa sa računskim tačkama.



Slika 1.

Integraljenjem jednačina od polazne tačke (tačka A za C^+ , a tačka B za C^-) do dolazne tačke (P), se dobija

$$C^+ : \Pi_P - \Pi_A + \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_P - Q_A) - \frac{\sin \alpha}{A} \cdot (\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_A) \cdot \Delta t + \frac{a \cdot \lambda}{g \cdot 2 \cdot D \cdot A^2} \cdot [(\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_A) \cdot |\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_A| \cdot \Delta t] = 0 \quad (5)$$

$$C^- : \quad \Pi_P - \Pi_B - \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_P - Q_B) - \frac{\sin \alpha}{A} \cdot (\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_B) \cdot \Delta t - \frac{a \cdot \lambda}{g \cdot 2 \cdot D \cdot A^2} \cdot [(\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_B) \cdot |\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_B| \cdot \Delta t] = 0 \quad (6)$$

Nepoznate veličine u jednačinama (5) i (6) su proticaj u tački i u tekućem vremenskom nivou $n+1$, Q_P , i pijezometarska kota u tački i u trenutku $n+1$, Π_P . Oduzimanjem jednačine (6) od jednačine (5) se dobija jedna jednačina sa jednom nepoznom Q_P ,

$$\Pi_B - \Pi_A + B \cdot (2Q_P - Q_A - Q_B) + W \cdot (1-\theta) \cdot (Q_B - Q_A) + R \cdot [(\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_A) \cdot |\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_A| + (\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_B) \cdot |\theta \cdot Q_P + (1-\theta) \cdot Q_B|] = 0$$

gde su $B = a/(gA)$, $W = \sin \alpha \cdot \Delta t/A$, $R = a \cdot \Delta t \cdot \lambda / (2g \cdot D \cdot A^2)$. Izvedena jednačina je nelinearna algebarska jednačina koja se linearizuje primenom Newton – Raphson – ovog iterativnog postupka. Prikazana jednačina se može napisati za svaku računsku tačku unutar posmatrane oblasti, a tačke na granicama zahtevaju posebne jednačine.

3. GRANIČNI USLOVI

Spoljašnji granični uslovi

U slučaju da je na nizvodnom kraju cevi rezervoar, (slika 2), nepoznate veličine su Π_P i Q_P . Na osnovu slike 2 može da se napiše jedna jednačina pozitivne karakteristike (C^+),

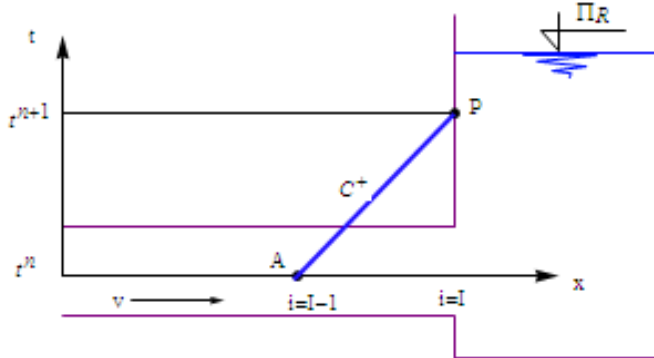
$$C^+ : \quad \Pi_{Pi} = \Pi_A - B(Q_{Pi} - Q_A) + W(\theta Q_{Pi} + (1-\theta)Q_A) - R[(\theta Q_{Pi} + (1-\theta)Q_A) \cdot |\theta Q_{Pi} + (1-\theta)Q_A|]$$

Za zatvaranje sistema je potrebna dodatna jednačina, što je u ovom slučaju energetska jednačina. Opšti oblik energetske jednačine između preseka u cevi i u rezervoaru je

$$\Pi_P = \Pi_R - \frac{Q_P^2}{2gA^2} (1 + \xi),$$

gde se koeficijenti lokalnih gubitaka razlikuju u zavisnosti od smera tečenja. Uvrštavanjem energetske jednačine u C^+ jednačinu se dobija jedna jednačina sa jednom nepoznom Q_{Pi} ,

$$\Pi_R - \frac{Q_{Pi}^2}{2gA^2} (1 + \xi) = \Pi_A - B(Q_{Pi} - Q_A) + W(\theta Q_{Pi} + (1-\theta)Q_A) - R[(\theta Q_{Pi} + (1-\theta)Q_A) \cdot |\theta Q_{Pi} + (1-\theta)Q_A|]$$



Slika 2 – Nizvodni granični uslov – rezervoar

Izvedena jednačina je nelinearna i potrebno ju je linearizovati.

U slučaju da je rezervoar zadat kao uzvodni granični uslov, nepoznate su Π_P i Q_P , a na raspolaganju stoji jedna C^- jednačina. Dodatna jednačina se dobija ispisivanjem energetske jednačine, sa čime se problem svodi na dve jednačine sa dve nepoznate.

