INTERPOLACIJA POMOĆU SKUPA LOKALNIH PARABOLA I PROCENA TAČNOSTI U MEHANICI KONSTRUKCIJA

Vojislav Mihailović[1]
Ljiljana Tadić[2]

UDK: 517.518.85:531/534

Rezime: *U radu je prikazan predlog postupka za interpolaciju funkcija jednog argumenta kada su zadate njene diskretne vrednosti. Predlog može da ima, prema našem mišljenju, veliki značaj za primenu u više oblasti mehanike konstrukcija. Obim rada je znatno manji pri proračunu zbog primene većih podintervala u odnosu na druge postupke, jer pruža mogućnost za procenu greške interpolacije.*

Ključne reči: *Interpolacija, model, multilinearna i lokalna parabolična funkcija, mehanika konstrukcija.*

1. UVOD

Upravljanje inženjerskim podacima često postavlja zadatak analize interpolovanih vrednosti funkcija kao tradicionalan zahtev pri projektovanju konstrukcija. Najpoznatije interpolacione funkcije za celu oblast definisanosti (a,b) su:

1. Lagranžova formula
2. Njutnova formula
3. Čebiševa formula
4. 'Spline'formula
5. Beselova formula i dr.

U inženjerskoj praksi su šire zastupljene formule navedene pod 1. i 2. U primenama problem ovih formula nastaje kada se analiziraju rezultati interpolacija, jer dobijene vrednosti mogu višestruko da budu različite od očekivanih što je analizirano u radovima [1][2][4][14][15].

U okviru rada 'Postupak numeričke integracije osrednjavanjem i procena tačnosti'[11] izložena je prva analiza autora o mogućnostima interpolacije, odnosno aproksimacije funkcije pomocu lokalne prave linije ili parabole koje prolaze kroz date čvorove funkcije i sažeto prikazana njena prednost u odnosu na postupke koji daju globalne funkcije, koje su zadate za ukupan interval funkcije (a,b).

U lokalne interpolacije spada dobro poznata i najčešće korišćena interpolacija pravom linijom između dva susedna čvora funkcije. Lokalna parabolična interpolacija

[1] Prof. dr Vojislav Mihailović, dipl. inž. građ (u penziji), Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel.: 024/554 300, e – mail: voja@gf.uns.ac.rs
[2] mr Ljiljana Tadić, dipl. inž. građ., Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel.: 024/554 300, e – mail: tadic@gf.uns.ac.rs

primenjena je, takođe, u nizu radova, ali uvek nezavisno za skup od tri susedna čvora funkcije (npr. Simpsonovo pravilo numeričke integracije). Za razliku od njihovog pristupa ovde će se uzimati u razmaranje trend toka krive linije unazad i unapred za sve poditervale funkcije da bi se poboljšala tačnost proračuna.

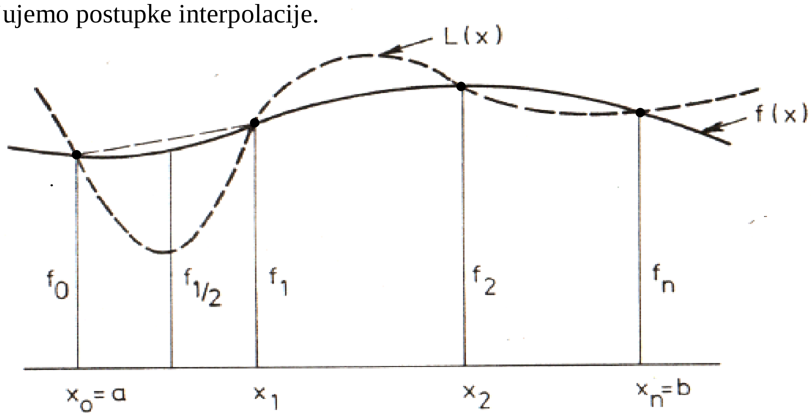
Problemi interpolacija funkcija su od izuzetnog značaja, sa jedne strane za predskazivanje vrednosti fizičkih ili samo matematičkih veličina, i radi stvaranja matematičkih modela mnogih problema mehanike konstrukcija sa druge strane. Mogu se navesti zadaci određivanja pomeranja konstrukcija uz uslov minimalnog broja ulaznih podataka, zatim geometrijskih veličina i dimenzionisanja poprečnih preseka, postupci težinskih koeficijenata u dinamici konstrukcija i mnogi drugi.

