Међународна конференција
Савремена достигнућа у грађевинарству 24. април 2015. Суботица, СРБИЈА

ПРИЛОГ САВРЕМЕНОМ СРПСКОМ НЕИМАРСТВУ– Део 3/2: Лучне бране и претпоставке прорачуна

Мирко Д. Петковић [1]

УДК: 627.825
DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.107

Резиме: *"Зашто се званично скоро нигде у свету не помињу имена и доприноси Срба историји светског градитељства“? Да ли зато што осим епских прича и спорадичних случајева таквих доприноса заправо и нема или зато што је недостатак традиције у богатству и владању над другима онемогућио Србе да пређу пут од турских дунђера до савремених демијурга и тако остану забележени у историји светског градитељства? Другим речима, да буду и његови креатори, а не само мање приметни следбеници, вешти импровизатори или прости извршиоци туђих замисли и идеја.*

Без обзира каква да је истина презентирани рад кроз теорију танких 2К љуски и њену примену код лучних брана даје допринос сагледавању и памћењу њене лепше стране испуњене том потребном креативношћу - без које се не рађа љубав према градитељској струци и науци нити подстучу опредељења за њу. Полазећи од еластичних 2К љуски у раду су презентирани начини формирања математичко-физичких модела лучних брана и анализиран начин на који се до њих дошло, као и тачност учињених претпоставки и унетих занемаривања. У склопу тога дат је и осврт на коришћен модел у домаћој пракси са применом поступка инж. Николе Хајдина. Имајући у виду да се пракса пројектовања и градње лучних брана није у ничему суштински променила за последњих пола века разматрана проблематика је обрађена са аспекта сазнања из 1981. када је и настао овај фундаментални рад из области примењене теорије љуски чији се сажетак у даљем тексту даје.

Кључне речи: *Лучне бране, теорија љуски, претпоставке, модели, анализе, Хајдин*

1. УВОД

Шаренило употребљених претпоставки, извршених занемаривања и резултујућих математичко-физичких модела [23] довољно јасно указује на практично постојање одређене некомпатибилности између лучних брана као објекта у физичком смислу речи, његовог математичко-физичког модела и метода решавања тог модела. На то посебно указују и последње изведене једначине (17). При томе треба реално претпоставити да, иако практични рад и његови резултати код лучних брана често оповргавају многе сјајно зацртане поставке, свеобухватније теорије и модели дају тачније, како парцијалне, тако и опште резултате, под условом да су саме основне

[1] KECO Invest Engineering GmbH i KG Int. Exp. Group, mirkopetkovic7@gmail.com, тел: 7 926 623 623 1

поставке тих теорија практично одрживе и потврђене – што значи довољно тачне. У супротном већа тачност добивена узимањем у обзир већег броја извода, чланова реда, чланова разматраног система и сл., или коришћењем савременог поступка за решавање тог система може бити анулирана мањом тачношћу основних поставки, а још више улазним резултатима. То посебно важи за контактне услове, који су били и остали највећи проблем код прорачуна лучних брана. Таква опрезност је и нормална, јер за разлику од гравитационих, насутих и сличних брана лучне бране почивају на принципу искоришћења чврстоће материјала, а не његове количине.
Стога, иако сви наведени, као и многи други модели потврду своје исправности махом траже у Теорији љуски, понекад не освրћући се довољно на поступке оформљења, врло важно је поред изложених поставки знати колико су у њима заправо заступљени они елементи и односи међу њима који карактеришу и одвајају лучне бране од танких љуски разматраних описаним теоријама. При томе се не сме испустити из вида о каквим се димензијама објекта и силама ради, какав је заправо материјал унутар, па и ван тела бране и каквим се поступком он уграђује у циљу формирања коначног облика конструкције[2].
Наредни текст је посвећен управо разматрању те проблематике. Због ограниченог простора многи показатељи које се уобичајено користе за прелиминарну или финалну конструкцију бране, који су пројектантима већином познати и који се могу наћи у одговарајућој литератури су изостављени.

2. МАТЕРИЈАЛ ТЕЛА БРАНЕ И ОПОРАЦА

ТЕЛО БРАНЕ. Међу основним претпоставкама Теорије еластичности и Теорије љуски коришћених за извођење једначина лучних брана ([23]) налазе се и следеће:

(а) тело бране је хомоген, изотропан и униформно еластичан материјал,

(б) померања нападних тачака спољашњих и унутрашњих сила за постављене услове еквилибријума се сматрају довољно малим да се могу занемарити;

(в) везе између напона и деформације су линеарне.