Unutrašnji granični uslovi

Od unutrašnjih graničnih uslova je razmatrano serijsko vezivanje cevi i zatvarač. Prilikom serijskog vezivanja cevi se spajaju cevi različitih karakteristika. Posledica su različite brzine propagacije poremećaja u različitim cevima. Kako je $a = \Delta x / \Delta t$, računski korak po vremenu (Δt) može biti isti za sve cevi samo ako je računski korak po prostoru (Δx) promenljiv. Posmatra se slika 3, nepoznate veličine su $Q_{P_i}, Q_{P_{i+1}}, \Pi_{P_i}, \Pi_{P_{i+1}}$. Na raspolaganju su dve jednačine, jedna C^+ i jedna C^- jednačina,

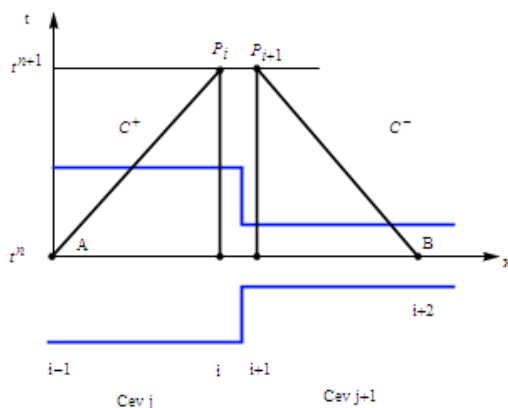
$$C^+ : \Pi_{P_i} - \Pi_A + B_j (Q_{P_i} - Q_A) - W_j (\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta)Q_A) + R_j [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta)Q_A) \cdot (\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta)Q_A)] = 0 \quad (7)$$

$$C^- : \Pi_{P_{i+1}} - \Pi_B - B_{j+1} \cdot (Q_{P_{i+1}} - Q_B) - W_{j+1} \cdot (\theta \cdot Q_{P_{i+1}} + (1-\theta) \cdot Q_B) - R_{j+1} \cdot [(\theta \cdot Q_{P_{i+1}} + (1-\theta) \cdot Q_B) \cdot (\theta \cdot Q_{P_{i+1}} + (1-\theta) \cdot Q_B)] = 0 \quad (8)$$

Za zatvaranje sistema nedostaju još dve jednačine. Dodaju se jednačina kontinuiteta, $Q_{P_i} = Q_{P_{i+1}}$, i energetska jednačina za ustaljeno tečenje u opštem obliku,

$$\Pi_{P_i} + \frac{Q_{P_i}^2}{2gA_j^2} = \Pi_{P_{i+1}} + \frac{Q_{P_{i+1}}^2}{2gA_{j+1}^2} + \xi_1 \cdot \frac{Q_{P_i}^2}{2gA_j^2} - \xi_2 \cdot \frac{Q_{P_{i+1}}^2}{2gA_{j+1}^2}, \quad (9)$$

gde se koeficijenti lokalnih gubitaka razlikuju u zavisnosti od smera tečenja i prečnika cevi. Primenom jednačine kontinuiteta na jednačinu (9) se dobija



Slika 3 – Unutrašnji granični uslov – serijska veza cevi

$$\Pi_{P_i} - \Pi_{P_{i+1}} + \frac{Q_{P_{i+1}}^2}{2g} \left(\frac{1 - \xi_1}{A_j^2} - \frac{1 - \xi_2}{A_{j+1}^2} \right) = 0. \quad (10)$$

U nastavku se iz jednačina karakteristika izražavaju nepoznate pijezometarske kote, koje se zatim, zajedno sa jednačinom kontinuiteta, uvrštavaju u jednačinu (10),

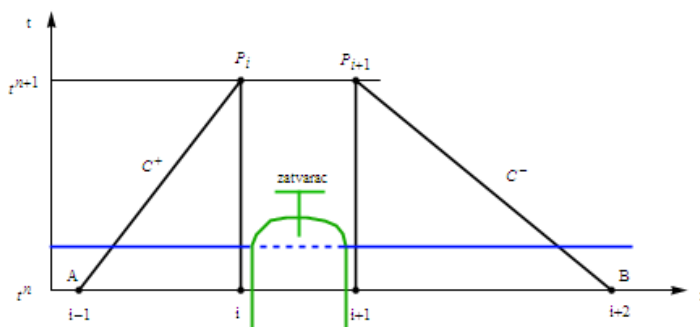
$$0 = \Pi_A + W_j \cdot (\theta \cdot Q_{P_i} + (1 - \theta) \cdot Q_A) - R_j \cdot [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1 - \theta) \cdot Q_A) \cdot |\theta \cdot Q_{P_i} + (1 - \theta) \cdot Q_A|] - \\ \Pi_B - W_{j+1} (\theta \cdot Q_{P_i} + (1 - \theta) \cdot Q_B) - R_{j+1} [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1 - \theta) \cdot Q_B) \cdot |\theta \cdot Q_{P_i} + (1 - \theta) \cdot Q_B|] - \\ - B_j \cdot (Q_{P_i} - Q_A) - B_{j+1} (Q_{P_i} - Q_B) + \frac{Q_{P_i}^2}{2g} \left(\frac{1 - \xi_1}{A_j^2} - \frac{1 - \xi_2}{A_{j+1}^2} \right)$$

Na ovaj način je dobijena jedna nelinearna algebarska jednačina sa jednom nepoznatom Q_{P_i} koja se linearizuje i rešava primenom Newton – Raphson – ovog iterativnog postupka.

U slučaju da se na sredini cevi nalazi zatvarač, slika 4, nepoznate su $Q_{P_i}, Q_{P_{i+1}}, \Pi_{P_i}$ i $\Pi_{P_{i+1}}$. Ispisivanjem C^+ i C^- jednačina se dobijaju dve jednačine, jednačine (7) i (8), a zatvaranje sistema zahteva dve dodatne jednačine. Prva jednačina je jednačina kontinuiteta, $Q_{P_i} = Q_{P_{i+1}}$, a druga jednačina je veza protoka i pijezometarske kote za zatvarač između dve cevi,

$$Q_{P_i} = Q_{0i} \cdot \tau \cdot \sqrt{\frac{\Pi_{P_i} - \Pi_{P_{i+1}}}{\Pi_{0i} - \Pi_{0i+1}}}, \quad (11)$$

gde je $\tau = C_Q A_z / (C_Q A_z)_0$ ($\tau = 0$ znači da je zatvarač potpuno zatvoren, a $\tau = 1$ da je potpuno otvoren u odnosu na početnu otvorenost). Veličine Q_{0i}, Π_{0i} , i Π_{0i+1} su početne vrednosti proticaja i pijezometarskih kota. Oduzimanjem jednačine C^- od jednačine C^+ uz primenu jednačine kontinuiteta, se dobija