Cilj rada je da prikaže osnovne formule za interpolaciju date funkcije u diskretnim tačkama, koje su primenjene u više radova autora iako detaljano nije nigde opisano njihovo izvođenje. Ovde to treba da bude nadoknađeno, jer se one vrlo uspešno mogu primeniti i u drugim oblastima numeričke obrade problema matematike i mehanike konstrukcija [9] [10][11][12][13][16].

Problemi korelacije krivih linija, ili njihove regresije ('fitovanja') nisu obuhvaćene ovim radom. Nadamo se da će ovi problemi biti obrađeni i sa novim gledanjem na probleme interpolacije [14].

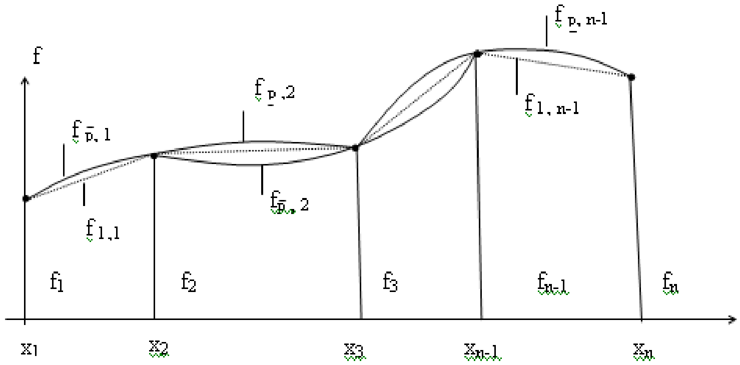
2. OSNOVNE FORMULE ZA MULTILOKALNU INTERPOLACIJU FUNKCIJA

Inženjerski podaci su često dati u tabelama kao snimljene vrednosti eksperimenata ili rezultati numeričkih analiza problema dimenzionisanja preseka ili konstrukcija. Praktično postoji limit broja podataka za obradu ili čuvanje u memoriji, zbog znatno lakšeg rada sa manjim brojem podataka. Greške pri obradi, takođe, su u direktnoj zavisnosti od broja podataka koje unosimo ili prenosimo u toku rada. Zato treba da budemo sigurni u rezultate i moguće njihove greške koje oni imaju. U tom cilju primenjujemo postupke interpolacije.



Sl.1 – Lokalna linearna i parabolična funkcija često je bolja od funkcije koja prolazi kroz sve čvorove [9] [11]

Ako su poznate samo diskretne vrednosti funkcije, smatra se da nismo u stanju da procenimo stepen tačnosti interpolacione funkcije L(x). Kroz konačan broj čvorova krive y=f(x) može se nacrtati neograničeno veliki broj krivih linija, koje ispunjavaju uslov $f(x_i)=L(x_i)$ (i=0,1,2...,n). Na Sl.1 se vidi da odstupanja od trenda ('tačne') funkcije mogu biti vrlo velike. Već je ukazano da linearna interpolacija između čvorova može biti mnogo bolja od 'tačnih' metoda [9][11]. Ovo se lako vidi na Sl.1.



Sl.2–Lokalna parabolična interpolacija unazad i unapred u podintervalima (npr:(x_2, x_3))

U intervalu funkcije (x_1=a, x_n=b), na Sl.2, prikazano je nekoliko podintervala funkcije. Diskretne vrednosti funkcije date su samo u čvorovima $f_i=f(x_i)$. Ako posmatramo podinterval funkcije (x_2,x_3) može se videti da je moguće nacrtati lokalnu parabolu kroz čvorove (x_1,f_1), (x_2,f_2) i (x_3,f_3), kao oblik interpolacije koji možemo nazvati *interpolacijom unazad*, a za lokalnu parabolu kroz tačke (x_2,f_2), (x_3,f_3), (x_4,f_4) *interpolacijom unapred*.

