

УПОРЕДНА АНАЛИЗА ЕЛАСТИЧНЕ И ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНЕ НОСИВОСТИ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

Аљоша Филиповић¹

Љубо Дивац²

Драгослав Шумарац³

УДК: 539.3

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2016.012

Резиме: Еластична носивост попречног пресека дефинише се линерном везом између напона и деформације и одређује се из услова да ни у једној тачки попречног пресека не дође до пластичних деформација. Уколико је пресек изложен чистом правом савијању тада се његова еластична носивост достиже појавом напона на граници течења у тачкама које су најудаљеније од неутралне осе. Еласто-пластична носивост попречног пресека достиже се када се у свакој тачки попречног пресека достигне напон на граници течења. Конзервативнији прописи заснивају се на еластичној носивости попречног пресека, док новији прописи, као што је Еврокод 3, допуштају да се носивост попречног пресека одреди применом еласто-пластичне анализе уколико пресек може да се потпуно пластификује, а да при томе не дође до избочавања дела пресека. Али, чак ни исцрпљење еласто-пластичне носивости попречног пресека у некој тачки носача, не мора нужно да значи колапс конструкције. Уколико је реч о статички неодређеном носачу формирање једног пластичног зглоба само редукује степен статичке неодређености, тако да је носач још увек у стању да пренесе додатна оптерећења. У овом раду биће дате основе еластичне и еласто-пластичне анализе попречног пресека као поступци одређивања граничне носивости код статички неодређених носача. Такође кроз пример челичног рама биће дата компаративна анализа димензионисања према еластичној носивости, еласто-пластичној носивости и граничној носивости

Кључне речи: Еластичност, пластичност, напон, деформације, попречни пресек, течење, пластични зглоб

1. УВОД

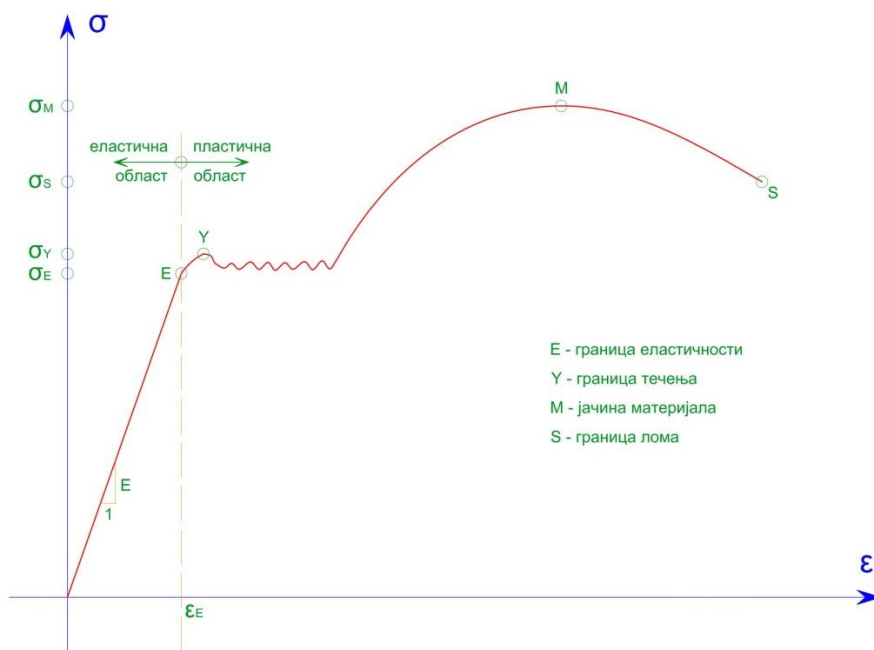
Конструкције од реалних материјала, какви су челик или бетон, представљају деформабилна тела. Деформабилно тело је оно тело које се услед унутрашњих