Slika 4.

$$\begin{aligned} \Pi_{P_i} - \Pi_{P_{i+1}} = & \Pi_A - \Pi_B - W_{j+1} \cdot (\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_B) + W_j \cdot (\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_A) - \\ & - B_j \cdot (Q_{P_i} - Q_A) - R_j \cdot [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_A) \cdot |\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_A|] - \\ & - B_{j+1} \cdot (Q_{P_i} - Q_B) - R_{j+1} \cdot [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_B) \cdot |\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_B|] \end{aligned}$$

Ako se iz jednačine (11) izrazi razlika pijezometarskih kota i uvrsti u poslednju jednačinu, nakon sređivanja se dobija,

$$\frac{Q_{0i}^2 \cdot \tau^2}{\Pi_{0i} - \Pi_{0i+1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \Pi_A - \Pi_B - B_j \cdot (Q_{P_i} - Q_A) - B_{j+1} \cdot (Q_{P_i} - Q_B) - \\ - R_j \cdot [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_A) \cdot |\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_A|] - \\ - W_{j+1} \cdot (\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_B) + W_j \cdot (\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_A) - \\ - R_{j+1} \cdot [(\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_B) \cdot |\theta \cdot Q_{P_i} + (1-\theta) \cdot Q_B|] \end{array} \right\} - Q_{P_i} | Q_{P_i} | = 0$$

Izvedena jednačina je nelinearna algebarska jednačina sa jednom nepoznatom za čiju se linarizaciju i rešavanje koristi Newton – Raphson – ov iterativni postupak.

4. REŠAVANJE KOMPLETNIH JEDNAČINA

Kod postupka rešavanja kompletnih jednačina se brzina “v” ne zanemaruje u polaznim jednačinama. U tom slučaju se polazne parcijalne diferencijalne jednačine (1) i (2), primenom metode karakteristika pretvaraju u obične diferencijalne jednačine (12) i (13)

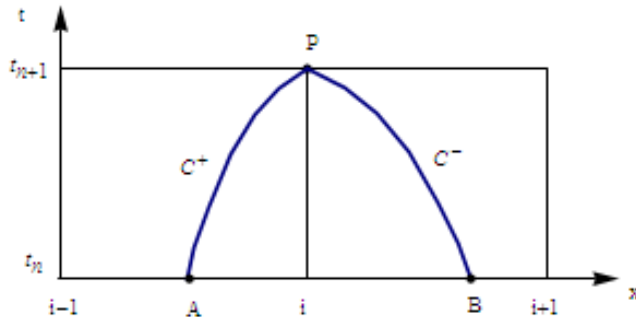
$$C^+ : \frac{d\Pi}{dt} + \frac{a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} - v \cdot \sin \alpha + \frac{a}{g} \cdot \frac{\lambda \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0 \quad \text{što važi duž} \quad \frac{dx}{dt} = v + a, \quad (12)$$

$$C^- : \frac{d\Pi}{dt} - \frac{a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} - v \cdot \sin \alpha - \frac{a}{g} \cdot \frac{\lambda \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0 \quad \text{što važi duž} \quad \frac{dx}{dt} = v - a. \quad (13)$$

Pošto jednačine sadrže brzinu v , karakteristične linije više nisu prave, pa se tačke A i B (podnožja karakteristika) ne poklapaju sa računskim tačkama (tačke $i-1$ i $i+1$ na slici 5). U ovom slučaju nema razloga da se poštuje uslov $a = \Delta x / \Delta t$, odnosno, može da se dozvoli promenljiv računski korak po prostoru Δx . Integraljenjem jednačina karakteristika od polazne do dolazne tačke, jednačine postaju,

$$C^+ : \quad \Pi_P - \Pi_A + \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_P - Q_A) - \frac{\sin \alpha}{A} \cdot (\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_A) \cdot (t_P - t_A) + \frac{\lambda \cdot a}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \cdot [(\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_A) \cdot |\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_A|] \cdot (t_P - t_A) = 0 \quad (15)$$

$$\text{što važi duž} \quad x_P - x_A = \left[\theta \cdot \left(\frac{Q}{A} + a \right)_P + (1 - \theta) \cdot \left(\frac{Q}{A} + a \right)_A \right] \cdot (t_P - t_A) \quad (16)$$



Slika 5.

$$C^- : \quad \Pi_P - \Pi_B - \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_P - Q_B) - \frac{\sin \alpha}{A} \cdot (\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_B) \cdot (t_P - t_B) - \frac{\lambda \cdot a}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \cdot [(\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_B) \cdot |\theta \cdot Q_P + (1 - \theta) \cdot Q_B|] \cdot (t_P - t_B) = 0 \quad (17)$$

$$\text{što važi duž} \quad x_P - x_B = \left[\theta \cdot (Q/A - a)_P + (1 - \theta) \cdot (Q/A - a)_B \right] \cdot (t_P - t_B) \quad (18)$$