Савим је јасно да 1. и 3. претпоставка диктирају идеални материјал који стварно не постоји. То није бетон, а поготову околна стенска маса у којој је фундирано тело лучне бране. Међутим, уколико се мора, а и жели применити *линеарна теорија* тј., линеаризовани закон *Hooke*-а, онда ова претпоставка је неопходна обзиром да улази у основне услове њеног оформљења. У циљу оправдања таквог третмана тела бране може се рећи да се савременим методама контроле стабилности бетонске композиције, као и врло важном претпоставком о размери посматрања објекта, наведени услов задовољава – али само унутар одређених граница и услова који се понекад при практичном искоришћењу материјала могу не потврдити. На тај начин нарушава се линеарна промена напона и деформација што је и практично потврђено испитивањима Розанов-а на фотоеластичним моделима [26][3], као и

[2] Код лучних брана висине 200 и више метара силе које се путем тела бране преносе на околни стенски масив износе по неколико милиона тона по свакој опорачкој контури. С друге стране саме димензије објекта и сл. покрећу питање закономерности између математичко-физичког модела и стварног објекта.
[3] Треба споменути да се запажена изразитија нелинеарна промена нормалних напона у доњим деловима личних брана добрим делом јавља услед температурних дејстава унутар конструкције

мерењима Млађеновића на лучној брани Gage. Свакако, то априори не значи да ње нема у свим деловима овако велике структуре, као и то да се она било којом линеарном поставком правилно може разматрати[4]. Међутим, практично гледано највећи проблем није у линеарности, чак више, он није ни толико велики колико му се придаје значај. Далеко већи проблем је у дисконтинуитетима и прелазима који при неправилном третману надмашује све теорије и све моделе. Иако највећи број теорија полази од претпоставке о *монолитности* тела бране, одржање тог услова у великој мери у пракси није присутно, не само због конструктивних дилатирајућих спојева, већ и због радних спојница између ламела без обзира на практичне мере њихове попуне које се врше при што мањим темературама унутар бетона односно, после највећим делом завршеног скупљања бетона. Наиме, иако се те попуне врше у циљу постизавања потребне монолитности и што већег прилагођавања стварног расподељења оптерећења прорачунском[5], практично пуцање објекта се често дешава баш по тим линијама (нпр.брана Malpasset) тако да одудара од претпоставке о комплетној монолитности структуре. То указује и на мањак потребне отпорности тих делова конструкције на затежућа напрезања, без обзира да ли она настала услед спољашњих или унутрашњих дејстава (нпр.услед топлота у периоду сазревања и хлађења бетона), што је практичним мерењима и потврђено. Другим речима, све то указује на тешкоћу примене претпоставки Теорије еластичности чиме се и долази до замисли о њиховој локалној одрживости тј., само унутар одређених монолитних структуралних целина. На тај начин, замисао из 1767. L. Euler-a, врсног зналца инжењерских проблема и креатора начина њиховог решавања, и њена даља примена у пракси од стране Ritter-a и др. ([17][18]) долази до још већег изражаја - не само са аспекта гредних система, већ и љуски као површинских носача. Уствари, шире гледано, тај исти концепт је садржан и у методама дискретизације ([1][15]). Разлика је у облицима елемената и контактним условима тј., величини резултујућег система једначина. Како данас стање изгледа за те ствари су најподеснији TLM и MKE - поступци прорачуна[6].

ОПОРЦИ. Иако је код стенског масива проблем монолитности израженији и припада далеко више Механици стена него површинским носачима ипак се као и код тела брана и овде у прорачуну уобичајено користи прва претпоставка Теорије елатичности о хомогеном, изотропном и еластичном материјалу. Тиме се, не разматрајући специјалне прорачуне опорачких клинова, методе дискретизације и прорачуна околног стенског масива, лако контролисане механизме ослањања љуске и сл., отвара пут примене допуњеног и од стране USBR-a инжењерски разрађеног Vogt-овог решења за одређивања контактних услова на опорачкој контури добивеног путем разматрања Boussinsq – овог проблема [19][7]. Међутим,

[4] Чак и више од тога! Наиме, уколико би промена утицаја на елементарном делићу тела обухватила још један члан Teylor-овог реда и сл. та нелинеарност би донела мање промене него код класичних пресека.
[5] У принципу ради о томе да се повећањем монолитности тела бране оптерећење "врати" на лукове како би удели оптерећења на луковима и конзолама што више одговарали прорачуном претпостављеним са тежиштем на што више лучном дејству тј., активирању јаче носивости тела бране.
[6] У суштини оно што су J. L. Savage и др. практично урадили 30-их са TLM-ом [2], а 70-их K.L.Bathe и др. са FEM-ом [1], се и даље успешно користи у пракси лучних брана [29].
[7] Тачније, решења Boussinesq-a за одређивање вертикалног напона идеално-еластичног, хомогеног, изотропног и безтежинског полу-бесконачног тела услед дејства вертикалне концентрисане силе.