a) Linearna interpolaciona formula za jedan podinterval funkcije

Dobro je poznat (npr. [5]) najjednostavniji oblik interpolacije pomoću linearne funkcije između čvora funkcije (x_1,f_1) i čvora (x_2,f_2):

$$f_{l,1} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2 \tag{1}$$

Za prvi podinterval sažeto se može napisati:

$$f_{l,1} = f_l(x_1, x_2, x)$$

(1a)

Ako je j= 2,3,...,n-1 sledi:

$$f_{l,j} = f_l(x_j, x_{j+1}, x) \tag{1b}$$

Ukoliko su podintervali jednaki dobija se:

$$f_{l,1} = \frac{1}{h}[-(x - x_2) f_1 + (x - x_1) f_2],$$

gde je h dužina podintervala.

b) Lokalna parabolična interpolaciona formula za dva podintervala

Ako se postavi uslov da je $f(x_i)=L(x_i)$ samo za tri susedna čvora $(x_1,f_1),(x_2,f_2)$ i (x_3,f_3), dobija se (za podinterval j=1) izraz za ordinatu parabolične funkcije:

$$f_{\bar{p},1} = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \ , \qquad (2)$$

odnosno $f_{p,1} = f_{\bar{p},1}$ za ordinatu parabole unapred, označenoj sa crticom iznad p. Sažeto se izraz (2) može napisati za podinterval j=2 za parabolu unazad (sa crticom ispod indeksa p):

$$f_{\underline{p},2} = f_p(x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3, x) \ , \qquad (2a)$$

a za parabolu unapred (sa crticom iznad indeksa p), odgovarajućom zamenom brojčanih indeksa u izrazu (2a), dobija se:

$$f_{\bar{p},2} = f_p(x_2, x_3, x_4, f_2, f_3, f_4, x) \ . \qquad (2b)$$

Za podintervale j=3, 4,..., n-2 dobija se za parabolu unazad:

$$f_{\underline{p},j} = f_p(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, x) \ , \qquad (2c)$$

a za parabolu unapred:

$$f_{\bar{p},j} = f_p(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}, x) \ . \qquad (2d)$$

Slično se mogu dobiti izrazi za bilo koje podintervale, jednostavnom zamenom indeksa (za j=3,..., n-1). Za poslednji podinterval (n-1, n) važi:

$$f_{\underline{p},n-1} = f_p(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, x) \qquad (2e)$$

Ako su podintervali konstantni, tada se za podinterval j=2 i parabolu unazad dobija:

$$f_{\underline{p},2} = \frac{1}{2h^2}[(x-x_2)(x-x_3) f_1 - 2(x-x_1)(x-x_3) f_2 + (x-x_1)(x-x_2) f_3] \ ,$$

a za parabolu unapred:

$$f_{\bar{p},2} = \frac{1}{2h^2}[(x-x_3)(x-x_4) f_2 - 2(x-x_2)(x-x_4) f_3 + (x-x_2)(x-x_3) f_4] \ .$$

Izrazi (2) se mogu dobiti i prema Langranžovoj formuli za tri čvora [5].

c) Interpolaciona formula za ceo interval funkcije

Ako formiramo skup lokalnih linearnih funkcija, dobijamo za ceo interval funkcije:

$$f_1 = \{ f_{l,j} \quad | \quad j = 1, 2, ..., n-1 \} \tag{3}$$

Slično za skup lokalnih parabola važi:

$$f_p = \left\{ \begin{array}{lcc} f_{\overline{p},j} & | & j = 1 \\ f_{p,j} & | & j = 2, ..., n-2 \\ f_{\underline{p},j} & | & j = n-1 \end{array} \right\}, \tag{4}$$

gde je:

$$f_{p,j} = f_{l,j} + \Delta f_{p,j} \tag{5}$$

Priraštaj ordinata paraboličn e aproksimacije (za 2=<j=< n-2), zavisi od težinskog odnosa interpolacione parabole unazad i unapred , koji se može naći preko izraza

$$\Delta f_{p,j} = w_{\underline{p},j} \cdot \Delta f_{\underline{p},j} + w_{\overline{p},j} \cdot \Delta f_{\overline{p},j} \ , \tag{6}$$

gde su težinski koeficijenti

$$w_{\underline{p},j} = \frac{abs(\Delta f_{\underline{p},j})}{abs(\Delta f_{\underline{p},j}) + abs(\Delta f_{\overline{p},j})} \tag{7}$$

$$w_{\overline{p},j} = \frac{abs(\Delta f_{\overline{p},j})}{abs(\Delta f_{\underline{p},j}) + abs(\Delta f_{\overline{p},j})} \tag{8}$$