Dobijene su četiri jednačine (15), (16), (17) i (18), gde su $t_A = t_B = t_n$, $t_P = t_{n+1}$, $t_P - t_A = t_P - t_B = \Delta t$ i x_P , poznate veličine, a nepoznate veličine su Q_P , Π_P , x_A , x_B , Π_A , Π_B , Q_A i Q_B . Dodatne jednačine se dobijaju iz interpolacionih izraza za Π i Q u tačkama A i B . Primenom linearne interpolacije se, na osnovu slike 5, mogu napisati sledeće jednačine

$$\frac{\Pi_i - \Pi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Pi_A - \Pi_{i-1}}{x_A - x_{i-1}} \Rightarrow \Pi_A = \Pi_{i-1} + \frac{x_A - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (\Pi_i - \Pi_{i-1}) \quad (19)$$

$$\frac{Q_i - Q_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{Q_A - Q_{i-1}}{x_A - x_{i-1}} \Rightarrow Q_A = Q_{i-1} + \frac{x_A - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (Q_i - Q_{i-1}) \quad (20)$$

$$\frac{\Pi_{i+1} - \Pi_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Pi_B - \Pi_i}{x_B - x_i} \Rightarrow \Pi_B = \Pi_i + \frac{x_B - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (\Pi_{i+1} - \Pi_i) \quad (21)$$

$$\frac{Q_{i+1} - Q_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{Q_B - Q_i}{x_B - x_i} \Rightarrow Q_B = Q_i + \frac{x_B - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (Q_{i+1} - Q_i) \quad (22)$$

Cilj je da se sistem od osam jednačina i osam nepoznatih veličina svede na jednu jednačinu sa jednom nepoznatom. Prvo se koordinate x_A i x_B izraze iz jednačina (16) i (18) i uvrste se u izraze (19), (20), (21) i (22),

$$Q_A = \frac{[Q_{i-1} \cdot \Delta x_{i-1} + \Delta Q_{i-1} \cdot (x_P - x_{i-1}) - \Delta Q_{i-1} \cdot \Delta t \cdot (\theta \cdot Q_P / A + a)] \cdot A}{\Delta x_{i-1} \cdot A + (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot \Delta Q_{i-1}} \quad (23)$$

$$Q_B = \frac{[Q_i \cdot \Delta x_i + \Delta Q_i \cdot (x_P - x_i) - \Delta Q_i \cdot \Delta t \cdot (\theta \cdot Q_P / A - a)] \cdot A}{\Delta x_i \cdot A + (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot \Delta Q_i} \quad (24)$$

$$\Pi_A = \Pi_{i-1} + \frac{(x_P - x_{i-1}) - \Delta t \cdot (\theta \cdot Q_P / A + a)}{\Delta x_{i-1}} \cdot \Delta \Pi_{i-1} - \frac{(1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot \Delta \Pi_{i-1}}{A \cdot \Delta x_{i-1}} \cdot Q_A \quad (25)$$

$$\Pi_B = \Pi_i + \frac{x_P - x_i - \Delta t \cdot (\theta \cdot Q_P / A - a)}{\Delta x_i} \cdot \Delta \Pi_i - \frac{(1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot \Delta \Pi_i}{A \cdot \Delta x_i} \cdot Q_B \quad (26)$$

gde su $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta Q_i = Q_{i+1} - Q_i$, $\Delta \Pi_i = \Pi_{i+1} - \Pi_i$. Ako se u izraze za Π_A i Π_B uvrste izrazi za protoke Q_A i Q_B , dobija se veza $\Pi_A(Q_P)$ i $\Pi_B(Q_P)$. Uvrštavanjem jednačina (23), (24), (25) i (26) u jednačine karakteristika (15) i (17) se dobijaju dve jednačine sa dve nepoznate, Q_P i Π_P . Oduzimanjem, jednačine C^- od

Jednačine C^+ se iz jednačina eliminiše nepoznata pijezometarska kota Π_p i ostaje jedna jednačina sa jednom nepoznatom veličinom, Q_p ,

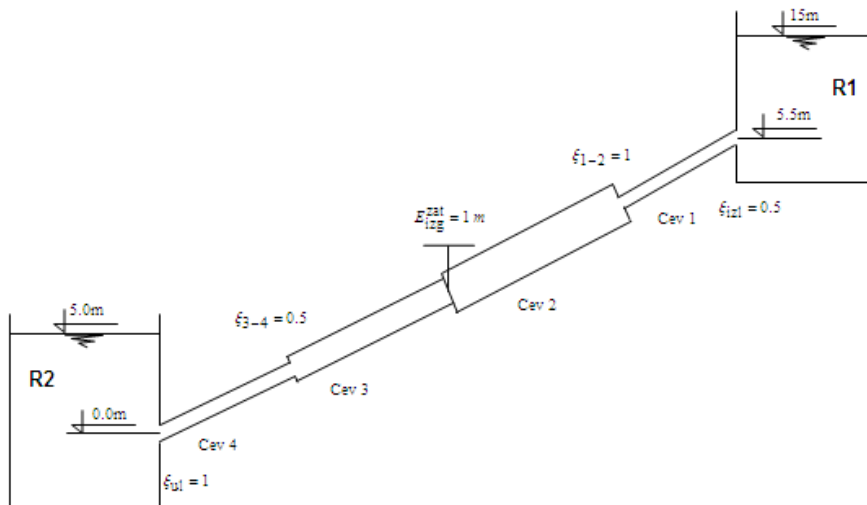
$$\Pi_B - \Pi_A + B(2 \cdot Q_p - Q_A - Q_B) - W(1 - \theta) \cdot (Q_A - Q_B) + \\ + R \left[(\theta \cdot Q_p + (1 - \theta) Q_A) \left| \theta \cdot Q_p + (1 - \theta) Q_A \right| + (\theta \cdot Q_p + (1 - \theta) Q_B) \left| \theta \cdot Q_p + (1 - \theta) Q_B \right| \right] = 0$$

Dobijena jednačina je nelinearna algebarska jednačina koju je potrebno linearizovati.