имајући у виду да је опорачка контура једна хетерогена, анизотропна и елатично-пластична средина то се у самом старту на њу веома тешко може то решење и применити. Чак и ако би накнадним инжењерским мерама та претпоставка могла бити задовољена онда би решење USBR-а било само једна апроксимација која захтева разумну примену и која ће стога увек бити спорна. Наиме, у том случају поступак решавање проблема померања стенског масива услед оптерећења која се телом бране преносе по опорачкој контури, рецимо L_k, за сваку тачку M(s) има за коначни циљ одређивање функција Green-а (G_j), које ће представљати утицајне функције траженог померања, рецимо u_1 датог у једноставном облику $u_1^{ст}= u_1^{ст}(s)$. Функција Green-а, рецимо $G_{u1}(s,\hat{s}, M_n)$, представљаће утицајну функцију за померање $u_1^{ст}$ услед дејства јединичног момента савијања $\overline{M}_n = 1$ који делује у тачки $M(\hat{s})$ (слично важи и за G_{u1} од осталих сила и момената), па ће се укупно u_1 – померање стенске основе на опорачкој контури добити путем интеграције свих тако добијених диференцијалних u_1-померања и коначним сумирањем:

$$u_1^{st}(s) = \int_{L_k} G_{u1}\,(s, \bar{s}, \overline{M_n})M_n(\bar{s})d\bar{s} + \int_{L_k} G_{u1}\,(s, \bar{s}, \overline{Q_n})Q_n(\bar{s})d\bar{s} + \ \ldots$$

што је крајње незахвално за рад обзиром на неминовни поступак одређивања обично по 5 функција Green-а за свако линеарно и угаоно померање[8]. Увођењем не лако прихватљиве претпоставке да је еластично померање сваке тачке опорачке контуре M(s) стенске основе зависно само од одговарајуће силе или момента који делује у тој тачки избегава се сложено интеграљење и прорачун ових функције путем увођења неких коефицијената понаособ зависних од посматраних утицаја по силама или моментима. Управо на тај начин се и добијају једноставнији облици функционалних зависности које се додатним апроксимацијама користе у Vogt-овој замисли и које морају са пуно инжењерског осећаја бити употребљене у решавању контурних проблема тј., примењених теорија код лучних брана. То исто важи и за каснија теоретски још већа поједностављења овог проблема (*Kirn, Houk, Savage, Bosshard, Tölke, Можевитинов, Oberti, Henke, Млађеновић, Press, Jurecka, Naimi, Lombardi, Swaminathan, Hayashi, Петковић и др.* [19]). Као и код тела бране тако и овде далеко већи проблем је врста стенског масива, особине, дисконтинуитети, правац пружања и сл. при чему највећи значај имају испитивања и истражни радови на терену, а далеко мањи резултујући прорачуни типа МКЕ и др. Обзиром да тематика више припада Механици стена него Теорији љуски иста се изоставља.

3. ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМ

Као што је познато, класична теорија танких љуски је изграђена на бази *Kirchoff-Love*-ових хипотеза о недеформисаној нормали и напонима у правцу нормале на средњу површ. Првом хипотезом, коју је у теорији љуски заједно са другим први заправо увео *Aron* 1874., се претпоставља да скуп материјалних честица, које се налазе на нормали средње површе пре деформисања, налазе се на нормали средње површи и после деформисања и зато се деформацијско стање љуске може описати деформацијским стањем њене средње површи. Другом хипотезом се претпоставља

[8] Због ограниченог броја страница и проблема исписивања не наводе се даље једначине садржане у [19]

да су све компоненте напона које имају правац нормале на средњу површ мале у поређењу са другима. На тај начин је могуће 3D проблем љуске свести на 2D проблем.Обе ове хипотезе су у сагласности једна с другом и означавају да се сваки танки елементарни слој материјала, паралелан средњој површини љуске, налази у условима равног стања напона, тачније напона који дејствују у његовој равни знатно су већи од осталих за које се претпоставља да немају битнијег утицаја на величину релативног продужења у тангенцијалној равни.
Последица горњих претпоставки унетих у Теорију љуски састоји се у томе, што се уместо 6 компоненталних напона могу увести 6 компонената сила и 4 компоненте момената за чије одређивање се користе једначине равнотеже елемената, ако је при том установљена веза између сила, момената и деформација и кривљења, што је у претходном извођењу основних једначина 2К љуске и коришћено (Слика 1. у [23]). Међутим, иако све ово на први поглед изгледа сасвим логично и уверљиво у практичним прорачунима танких љуски претпоставка о недеформисаној нормали може довести до грешака реда 30-60%, па чак и више, за радијална померања у односу на тродимензионално решење. На основу таквих показатеља, који су били иницирани од стране Новожилов-а и других, а у немогућности да се проблем у свом изворном облику реши[9], саграђен је и модел тзв. праволинијског елемента, у складу са којим се претпоставља да првобитно нормални праволинијски елеменат после деформисања остаје праволинијски, али не више нормалан на искривљену средњу површ. Важност тога огледа се и у чињеници да је код старијих и до скоро пројектантски врло заступљених метода прорачуна типа TLM и сл. [2], утицај промене угла нормале као незанемарљива величина био укључен у прорачун. Додуше, захваљујући и самој теорији гредних носача која је послужила као полазна основа за израду метематички решивих модела читаве групације метода роштиљних елемената [15], путем којих је и највећи број лучних брана у свету срачунат[10]. Међутим, узимањем у обзир овог утицаја је до скоро у оквиру примењене теорије танких љуски практично било неизводљиво.