¹ Аљоша Филиповић, маг.инж.грађ., студент докторских студија, асистент, Универзитет у Београду Грађевински Факултет, e-mail: afilipovic@grf.bg.ac.rs

² Љубо Дивац маг.инж.грађ., студент докторских студија, Универзитет у Београду Грађевински Факултет, e-mail: ljubo90@gmail.com

³ Др Драгослав Шумарац дипл.инж.грађ., редовни професор, Универзитет у Београду Грађевински Факултет, e-mail: sumi@eunet.rs

сила (напона), nastalih kao posledica dejstva spoljashnjeg opterehjenja, deformirise, odnosno meња svoju zapreminu i oblik. Zbog svoje razlicite strukture, razliciti materijali se razlicito ponashaju pod dejstvom spoljashnjeg opterehjenja, zbog čega je formiranje konstitutivnih jednacina veoma složen problem. Teorijska analiza koja polazi od osnovnih zakona fizike nije dala kvalitativno objašnjenje za razlicito ponashaje materijala u razlicitim uslovima, pa analitičko formulisaje veze između napona i deformacija nije moguće. Pri formulisaju konstitutivnih jednacina se zbog toga oslađamo na rezultate eksperimenata, i to najčeshće testa istezanja štapa.



Слика 1. Радни дијаграм материјала (челик) добијен тестом истезања штапа

У овом раду акценат је стављен на конструкције од челика. Анализирањем дијаграма сличних дијаграму на слици 1 уочене су две карактеристичне области:

- Почетни део дијаграма (до тачке E), који је права линија, што имплицира линеарну везу између напона и деформације. На овом делу деформација је повратна, због чега се овај део дијаграма зове **еластична** област.
- Други део дијаграма (десно од тачке E), на коме се може уочити значајно повећање деформација уз мали прираст напона, као и изразито нелинеарна конstitutивна веза. Деформација је неповратна на овом делу дијаграма, односно материјал почиње пластично да тече, због чега се овај део дијаграма назива **пластична** област.

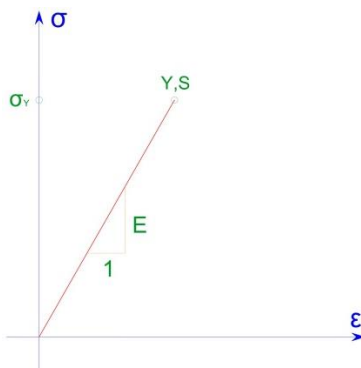
Са инжењерске тачке гледишта постоје два суштински различита приступа димензионисању конструкције. Први, који је и историјски гледано био у употреби раније, заснива се на претпоставци да, под дејством спољашњег оптерећења, нигде

у носачу не сме доћи до пластичне деформације или прслине. Овакав приступ назива се прорачун према *допуштеним напонима*, јер напони у било којој тачки морају бити мањи од од дозвољених вредности које се добијају дељењем напона течења са одговарајућим фактором сигурности. Самим тим, у оваквим прорачунима конститутивне релације за одређени материјал дефинисане су једначинама теорије еластичности. Појава пластичне деформације или прслине у некој тачки носача, међутим, не мора нужно да значи и његов лом. Због тога је у последње време, када је димензионисање конструкција у питању, најчешће у употреби другачији приступ у коме се дозвољава и пластично понашање материјала, односно излазак из еластичне области дијаграма на слици 1. Овакви прорачуни се називају прорачуни према *граничној носивости*, јер се заснивају на стању које претходи стварном губитку носивости, односно лому конструкције. Како се материјалу дозвољава улазак у пластичну зону понашања, неопходно је користити знања из области еласто-пластичне анализе за овакве прорачуне.

Циљ и сврха овог рада јесте да објасни и, кроз нумерички пример челичног рама, покаже суштинске разлике у анализама конструкције поступцима који се заснивају на теорији еластичности и онима који се заснивају на еласто-пластичној анализи, као и да прикаже колика се уштеда у материјалу може постићи применом напредних анализа заснованих на теорији пластичности.