Jednačine unutrašnjih i spoljašnjih graničnih uslova se određuju kao u slučaju pojednostavljenih jednačina. Razlika je u tome što kod kompletnih jednačina položaj podnožja karakterističnih linija (tačke A i B na slici 5), i vrednosti pijezometarskih kota i proticaja u istim tačkama nisu poznate nego se određuju interpolacijom.

5. ANALIZA REZULTATA

Posmatra se sistem prikazan na slici 6. U početnom trenutku u sistemu vlada ustaljeno stanje. Vodni udar (neustaljeno tečenje) u sistemu pod pritiskom izazvano je zatvaranjem zatvarača. Podaci potrebni za proračun su dati u tabelama 1 i 2 i na slici 6. Razmatraju se dva slučaja. U prvom slučaju se zatvarač naglo zatvara, a u drugom je zatvaranje postepeno. U tabeli 3 su date vrednosti funkcije zatvaranja zatvarača.



Slika 6.

Tabela 1 – Podaci za proračun

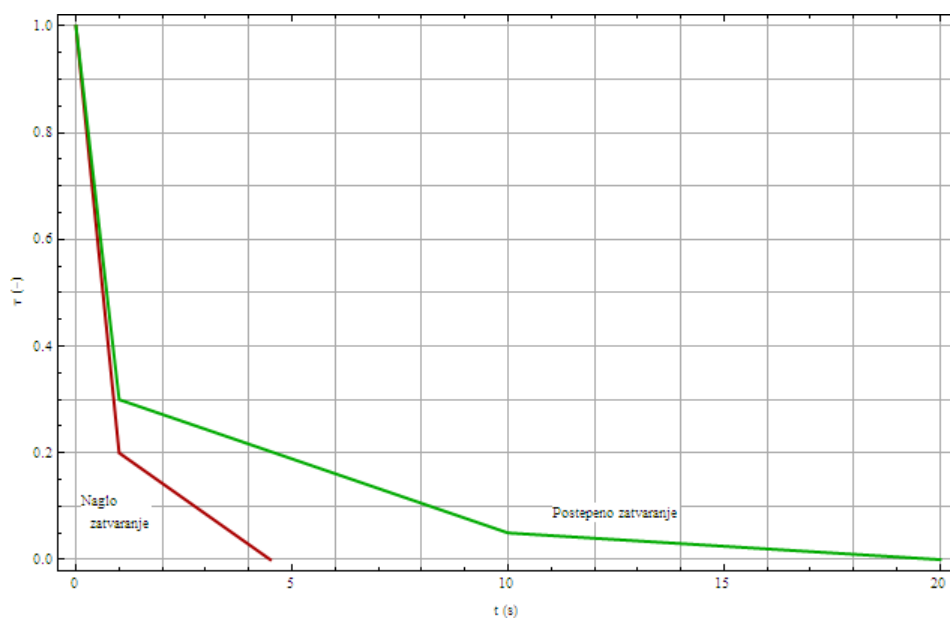
K (GN/m ²)	E (GN/m ²)	ν (-)	ρ (kg/m ³)	θ (-)	Δt (s)
2.19	205	0.27	1000.0	0.5	0.00824

Tabela 2 – Karakteristike cevi

Cev	Cev 1	Cev 2	Cev 3	Cev 4
Dužina L (m)	250.0	150.0	50.0	100.0
Prečnik D (m)	0.75	1.0	0.75	0.50
Debljina zida e (mm)	10.0	20.0	15.0	15.0
Koef. Trenaj λ (-)	0.030	0.025	0.025	0.020

Tabela 3 – Funkcija zatvaranja zatvarača

Naglo zatvaranje	t (s)	0.0	1.0	4.5	
	τ (-)	1.0	0.2	0.0	
Postepeno zatvaranje	t (s)	0.0	1.0	10.0	20.0
	τ (-)	1.0	0.3	0.05	0.0



Slika 7 – Grafički prikaz funkcije zatvaranja zatvarača

Postupak sa kompletnim jednačinama

Brzina propagacije talasa je $a^2 = (K / \rho) / (1 + \psi \cdot K / E)$, gde koeficijent ψ zavisi od načina oslanjanja i odnosa D/e . Sve cevi su uklješteno celom dužinom, i za svaku cev važi da je $D/e > 25$, pa je koeficijent ψ određen izrazom $\psi = D/e(1 - \nu^2)$.

Tabela 4.

Cev	Cev 1	Cev 2	Cev 3	Cev 4
D/e (-)	75.00	50.00	50.00	33.33
ψ (-)	69.53	46.36	46.36	30.90
a (m/s)	1120.98	1210.24	1210.24	1283.14

Računski koraci po vremenu i prostoru su isti kao kod rešavanja pojednostavljenih jednačina kako bi se vrednosti računale za iste tačke i iste vremenske trenutke.