U izrazu (6), parabolični priraštaji nalaze se kao razlika odgovarajućih ordinata za parabolu unapred i unazad, i ordinata za linearnu aproksimaciju:

$$\Delta f_{\underline{p},j} = f_{\underline{p},j} - f_{l,j} \tag{9}$$

$$\Delta f_{\overline{p},j} = f_{\overline{p},j} - f_{l,j} \tag{10}$$

Za brze proračune mogu se uzeti približni izrazi:

$$\begin{array}{llll} w_{\underline{p},1} = 0 \quad \text{i} \quad w_{\overline{p},1} = 1 & \text{za} \quad j = 1 & (\text{ili} \ f_{p,1} = f_{\underline{p},1}) \\ w_{\underline{p},j} = w_{\overline{p},j} = 0,5 & \text{za} \quad j = 2, 3, ..., n-2 & \\ w_{\underline{p},n-1} = 1 \quad \text{i} \quad w_{\overline{p},n-1} = 0 & \text{za} \quad j = n-1 & (\text{ili} \ f_{p,n-1} = f_{\underline{p},n-1}) \end{array} \tag{11}$$

Prema tome, za podintervale *j=2* do *n-2*, zbog uticaja interpolacije unazad i unapred, važi:

$$f_{p,j} = 0,5(f_{\underline{p},j} + f_{\overline{p},j}) . \tag{12}$$

d) Greška interpolacije

Greška interacije se može uzeti da se kreće za promene poluprečnika krivine krive u razmatranom podintervalu od R_{max}, za pravu liniju, do R_{min}, koji važi za kostantni

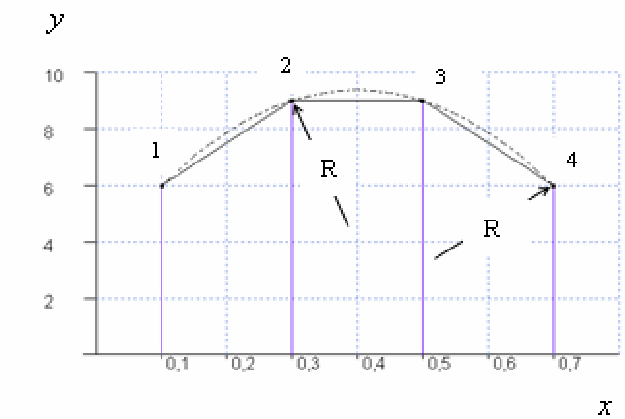
poluprečnik krive interpolacije (usvojene parabole). Ovo se detaljnije može sagledati u obrađenom Primeru 1.
Prema tome, može se napisati izraz za grešku interpolacije (E_r) u tački krive sa kordinatom x_i u sledećem obliku:

$$E_r(x_i) = abs(\frac{f_p(x_i) - f_l(x_i)}{f_l(x_i)}) \tag{13}$$

3. ANALIZA DVA PRIMERA

a) Primer 1

Za dati skup podataka (x_j,f_j) (j=1,4) treba naći interpolacionu krivu postupkom Lagranža i postupkom skupa lokalnih parabola. Treba analizirati rezultate.
Vektor datih apscisa je x=[0.1, 0.3, 0.5, 0.7],a odgovarajući vektor ordinata f=[6, 9, 9, 6].