2. ЕЛАСТИЧНА АНАЛИЗА

Еластична анализа подразумева линеарну везу између напона и деформација током рада конструкције, при чему се претпоставља да достизањем одређеног напона (најчешће напон на граници течења неког материјала) долази до лома. Идеално еластично тело назива се и Хуково тело. Радни дијаграм за овакве моделе приказан је на слици 2.



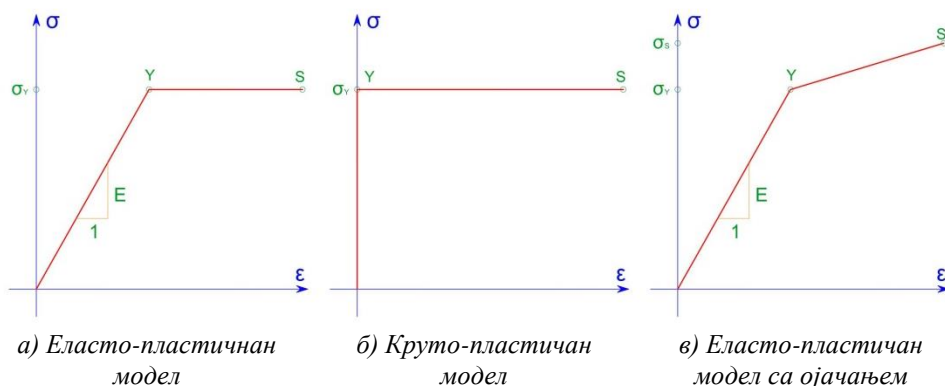
Слика 2. Радни дијаграм идеално еластичног Хуковог тела

Приликом еластичне анализе гредног носача напрегнутог на савијање, расподела напона у попречном пресеку је линеарна а максималне вредности напона достижу се у најудаљенијим тачкама пресека од неутралне осе. У концепту

димензионисања по допуштеним напонима, ови максимални напони морају бити мањи од дозвољених вредности које су по правилу мање од напона на граници развлачења, да не би дошло до пластификације пресека која се сматра ломом.

3. ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА

Појава пластичних деформација у некој тачки, или у делу попречног пресека греде, не мора да значи и губитак носивости. Зато се данас углавном димензионисање не врши према стању које одговара почетку пластификације, већ према граничном оптерећењу које заиста одговара стању које претходи губитку носивости греде, односно њеном преласку у механизам. Постоје неколико различитих модела којима се може апроксимирати пластично понашање материјала тј. реалан дијаграм на слици 1.

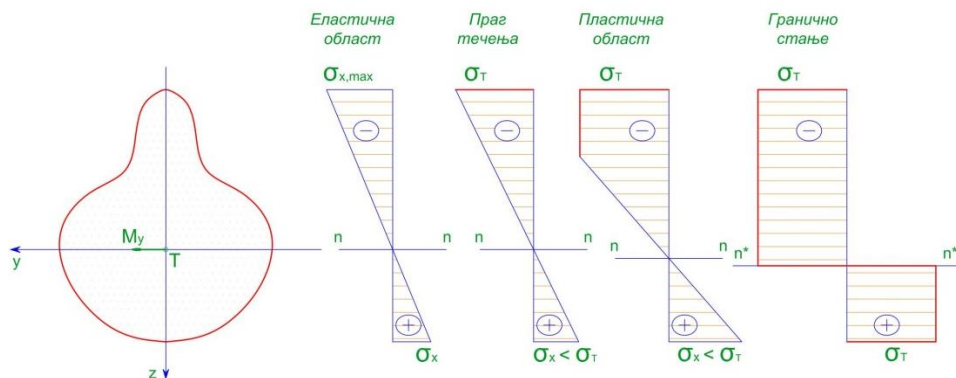


Слика 3. Радни дијаграми идеалних тела

Еласто-пластична анализа се заснива на моделу идеалног еласто-пластичног материјала (слика 3а). У овом раду ће бити разматран линијски носач оптерећен на савијање. Како се дужина греде сматра довољно великом у односу на димензије попречног пресека, сматра се да утицај смичићег напона на услов течења може да се занемари. На слици 4 илустровано је на који начин се дијаграм нормалних напона мења при постепеном повећању момента савијања у одређеном пресеку.