Postupak sa pojednostavljenim jednačinama

U slučajevima serijski vezanih cevi različitih karakteristika, se za različite cevi dobijaju različite brzine propagacije poremećaja. Cilj je odrediti broj dužina Δx označen sa N_j tako da N_j bude ceo broj. Jedna mogućnost za to je prilagođavanje brzine propagacije talasa. Postupak počinje tako što se izračunaju brzine propagacije datih cevi, pa se za najkraću cev odredi Δt iz uslova da je $\Delta t = \Delta x/a$. Na ovaj način se za najkraću cev uzima tačna vrednost računskog koraka po vremenu, a za ostale cevi se uzimaju korigovane vrednosti. Značaj određivanja računskog koraka po vremenu za najkraću cev je u tome što su onda relativne greške zaokruživanja manje kod ostalih (dužih) cevi. Za računski korak po prostoru se uzima $\Delta x = 10m$. Najkraća cev je cev 3 odakle je $\Delta t = \Delta x/a_3 = 0.0083s$. Sa poznatim računskim korakom po vremenu se određuje potreban broj tačaka N_j , iz $N_j^{potrebno} = L_j / (a_j \cdot \Delta t)$. Nakon što se sračuna $N_j^{potrebno}$, dobijene vrednosti se zaokruže na ceo broj, N_j pa se za svaku cev izračuna korigovana brzina propagacije poremećaja i računski korak po prostoru, Δx_j iz $\Delta x_j = L_j / N_j$. Sračunate vrednosti su date u tabeli 5.

Tabela 5.

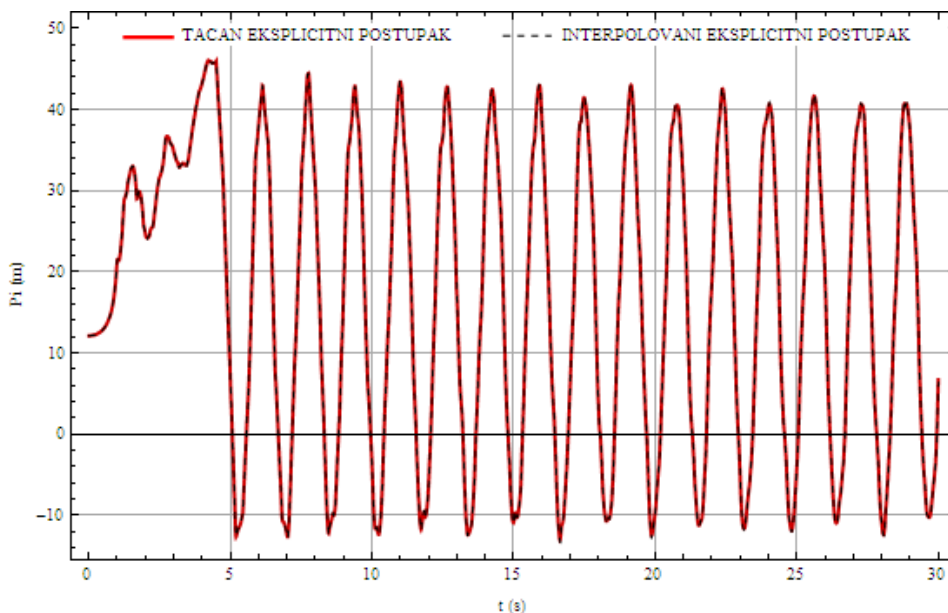
Cev j	Cev 1	Cev 2	Cev 3	Cev 4
a_j (m/s)	1120.98	1210.24	1210.24	1283.14
L_j (m)	250.0	150.0	50.0	100.0
$N_j^{potrebno}$ (-)	26.99072	15.000	5.000	9.431867
N_j (-)	27	15.000	5.000	9.000
$a_j^{korigovano}$ (m/s)	1120.592	1210.23967	1210.23967	1344.711
Δx_j (m)	9.259	10.000	10.000	11.111

Početni uslovi se određuju ispisivanjem energetske jednačine između dva rezervoara, i isti su za oba proračuna,

$$\Pi_{R1} = \Pi_{R2} + \left(\xi_{izl} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} + \xi_{1-2} \right) \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} +$$

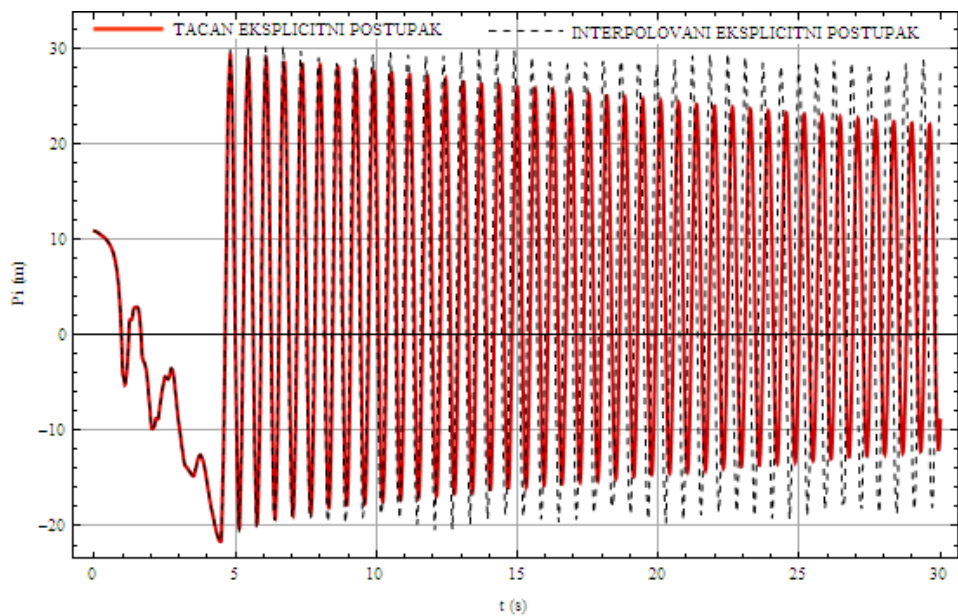
$$+ E_{izg}^{zat} + \left(\xi_{3-4} + \lambda_3 \cdot \frac{L_3}{D_3} \right) \cdot \frac{v_3^2}{2g} + \left(\xi_{ul} + \lambda_4 \cdot \frac{L_4}{D_4} \right) \cdot \frac{v_4^2}{2g}$$

odakle se dobijaju početne vrednosti za proticaj $Q = 0.9262m^3/s$ i pijeziometarske kote. U nastavku su prikazani rezultati proračuna za opisanu situaciju, dobijeni sa dva postupka, tačnim eksplicitnim i interpolovanim eksplicitnim postupkom.