4. ГЕОМЕТРИЈА ТЕЛА БРАНЕ

ДЕБЉИНА БРАНЕ. Сâм појам танких љуски, који је условно уведен од стране *Love*-а ($h/r \ll 1$), уобичајено претпоставља занемарљиво малу вредност максималног односа дебљине љуске и на том месту, а не неком другом, пречника кривине (h_{max}/r). У извођењу напред споменутих *Donnell*-ових једначина [23] довољно јасно је назначено шта се практично под тим подразумева у изразима за пресечне силе и моменте, а шта у систему условног еквилибријума.
Анализирајући ту проблематику у својој монографији лучних брана [10] *Lombardi* је строго дефинисан услов $d_{max}/r_{min}=1/30$ преиначио у $h/r \leq 1/20$ када се са подобном основом може уопште применити класична теорија танких љуски за

[9] Данас то није случај, али се не помиње обзиром да овај рад представља оригинални ауторов рад из 1982. урађен на бази тада доступног сазнања, прибора и алата. Без обзира на то данас се, осим далеко већег и лакшег избора помагала, ништа суштински није променило у поставци и закључцима рада.
[10] Важи иста напомена, иако и после 35 година од настанка рада ништа се није значајније променило.

решавање напонско-деформативног стања (σ-δ) лучних брана. Практично посматрано, наведени однос добрим делом је задовољен само у горњем и то, са аспекта прорачуна најмање важном и најмање оптерећеном делу тела бране. При томе се не узимају у обзира лукови променљивих дебљина са низводним задебљањима, троугаоним ослоначким клиновима или разним проширењима. У средњем делу код највећег броја срачунатих и изведених брана услов $h/r \leq 1/20$ није одржив. Пример за то су поред Boulder, Morrow Point, Yellowtail, Vaiont, Monticello, Flaming Gorge, Salza, Ингурская, Чиркенская, Movuazen, Pacoima, Cariba, Tonoyama и многих других и саме домаће бране Мратиње и Глажња у чијим анализама је коришћена напред споменута техника интегралних једначина са употребом поступка инж. Н. Хајдина. Код њих се споменути однос креће у интервалу од 1/4 па до 1/12 што је знатно веће од Lombardi-евог ($h/r \leq 1/20$), а поготову Love-овог услова ($h/r \ll 1$). Истовремено незнатан је број лучних брана код којих је тражени однос задовољен и у пракси је заступљен махом код појединих релативно нижих брана. Пример за то су Tolla, Cachi, Отиловићи, Отавица и сл. за које се споменути однос креће од 1/19 до око 1/35, не анализирајући одрживост тог услова у близини опорачке зоне. Што се тиче доњих делова тела бране и делова непосредног контакта са околним стенским масивом, они сасвим сигурно ни приближно не могу одговарати танким нити средње дебелим љускама, и за наведене бране се крећу у интервалу од 1/4 до 1/2.
Како су моделска истраживања *Rocha*-а показала [25] у случају односа $E_f/E \geq 1$, а добрим делом и $E_f/E \geq 1/4$, утицај ослањања на напонско стање у телу бране је занемарљив, па се сходно томе може претпоставити постојање ивичног ефекта. Другим речима створени су услови да се оправда незадовољење потребног услова h/r близу контуре бране. Свакако да тај став треба разумно користити обзиром да код лучних брана, за разлику од појединих типова резервоара и сл., локализација мешовитог напонског стања близу контактне површине је сложеније природе. При томе, поред размере посматрања треба имати у виду да је за појаву ивичног ефекта важна не само ивица љуске већ и ма која линија средње површи, где се оштро мења кривина и дебљина бране - па чак и сам облик преградног места.
КРИВИНЕ. Као што су међу пресечним силама неки утицаји карактеристични, тако су међу геометријских величина карактеристичне кривине у оба правца. Реална могућа допуштења која зависе и од саме специфичности конструкција се односе на промену кривине тј., крутости само у вертикалном правцу. То је и разлог због чега је њихово занемаривање и прилагођење хоризонталне кривине константној вредности по висини недопустиво, са прорачунске стране посматрано – али такође конструктерски и практично неефикасно. Сâм *Tölke* [27] је сматрао, разматрајући проблем добро обликованих лучних брана, да је тачно решење модела лучне бране у облику 2К љуске променљиве дебљине неизводљиво и од њега па на даље пажња многих истраживача је била сконцентрисана на то како упрошћавањем решити *Flugge*-ове или сличне једначине са променљивом крутошћу, а при том не претерати у занемаривањима тј., са задржањем неких карактеристичних утицаја. Иначе, цилиндрични тип лучних брана, не ретко дебљих, махом припада ранијем периоду градње ових конструкција и у савременој пракси је као недовољно ефикасан веома ретко заступљен. Као пример овога типа могу се навести Tignes, Gage, Seminoe, Bort, Okertal, Добра, Glen Canyon и још