Са порастом момента савијања M_y расте и максимални нормални напон све док не достигне напон на граници течења који је, према усвојеном моделу са слике 3а највећи напон који се може јавити. Док максимални напон у пресеку $\sigma_{x,max}$ не достигне напон на граници течења σ_y (или f_y) греда се понаша еластично. Стање које одговара тренутку када напон $\sigma_{x,max}$ достигне напон σ_y назива се **праг течења** и свако даље повећање момента савијања имплицира прераспodelу напона, односно ширење пластичне зоне унутар попречног пресека. На слици 4 се види да се неутрална оса, која је у еластичном домену пролазила кроз тежиште пресека, помера и више се не поклапа са тежишном осом. Када се пластична зона прошири на читав пресек даље повећање момента савијања M_y узроковало би губитак

носивости пресека, односно лом, па се ово стање зове *гранично стање*. При граничном стању, неутрална оса поклапа се са бисектрисом попречног пресека. Момент савијања при коме настаје гранично стање у пресеку назива се *гранични момент* M^* .



Слика 4. Пластификација попречног пресека

Бисектриса (пластична неутрална оса) дели попречни пресек на два дела једнаких површина. У случају да је пресек симетричан бисектриса се поклапа са тежишном осом пресека, а пластичне зоне се формирају симетрично. Од прага течења до граничног стања очигледно се повећава носивост пресека. Мера за преосталу носивост пресека од тренутка достизања прага течења до граничног стања назива се *коэффициент облика попречног пресека* који се дефинише као:

$$f_t = \frac{M^*}{M_y^T}$$

где је:

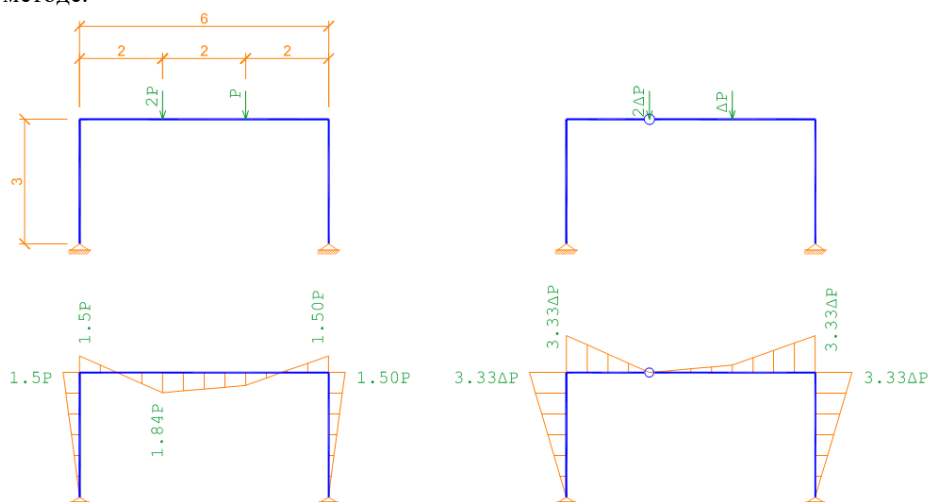
- M^* - гранични момент савијања
- M_y^T – момент савијања на прагу течења

Код статички одређених носача напрегнутих на савијање улазак неког пресека у гранично стање значио би и формирање пластичног зглоба на том месту, чиме би носач прешао у механизам. Међутим, код статички неодређених носача формирање једног пластичног зглоба само редукује степен статичке неодређености, па је носач у стању да и након тога преноси додатно оптерећење. Носивост носача се исцрпљује тек поступним формирањем довољног броја пластичних зглобова који би цео носач или само неки његов део претворили у механизам са барем једним степеном слободе који се назива *механизам лома*. Очигледно је да за неодређене носаче може постојати више различитих механизма лома. Величина граничног оптерећења која доводи до стварања одговарајућег механизма лома може се одредити директном методом или применом основних теорема пластичне анализе.