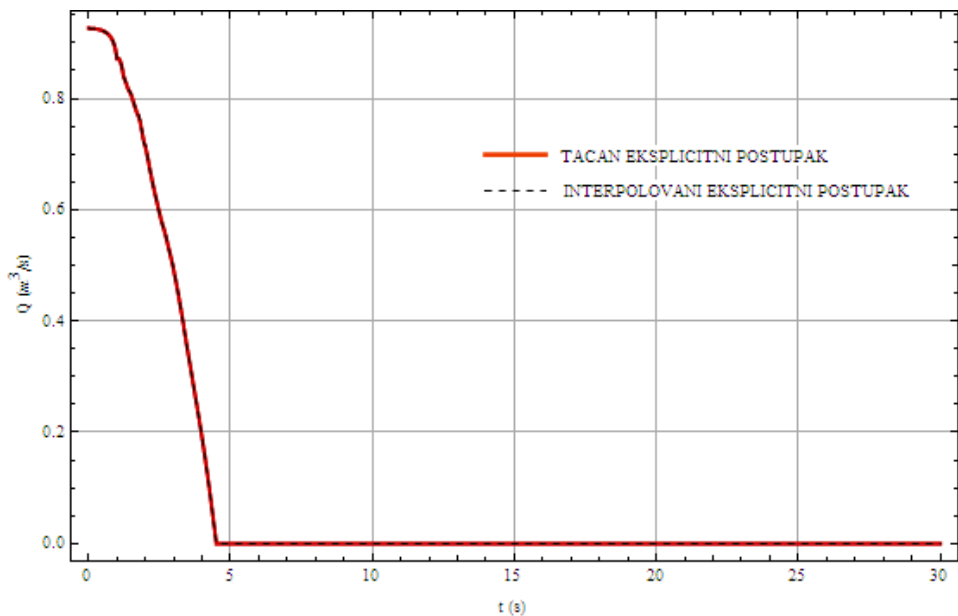


Slika 8 – Funkcija $\Pi(t)$ neposredno uzvodno od zatvarača – naglo zatvaranje

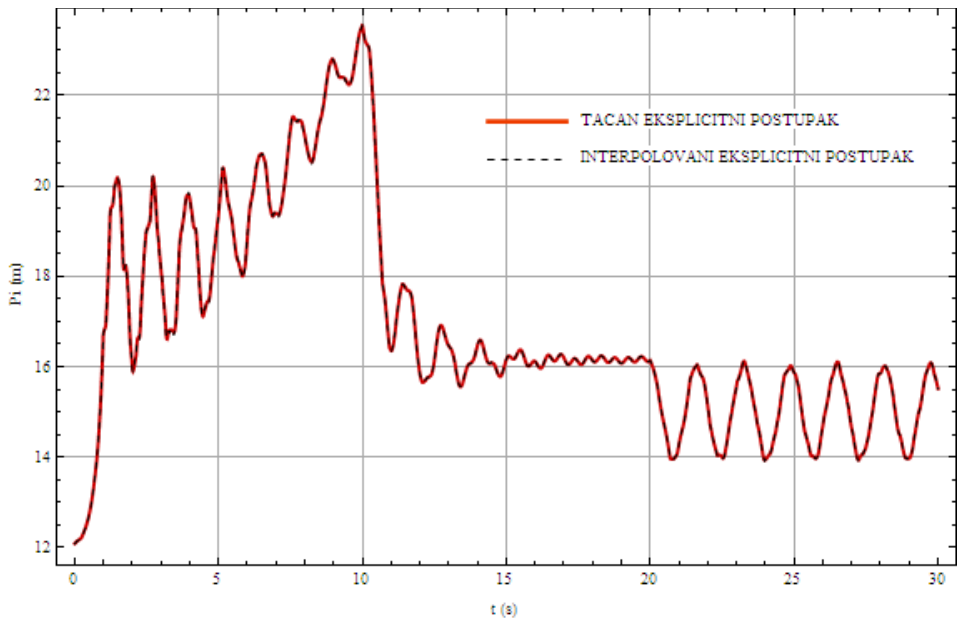
Upoređivanjem rezultata dobijenih za slučaj naglog zatvaranja zatvarača, za presek neposredno nizvodno od zatvarača, slika 9, se uočava da pijeziometarska kota opada mnogo brže u slučaju rešavanja kompletnih jednačina. Pomenuta pojava može biti posledica ne zanemarivanja brzine v u odnosu na brzinu propagacije poremećaja ili posledica numeričke difuzije zbog primenjene interpolacije. Ponavljanjem proračuna sa manjim Δt pikovi pijeziometarske kote opadaju mnogo brže što ukazuje na to da je smanjenje pomenutih pikova posledica interpolacije tj. numeričke difuzije. Značajno je primetiti da oba postupka daju iste vrednosti maksimalnih pijeziometarskih kota. Proticaji dobijeni na dva različita načina se poklapaju, slika 10.