неке мање значајније и познате. На основу тога кривине добро пројектованих лучних брана представљају веома битне факторе за погодно статичко дејство тих конструкција, па сходно томе, веома тешко могу бити изузете из разматрања и прорачуна, па чак и ако задовољавају услове постојања плитких љуски ($f/l \leq 1/5$).
ДЕБЉИНЕ ЛУКОВА. Занемаривање промене дебљина лукова у хоризонталном правцу и последична недиференцијабилност D_m i D_n по (2)-оси тј., изједначавање резултујућих израза са нулом, поједностављује сваки систем еквилибријума, а сва могућа проширења смештава близу опораца.. Практично посматрано, прорачун и не мора да обухвати тај утицај који се формира конструктивним обликовањем лукова тј., тела бране и који увећава њену стабилност, али зато врши прерасподелу напона која је утолико већа уколико је брана лоцирана у уским долинама. На тај начин у уским долинама, путем обликовања бране са константном дебљином лукова, добијају се једноставнији модели са мање прорачунских нетачности. Ако ти услови нису испуњени онда свака промена дебљине лукова и појава задебљања аутоматски захтева и сложеније математичко-физичке моделе – поготову од оних изражених Donnell-овим једначинама или њиховим накнадним упрошћењима, као што су то поступци са применом технике интегралних једначина и др.

5. СМИЧУЋЕ СИЛЕ

ТРАНСВЕРЗАЛНЕ. Имајући у виду чињеницу да лучне бране добрим делом припадају класи средње дебелих љуски то је код њих, на известан начин, карактеристично дејство трансверзалних смичућих сила $Q_{1,2}= M_1^{(1)} + M_{12}^{(2)}$ и $Q_2= M_{21}^{(1)} + M_2^{(2)}$ сила, намеће се закључак да у условима равнотеже њихово дејство не сме бити занемарено. Такав став је оправдан и са аспекта изложене теорије танких љуски обзиром да се једно овако занемаривање сме учинити једино у случају љуски код којих је $h_{max}/r_{min} \leq 1/30$ тј., врло ретког и практично непостојећег облика лучних брана. Свакако да то априори не значи да уколико у неким једначинама добивених по теорији танких љуски постоје чланови од израза за Q-силе да систем једначина заправо описује дебеле љуске. Слично важи и за надградњу Reissner-а.
ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ. Обзиром да се диференцијалне једначине плитких љуски могу добити из диференцијалних једначина опште теорије танких љуски, при допунској претпоставци да њихова средња површ поседује метрику еуклидске геометрије, то се може прихватити закон о коњугованости тангенцијалних сила $N_{12} = N_{21}$ и торзионих момената $M_{12} = M_{21}$ и као такав је уобичајен у циљу решавања практичних проблема теорије површинских носача (в. нпр. једн. (8) у [23]). Код лучних брана понекад се уводи и додатна претпоставка о константној вредности тангенцијалних сила на бази сазнања да се њихове промене код појединих облика лучних брана могу сматрати занемарљиво малим у хоризонталном и вертикалном правцу чиме се могу елиминисати у поступку диференцирања. Ове једнакости су у супротности са 6. једначином еквилибријума, која је недиференцијабилна, показујући да принцип коњугованости тангенцијалних сила и торзионих момената не важи у случају лучних брана тј., љуски које се одупиру савијању и увртању тако да могу бити прихвативе само у оквиру упрошћених теорија слабо закривљених танких љуски и њихове примене у пракси [30]. Међутим, уколико се у систему тих

условних еквилибријума изостави неки други члан, као например члан $1/2(D_n u^{(2)})^{(1)}$ у једначинама (17), онда се тај принцип руши тј., долази се до некомпатибилности разматраног система. Тиме се ремети и одрживост већ превише упрошћене теорије споменутих љуски, па се зато морају предузимати допунски итеративни поступци у циљу повраћаја једнакости односно, одржања условног еквилибријума, а тиме и саме стабилности лучне бране.