4. ДИРЕКТНА МЕТОДА (МЕТОДА ИНКРЕМЕНТАЛНЕ ПЛАСТИФИКАЦИЈЕ)

Директна метода, или како се другачије назива, метода инкременталне пластификације састоји се у поступном повећању интензитета оптерећења, при којем путем сукцесивног формирања пластичних зглобова носач у целини или неки његов сегмент прелази у механизам са минимум једним степеном слободе. Ова метода користи се код једноставнијих носача.

Кроз пример приказан на слици 5 који ћемо касније користити за компаративну анализу илустроваћемо одређивање граничне носивости применом директне методе.



Слика 5. Пример-примена директне методе

Пример на слици 5 представља једанпут статички неодређен носач. Дакле до исцрпљења носивости потребно је да дође до формирања најмање два пластична зглоба. Вредност силе при којој долази до формирања првог пластичног зглоба добијамо из услова да је вредност максималног момента савијања на основном систему (леви део слике 5) једнака вредности граничног момента савијања:

$$1.84 \cdot P = M^* \Rightarrow P = \frac{M^*}{1.84} = 0.543 \cdot M^*$$

Након формирања пластичног зглоба носач не губи носивост већ губи један степен статичке неодређености и прелази у статички одређени носач (десни део слике 5). До достизања граничног стања долази при формирању још једног пластичног зглоба:

$$1.5 \cdot P + 3.33 \cdot \Delta P = M^* \Rightarrow \Delta P = \frac{M^* - 1.5 \cdot P}{3.33} = \frac{M^* - 1.5 \cdot 0.543 M^*}{3.33} = 0.057 M^*$$

Коначно, гранична носивост носача износи:

$$R_{lim} = P + \Delta P = 0.6 M^*$$

5. ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ ПЛАСТИЧНЕ (ГРАНИЧНЕ) АНАЛИЗЕ

Гранично оптерећење при коме долази до лома носача се поред примене директне методе може одредити и применом теореме граничне анализе. У литератури се при извођењу теорема граничне анализе аутори ограничавају само на проблеме у равни оптерећене на савијање, и при томе важе следеће претпоставке:

- У попречном пресеку носача где се формира пластични зглоб, гранични моменат M_y^* остаје константан у току даље деформације. При томе обртања у пластичном зглобу могу бити неограничена.
- Утицај нормалних и трансверзалних сила на величине граничних момената у пластичним зглобовима се занемарују.
- Померања на механизму лома су мала, тако да се њихов утицај у условима равнотеже занемарује тј. услови равнотеже се постављају на недеформисаној конфигурацији носача.
- Оптерећење је просто тј. пропорционално фактору (параметру) оптерећења $\lambda > 0$, тако да је $Q_i = \lambda P_i$ ($i=1,2,3,\dots,k$), где је P_i интензитет оптерећења који се односи на јединичну вредност фактора оптерећења ($\lambda=1$).

Задатак пластичне граничне анализе је одређивање граничног фактора оптерећења λ^* при коме долази до лома носача.

Статички допуштима (могућа) расподела момената је она за коју су задовољени услови равнотеже између унутрашњих и спољашњих сила. Ако је расподела момената таква да је у сагласности са условима компатибилности деформација и условима ослањања носача тада је она кинематички допуштима (могућа). Уколико је расподела момената савијања таква да вредност момената савијања ни у једном попречном пресеку не прелази одговарајући гранични момент тада је расподела сигурна. Расподела момента савијања која се односи на стање граничне равнотеже носача мора да буде истовремено статички допуштима, кинематички допуштима и сигурна.