Sl.3 – R_{min} može da definiše maksimalno odstupanje L(x) u odnosu na multilinearnu funkciju

Primenom programa za interpolaciju, koristeći izraze od (1) do (12), dobijeni su rezultati u obliku dijagrama prema multilinearom, Lagranžovom i multiparaboličnom postupku.
Rezultati su prikazani na Sl.3. Dobijene su potpuno iste vrednosti za drugi i treći postupak. Procenjena greška interpolacije za x_i =0,4 iznosi:

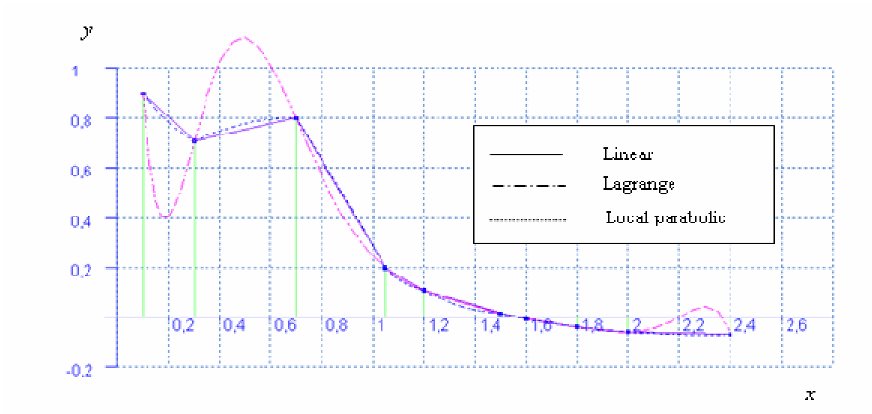
$$E_r = abs\left(\frac{(9,4-9)}{9,0}\right) \cdot 100 = 4,4(\%),$$

prema oba razmatrana postupka.Vrednost greške može se po želji smanjiti, ako se uzme novi gušći raspored čvorova.

b) Primer 2

Za dati skup podataka (x_j,f_j) (j=1,4) treba naći interpolacione krive postupkom Lagranža i postupkom skupa lokalnih parabola. Analizirati rezultate.
Zadat je vektor zadatih apscisa
x=[0.1, 0.3, 0.7, 1.05, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0, 2.4] (n=10)

i vektor ordinata
f=[0.9, 0.708, 0.8, 0.1988, 0.1091, 0.01578, -0.00589, -0.03756, -0.05632, -0.06689].



Sl.4 – Prikaz multilinearne, Lagranžove i multiparabolične interpolacione funkcije

Rezultati su dobijeni na isti način kao što je opisano u prethodnom primeru, a prikazani su na Sl.4. Može se videti da se rezultati znatno razlikuju izmedu Lagranžovog postupka i lokalnog multiparaboličnog postupka ukoliko se menja znak krivine između susednih podintervala, kao na primer između podinervala (x_1,x_2) i (x_2,x_3). Znatno bolji rezultati se dobijaju pomoću novog postupka. Takođe, na slici se vidi da postupak Lagranža daje vrlo velika odstupanja ako se uzme n>=9.
Procenjena greška interpolacije za x_i =0.2 iznosi

$$E_r = abs\left(\frac{(0,4-0,8)}{0,8}\right)\cdot 100 = 50,0(\%)$$

prema Lagražovom postupku, a

$$E_r = abs\left(\frac{(0,78-0,80)}{0,80}\right)\cdot 100 = 2,5(\%)$$

prema predloženom postupku.

4. MERE POBOLJŠANJA TAČNOSTI MULTIPARABOLIČNOG POSTUPKA

Da bi interpolacija bila bolja i uspešnija mogu se imati u vidu mogućnosti poboljšanja tačnosti postupka, koje će se dalje poređati prema značaju i uticaju na vrednosti i oblik krive linije.

1. Ako posmatrmo krivu liniju na Sl.4, dobijenu pomoću multiparaboličnog postupka, vidimo da ukoliko je trend diskretnih vredosti takav da je lokalna krivina krive istog znaka, tada vredosti parabolične interpolacije mnogo manje odstupaju od linearne interpolacije nego prema Lagranžovom postupku. Kao što je poznato, znak krivine se menja na mestu fleksionih čvorova.

2. Kada ne poznajemo položaj fleksionih čvorova, tada se može približno uzeti da se oni nalaze na sredini podintervala, duž koga je unazad jedan znak krivine, a unapred drugi. Na Sl.4, na primer, može se uzeti srednja tačka duž poditrvala (x_2,x_3), kao novi čvor – fleksiona tačka nove poboljšane krive linije.
3. Dobijenim trendom krive linije možemo biti nezadovoljni, tada se mogu u razmatrnim podintervalima uzeti novi čvorovi, koje uzimamo na osnovu zadatog položaja diskretnih vrednosti funkcije.
4. Procenjena greška interpolacije prema izrazu (13), često znatno olakšava izbor što manjeg broja čvorova, radi uspešnog i dovoljno tačnog prikaza i proračuna interpolovanih vrednosti funkcije.