6. POISSON-ОВ КОЕФИЦИЈЕНАТ и ВЕРТИКАЛНО ПОМЕРАЊЕ

POISSON-ов КОЕФИЦИЈЕНАТ. Логички посматрано утицај овог параметра, чија се вредност код брана креће око 0.20, би требало да буде сличан оном као и код тачнијег прорачуна конструкција типа танких плоча, пре свега због његовог последичног дејства на неке понекад веома важне напоне. Као прво, повећањем његове вредности повећава се и крутост конструкције тј., обуздавање у телу бране, што би требало да се одрази на просечно смањење померања и одговарајућих деформација. Сама геометрија тела лучне бране и облик преградног места при томе имају своје додатне утицаје. То значи да уколико се послужимо споменутом *Euler*-овом идејом и лучну брану посматрамо као конструкцију састављену од система појасева, хоризонталних и вертикалних ([18],[15]), онда ће, како у уским "V"- долинама тако и у широким "U"- долинама, дејство *Poisson*-овог коефицијента доћи до изражаја пошто ће вертикални појасеви због одржања услова копатибилности, бити приморани да следе хоризонталне, односно у другом случају, да хоризонтални следе вертикалне. С друге стране посматрано, обзиром да се при дејству оптерећења на било које тело јавља тенденција промене димензија то ће се иста, рецимо у конзолним елементима бране манифестовати у облику повећања њихових дужина. У оним деловима где је омогућена та промена реално треба очекивати да је Poisson-ов утицај мањи (централни део бране), док је његов утицај знатно већи у оним регионима где је експанзија спречена (бочне конзоле, опорци, фундаменти и сл.). У складу са тим треба и претпоставити да су утицаји μ-ефекта у телу бране утолико израженији уколико су присутне веће вредности *Poisson*-овог коефицијента опорачког и темељног стенског масива где су главни σ_2-напони приближно паралелни контактној површини бране, а да су занемарљиви уколико је његова вредност мала. То потврђују и закључци добивени упоредном анализом резултата (1K+nL) и (mK+nL) TLM-a, MKR-a. MKR-a и Првог привременог извештаја Комитета за пројектовање лучних брана (Тип I)[11]. Изгледа да уколико је лучна брана мање крива, чиме се смањује и могућност изазивања притиска на узводној страни, μ-утицај је разнолико већи. Нешто слично се односи и на брану са јако наглашеном низводном страном, пре свега као резултат дејства вертикалне компоненте воде. Поред тога што Poisson-ов коефицијенат утиче на вредност σ-напона његов значај је незанемарљив и код максималних смичућих напона у горњој трећини бране тако да се његовим изостављањем уводи једна грешка од ширег значаја за тачност сагледавања напонско-деформативног стања читаве конструкције. При томе, грешке прорачуна

[11] USBR- 1977, Copen, M. D.- 1964, Zienkiewicz, O. C. и Chung, Y. K.- 1964 и др. Више о томе у Лит. [21]

настале коришћењем приближних вредности су неупоредиво мање од оних које резултирају из потпуног занемаривања μ-ефекта [21]. Иако треба претпоставити да су релативна одступања услед Poisson-овог коефицијента код упрошћених модела мања од оних у тачнијим, као и да му је утицај просечно мањи код максималних напона у односу на остале напоне његово потпуно занемаривање махом нема већег оправдања. Све то је и разлог његовог укључења у многим прорачунима, а у склопу тога и у оним који се користе интегралним једначинама (в. нпр. [28]). **ВЕРТИКАЛНО ПОМЕРАЊЕ**. У односу на утицај Poisson-овог коефицијента, утицај υ-померања на напонско деформативно стање лучне бране је, просечно посматрано, мање израженији, иако у границама које понекад могу бити веће од граница утицаја μ-ефекта што је и потврђено TLM и другим анализама, као и моделским испитивањима неких од врло познатих лучних брана у свету (Hoover, Vaiont, Stevenson Creek, Gipson, Pieve di Cadore, Morrow Point, Monticello, Flaming Gorge, Yellowtail и др. - Л. [22]). Вертикално померање у оваквим структурама се у принципу можу јавити услед: (1) момената савијања у конзолама услед дејства радијалних конзолних оптерећења и торзионих момената од тангенцијалних и торзионих конзолних оптерећења; (2) вертикалне аксијалне силе настале из интеграције степена промене тангенцијалних смичићих сила услед тангенцијалних конзолних оптерећења и тангенцијалне компоненте инерцијалне силе бетона; (3) разлика између t°C бетона бране у тренутку затварања и минималне радне t°C. Нормално да се горњим факторима могу придодати и они који се односе на сам облик преградног места у коме је брана стационирана. Према истраживања врсног инж. Млађеновића утицај υ-померања и његова величина су посебно изражени услед дејства нормалних сила луикова и као такви су незанемарљиви. Уколико је преградно место "V"-облика, онда вертикално померање изазива вертикалне напоне притиска на централном делу бране и напоне затезања близу опораца, док у случају "U"-облика преградног места изазива вертикалне напоне затезања близу опораца. Поред овога реално се може претпоставити да уколико је лучна брана танка са јако закривљеном низводном страном онда ће се и утицај саме вертикалне компоненте воде одразити на повећање вредности υ-померања. Више о томе у [22].