Постоје две основне теореме граничне анализе: статичка теорема и кинематичка теорема из којих се изводи и трећа теорема о једнозначности.

Статичка теорема:

Уколико скупу оптерећења λP_i ($i=1,2,3,\dots,k$) одговара статички допуштима и сигурна расподела момената савијања, тада је вредност фактора оптерећења λ мања или једнака граничној вредности λ^* .

$$\lambda^* = \lambda_{\max}$$

Кинематичка теорема:

Вредност фактора оптерећења λ која одговара произвољном могућем механизму лома већа је или једнака граничној вредности λ^* .

$$\lambda^* = \lambda_{\min}$$

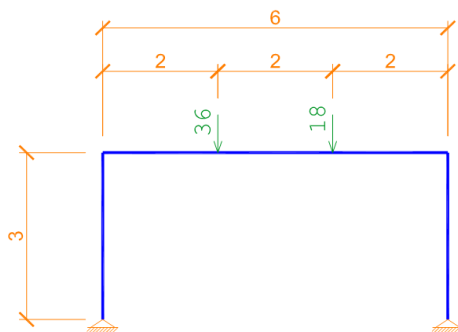
Теорема о једнозначности:

Ако за дати носач можемо наћи фактор оптерећења λ за који је расподела момената савијања статички допуштима и сигурна, и при коме се формира довољан број пластичних зглобова да носач прелази у механизам, тада је тај фактор оптерећења гранични фактор оптерећења λ^* .

6. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР

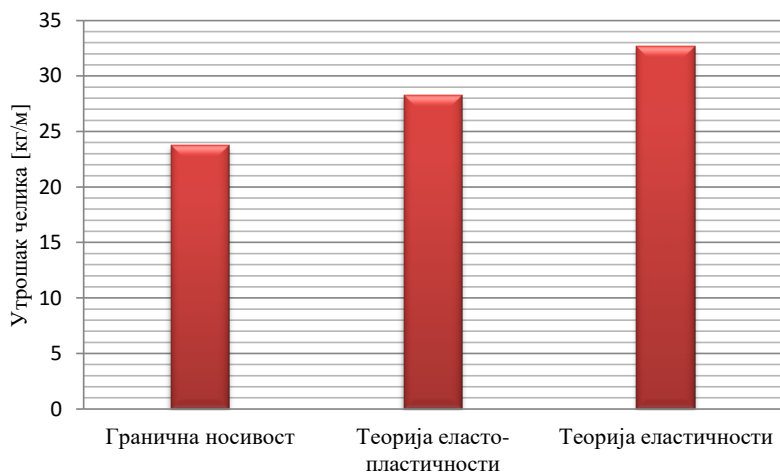
Анализирајући двозглобни челични рам који је оптерећен паром концентрисаних сила у трећинама распона (као што је приказано у табели 1) урађена је компаративна анализа димензионисања ригле рама према граничној носивости, теорији еласто-пластичности и теорији еластичности. За профиле су усвојени шупљи профили правоугаоног пресека који нису осетљиви на бочно торзионо извијање па се носивост елемената своди на носивост попречног пресека. Сви попречни пресеци који су коришћени у примеру припадају класи 1 (према класификацији која је дата у Еврокоду 3), што значи да могу да образују пластичан зглоб са захтеваним капацитетом ротације за пластичну анализу. Димензионисање је извршено са коефицијентом сигурности 1,5. Основни материјал у разматраном примеру је челик S235.