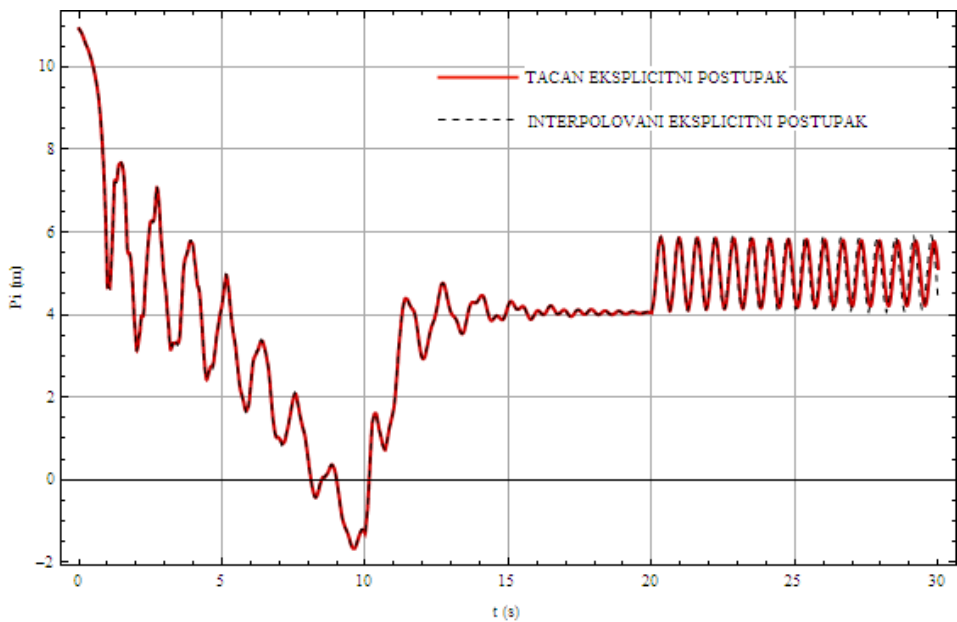
Slika 9 – Funkcija $\Pi(t)$ neposredno nizvodno od zatvarača – naglo zatvaranje



Slika 10 – Funkcija $Q(t)$ neposredno uzvodno i nizvodno od zatvarača – naglo zatvaranje



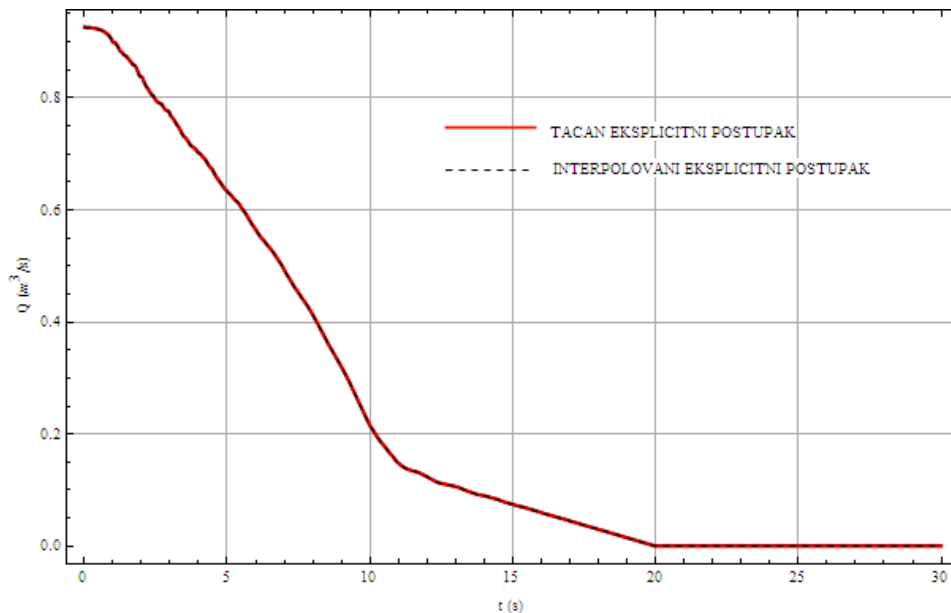
Slika 11 – Funkcija $\Pi(t)$ neposredno uzvodno od zatvarača – postepeno zatvaranje



Slika 12 – Funkcija $\Pi(t)$ neposredno nizvodno od zatvarača – postepeno zatvaranje

Rezultati za slučaj postepenog zatvaranja zatvarača su prikazani na slikama 11, 12 i 13. Hidrogrami dobijeni rešavanjem kompletnih i pojednostavljenih jednačina se i u ovom slučaju poklapaju. Ako se uporede rezultati za dva postupka, za presek nizvodno od

zatvarača, primećuje se da postoje odstupanja ali mnogo manja nego u prethodnom slučaju. Upoređivanjem rezultata za dve brzine zatvaranja zatvarača se vidi uticaj brzine zatvaranja na intenzitet hidrauličkog udara, što je zatvaranje brže, veći je poremećaj.



Slika 13 – Funkcija $Q(t)$ neposredno uzvodno i nizvodno od zatvarača za slučaj postepenog zatvaranja

LITERATURA

- [1] E. Benjamin Wylie, Victor L. Streeter, Lisheng Suo, Fluid Transients in Systems Prentice Hall, Inc., New Jersey, **1993**.
- [2] M. Spasojević, Numerička hidraulika, Pisana predavanja, Subotica, **1996**.

NUMERICAL SOLUTION OF THE TRANSIENT FLOW EQUATIONS

Summary: This paper presents a numerical solution of the hydraulic transients equations. The numerical solution is based on two modeling approaches, the exact explicit method and the interpolated explicit method, both using the fixed computational grid. The first approach is the so called exact explicit method, using simplified equations of motion and continuity. The second approach is the interpolated explicit method, using complete equations with interpolation. The two approaches are then tested on the same example for comparison.

Key words: Transient flow, unsteady flow, numerical model, exact explicit method, interpolated explicit method.