7. ОСВРТ НА ДОМАЋУ ПРАКСУ И ПОСТУПАК инж. Н. ХАЈДИНА

Као што је изведено у [23] полазни систем једначина коришћен у домаћој пракси за прорачун лучних брана по теорији танких љуски изражен путем померања је:

$$(D_n u^{(1)})^{(1)} + D_n/2(u^{(2)} + v^{(1)})^{(2)} = 0 \qquad (17.1.)$$
$$D_n v^{(2,2)} + D_n/rw^{(2)} + (D_n v^{(1)})^{(1)}/2 = 0 \qquad (17.2.)$$
$$(D_m w^{(1,1)})^{(1,1)} + 2(D_m w^{(1,2,2)})^{(1)} + D_m w^{(2,2,2,2)} + D_n/rv^{(2)} + D_n/r^2 w + Z = 0 \qquad (17.3.)_{\Pi}$$

осматрањем само једначина сада већ условних Y- и Z- еквилибријума, њиховим преуређењем, усвајањем одговарајуће диференцне шеме у систему ортогоналних линија на средњу површ бране, погодним начином означавања највиших извода *v* и *w* и користећи се условима по силама M_1, Q_1 и N_{12} на слободној контури,

$$\{M_1\}_{(1,2)\in L_2} = 0 \Rightarrow \quad D_m w^{(1,1)} = 0$$
$$\{Q_1\}_{(1,2)\in L_2} = 0 \Rightarrow \quad (D_m w^{(1,1)})^{(1)} = 0;$$
$$D_m (w^{(1,2)})^{(2)} = 0$$
$$\{N_{12}\}_{(1,2)\in L_2} = 0 \Rightarrow \quad D_n/2 v^{(1)} = 0$$

а потом и условима по померањима v и w на опорачкој контури,

$$\{w\}_{(1,2)\in L_1} = w^* = \Delta_{(3)}$$
$$\{v\}_{(1,2)\in L_1} = v^* = \Delta_{(2)}$$
$$\{w^{(1)}\}_{(1,2)\in L_1} = \varphi = \theta_{(2)}$$
$$\{w^{(2)}\}_{(1,2)\in L_1} = \psi = \theta_{(1)}$$

тј., користећи се разрађеним Vogt-овим решењима, добијају се одговарајуће Fredholm-ове интегралне једначине са језгрима у облику *Green*-ових функција ([4],[9],[19]). Како ове функције својим обликом одговарају утицајним функцијама за моменте савијања и дефлексија греда са одговарајућим оптерећењима, то се применом формалне аналогије исте могу одредити методама Теорије конструкција. При томе се у пракси раду нужност израчунавања ордината утицајних линија избегава применом погодног система јединичних оптерећења на гредни систем по аналогији са добро познатим TLM-ом [2]. Једном принципијелно таквом процедуром могуће је из 2. и 3. једначине система (17.) добити померања *v* и *w*, а затим сменом *v* и његових извода у 1. једначину и померање, али само приближно. Сходно томе, мора се у складу са методологијом итеративних процеса накнадно спровести и циклус сукцесивних апроксимација у оквиру комплетног система ради прецизнијег одређивања вредности померања.
Оправданост примене поступка трансформисања диференцијалних у интегралне једначине произилази из чињенице да нумеричка интеграција често пута за исти број дистантних тачака даје тачније резултате од одговарајуће диференцијације. Последично томе, иста тачност решења се може постићи са смањеним бројем тачака, што доноси релативно велике користи у разматрању динамичких проблема [6]. У самом поступку се могу искористити разне квадратурне формуле или, као што су то Хајдин и Крајчиновић учинили, теорија сплајнова (пример у [10] се односи на кубне сплајнове). Међутим, ти квалитети не мењају практичну суштину проблема произашлог из превеликог поједностављења облика полазног модела у циљу његовог прилагођења условима примене одређеног математичког поступка.

8. ЗАКЉУЧАК СА АСПЕКТА ТЕОРИЈЕ И ПРАКСЕ

ТЕОРИЈА. Популарно речено, колико год се трудили тело лучне бране практично никада не може бити било каква танка изотропна цилиндрична, плитка или вертикална љуска, а понајмање онаква каква је описана системом једначина (17).
Међутим, хиљаде лучних брана које и дан-данас стоје ненарушене, од којих су многе најобичнијом котловском формулом прорачунаване, ипак опомињу да и у томе треба имати меру и не претерати - без обзира што је већ сада дошло време у

коме лучна брана постаје типска ствар[12], а преостала креатива се концентрише само на њено окружење.

ПРАКСА. Свеједно, рачунали лучну брану неким од коришћених облика решења Lamè-Clapeyron-а из 1883. (рецимо применом "котловске формуле" и сл.), неким од основних или унапређених облика Ritter- овог решења из 1913. (нпр. применом TML-а на систем mL+nK) или неким најсавременијим МКЕ-помагалом, увек ћемо код прорачуна *таквих љуски од таквог материјала* у суштини скоро исто добити, и понашати се онако како нас учи увек старија инжењерска пракса, а не млађа теорија. Другим речима, било који поступак да применимо добићемо очекиване резултате који ће "мање-више" потврдити наш претходни искуствено формирани став. У томе лежи и тајна "успеха" прорачуна у коме се користи поступак инж. Хајдина за решавање интегралних једначина, али и било ког поступка примењеног у свету са варијантама понаособ зависних од многих помагала у конкретним околностима, а такође и коришћеног маркетинга заснованог увек на профиту.

Укратко, не постоје добре и лоше методе прорачуна, постоје само добри и лоши корисници тих метода односно, више или мање добро пројектоване и изграђене бране којима прорачуни дају додатну сигурност и нормативно покриће.