Табела 1. Компаративна анализа димензионисања ригле рама према граничној носивости, теорији пластичности и теорији еластичности



Метода прорачуна	Усвојен профил	Искоришћеност [%]	Тежина [кг/м]
Гранична носивост	RHS 200x120x5	95.33	23.8
Теорија еласто-пластичности	RHS 200x120x6	89.19	28.3
Теорија еластичности	RHS 200x120x7.1	95.0	32.7

У табели 1 дат је преглед компаративне анализе за димензионисање према граничној носивости, теорији еласто-пластичности и теорији еластичности. За сва три приступа димензионисања усвојен је најмањи профил из групе профила који задовољава носивост елемената. Такође приказан је степен искоришћености попречног пресека у процентима, као и тежина профила изражена у кг/м. На слици 6 дат је графички приказ утрошка материјала добијеног коришћењем ова три приступа. Уочавамо да за овакав пример утрошак челика уколико се димензионисање врши према теорији еласто-пластичности је већи за око 18% од утрошак челика уколико се димензионисање врши према граничној носивости. Утрошак челика уколико се димензионисање према теорији еластичности је за око 15% већи у од утрошака челика уколико се димензионисање врши према теорији еласто-пластичности.



Слика 6. Графички приказ утрошка челика у компаративном примеру

7. ЗАКЉУЧАК

Димензионисање према теорији еластичности, које је заступљено у старијим прописима, даје конзервативније резултате од димензионисања према теорији еласто-пластичности на коју се ослањају новији прописи. Димензионисање према граничној носивости даје најмањи утрошак материјала, али при таквом димензионисању мора се водити рачуна да носач има капацитет да достигне граничну носивост. Дакле, примена приступа према коме ће се вршити димензионисање зависи од капацитета попречног пресека и носача као целине. Услови које попречни пресек и носач треба да испуне се повећавају полазећи од теорије еластичности до граничних стања. При димензионисању такође треба водити рачуна о проблемима стабилности, који су изражени у челичним конструкцијама, а услед којих се понекад у попречном пресеку не може достићи ни граница развлачења. Важан параметар при димензионисању представљају и гранична стања употребљивости (угиб, вибрације, прслине) која врло често знају да буду меродавна за димензионисање и да тиме ставе у други план разлику између димензионисања носача по теорији еластичности, теорији еласто-пластичности и граничним стањима.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lubliner, J.: *Plasticity theory*, University of California at Berkeley, **2006**.
- [2] Деретић-Стојановић Б., Дуница Ш.: *Отпорност материјала*, Грађевински факултет, Београд, **2009**.
- [3] З. Марковић: „Гранична стања челичних конструкција према Еврокоду“, Академска мисао, Београд, **2014**.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ELASTIC AND ELASTOPLASTIC CAPACITY OF A CROSS SECTION

Summary: Elastic capacity of the cross section is defined with a linear stress and strain relationship and is determined from the condition that no plastic deformation can occur at any point of the cross section. If the cross section is exposed to bending, then the elastic capacity of the section is reached when the stress in the furthest points from the neutral axis is equal to the yield strength of the material. Elastoplastic capacity of the cross section is reached when the stress in every point of section get equal to the yield strength of the material. More conservative design standards are based on the elastic cross section capacity, while newer standards, such as Eurocod 3, allow engineer to determine a cross section capacity by using an elastoplastic analysis, provided that section can develop plastic moment resistance without local buckling preventing it. But even the exhaustion of the elastoplastic capacity of the cross section at some point of the construction does not necessarily mean the collapse of a structure. When we talk about statically indeterminate structures, development of one plastic hinge only reduces the degree of static indeterminacy, so the structure is still able to carry additional loads. In this paper, the basics of the elastic and elastoplastic theories are given, as well as the procedures for determining the limit load for statically indeterminate structures. Also, as a numerical example, the steel frame will be analyzed in three different ways to show the differences between elastic, elastoplastic and limit-load approach when calculating the structures.

Keywords: Elasticity, plasticity, stress, strain, cross section, yield, plastic hinge