5. ZAKLJUČCI

Postupak interpolacije pomoću skupa lokalnih parabola, između tri susedna čvora krive linije, je vrlo jednostavan, lak za programiranje i omogućava procenu greške interpolacije.

Greške interpolacije uvek mogu da budu prihvatljive za razliku od mnogih drugih postupaka koji važe za ukapan inerval funkcije. (Na primer, Langranžova formula za n>4 može višestruko pogrešno da proceni interpolovane vrednosti, ali to važi i za metodu *'spline'* (postupak savitljive trake), zatim *'shape preserving'* (postupak čuvanja oblika prema radu [4]) i dr.

Paralelnom primenom multilinearne i multiparabolične aproksimacije funkcije uvek smo u stanju, sa dovoljno sigurnosti, da tvrdimo da smo dobili rešenja interpolacije sa željenom greškom proračuna.

Primeri primene interpolacije, koju treba razlikovati od postupaka korelacije (ili popularno danas *'fitovanja'*, dati su za postupke integracije za određivanje pomeranja, zatim u zadacima dimenzionisanja i određivanja geometrijskih karakteristika poprečnih preseka, rešenja problema stabilnosti u obliku *Volterinih* i *Fredholmovih* integralnih jednačina, dinamike kostrukcija i dr.([6] do [13]).

LITERATURA

1. Bajpai A., Mustoe L., Walker D., Engineering Mathematics, Wiley, New York, 1979.
2. Demidovich D., I. Maron, Osnovi vicesliteljnoj matematiki, Nauka, Moscow, 1979.
3. Đurić M., Statika konstrukcija, N. Knjiga, Beograd, 1970.
4. Gilat A., Uvod u Matlab 7, Mikro knjiga, 2005.
5. Grozdanić D., Numeričke metode, TMF, Beograd, 2003.
6. Mihailović V., Beleslin R., Analiza uticaja impulsnog opterećenja, s.29, GF u Subotici, 1999.

7. Mihailović V., Landović A., Novi aplikativni programi za betonske konstrukcije ’Construct B’, Međunarodna konferencija u Subotici, s. 190-196, 2005.
8. Mihailović V., Landović A., Dve nove verzije grupe aplikativnih programa’Construct’, Međunarodna konferencija u Subotici, s. 175-184, 2007.
9. Mihailović V., A possibility for modification of Simpson formula, Bulletins for Applied Mathematics, N 547, 247-256, Budapest, 1987.
10. Mihailović V., A numerical integration approch by weight factors and its accuracy, Intern. Journal for numerical methods in engineering, Wiley, vol. 28, 1217-1228, 1989.;
11. Mihailović V., Numerička integracija i procena postignute tačnosti, Zb. radova GF 2, 14-33, Subotica, 1986.
12. Mihailović V., Postupak numeričke integracije pomoću težinskih koeficijenata, Zb. radova GF 3, 46-62, Subotica, 1986.
13. Mihailović V., Postupak numeričke integracije za prigušene prinudne oscilacije, Izgradnja 6, 5-10, 1986.
14. Nenadović M., Matematička obrada podataka dobijenih merenjem, SANU, Beograd, 1988.
15. Shoup, A., Guide to Computer Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
16. Tadić Lj., Mihailović V., Model za elastoplastičan materijal sa multilinearnim ojačanjem, Međunarodna konferencija u Subotici, s. 351-358, 2007.

AN INTERPOLATION BY SET OF LOCAL PARABOLIC FUNCTION AND ITS ACURACY IN STRUCTURAL MECHANIC

Summary: *This paper presents a proposal of interpolation approach for functions with one argument when are known their discret values. Proposal possibly has, in our opinion, a greate importance in practice in many area of the structural mechanic. Volume of work is less than with other approaches becouse it can use biger subintervals and to estimate error of interpolations.*

Key words*: Interpolation, model, elastoplastic, multilinear and local parabolic function, structural mechanic.*