ЛИТЕРАТУРА

[1] BATHE, K. J., WILSON, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, **1976**.

[2] Boulder Canyon Project Final Reports, Part V, Bulletin, *Trial load method of analyzing arch dams*, Bureau of Reclamation, U. S. Dept. of Interior, Denver, Colorado, **1938.**

[3] FLÜGGE, W., *Statik und Dynamik der Schalen,* Berlin, Springer., 2. Aufl., **1957.**

[4] ГАНЕВ, Х.Г., Обща аналитична и синтетична теория на дъговите язовирни стени, Българската Академия на Науките, София, **1978.**

[5] GIRKMANN,K., *Flächentragwerke*, Springer-V., Wien, 1959. (Превод "Грађевинска књига" – Београд, **1965**)

[6] ГРИГОРЕНКО, Я., ВАСИЛЕНКО, А.Т., *Теория оболочек переменной жесткости*, Академия Наук Украинской ССР, Киев, **1981.**

[7] ГРИШИН, М. М., РОЗАНОВ, Н. П. и др., Бутонные плотины (на скальных основаниях), Стройиздат, Москва, **1975**.

[8] HAJDIN, N., Ein Verfahren zur numerischen Loesung der Randwertangaben von elliptischen Typus, *Publs Inst. Math. Acad. Serbe Sci, IX,* 62-73, **1956.**

[12] То стање из 1981. се и данас ништа није променило осим што је бизнис довео до тога да се због потребе пословних трансакција раде изузетно скупе рачунице и истраживања, а вредност радова вишеструко увећава. Ауторово искуство као главног инжењера у експертском тиму понуђача на ХЕ систему "Ponte de Pedra" у Бразилу [33], где је посао изградње са неколико пута већом предложеном вредношћу добила и без проблема завршила компанија "Impregilo" то и потврђује. Више о томе у првом раду такве тематике у домаћој пракси: Petković, M. D., Prilog odnosu struke i biznisa u savremenoj građevinarskoj praksi, *Proc. of International Conference "Civil engineering – Science and Practice", GNP 2014,* Žabljak, **2014** (Рад посвећен сећању на инж. Данила Рашковића)

[9] HAJDIN, N., An integral equation method for arch dam analysis, *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams,* Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, London, **1965**).

[10] HAJDIN, N., KRAJČINOVIĆ, D., Integral equation method for solution of boundary value problems of structural mechanics, Part I, II, *Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.4,* **1972**,

[11] LOMBARDI, J., Les barrages en voûte mince sur l'effet de torsion, Lausanne, **1955**

[12] MLADYENOVITCH, V., Deformation des foundations des barrages, *Travaux, No11-12,* ***1966.*** (Превод "Енергопројект", Београд)

[13] OGIBALOV, P.M., ANĐELIĆ, T., *Mehanika ljuski i ploča*, ICS, Beograd, **1975**.

[14] PETKOVIĆ, M., *Numerički metodi rešavanja integralnih jednačina-Deo I, (Fredholm-ove integralne jednačine)* Niš, **1979**. str. 119-131

[15] PETKOVIĆ, M., *Prilog metodologiji statičkog proračuna lučnih brana, Deo I*, Рад посвећен инж. Браниславу Кујунџићу, Građevinski fakultet u Nišu, Niš, **1981**. str. 17-114 (необјављено)

[16] PETKOVIĆ, M., *Prilog metodologiji statičkog proračuna lučnih brana, Deo II*, Рад посвећен инж. Браниславу Кујунџићу, Građevinski fakultet u Nišu, Niš, **1981**. стр.118-141, 198-257. (необјављено). Стр. 306-323: *Prilog razmatranju primenjene teorije ljuski kod lučnih brana,* **1981**. Објављено у [17]

[17] PETKOVIĆ, M., Analiza održanja uslova primenljivosti određenih teorija ljuski za rešavanje naponsko-deformativnog stanja lučnih brana, *Materijali i konstrukcije, 25 (1),1 -6,* **1982**

[18] PETKOVIĆ, M., Jednoznačnosti rešenja dvostruko krivih ljuski putem određivanja smanjenog broja uticaja, **1982** (необјављено), [Напомена: накнадно објављено у: *Materijali i konstrukcije, 26 (1), 5-9,* (1983)]

[19] PETKOVIĆ, M., *Metodologija određivanja kontaktnih uslova kod lučnih brana na bazi rešavanja Boussinesq-ovog problema*, **1982**, str. 37-61

[20] PETKOVIĆ, M., Consideration of Hajdin's integral equations method for arch dam analysis (Analiza Hajdin-ove metode integralnih jednačina za statički proračun lučnih brana), **1982** (необјављено)

[21] PETKOVIĆ,M., Uticaj Poisson-ovog koeficijenta na naponsko stanje lučnih brana, str.1-25, **1982** (необјављено)

[22] PETKOVIĆ,M., Uticaj vertikalnog pomeranja na naponsko stanje lučnih brana, str.1-11, **1982** (необјављено)

[23] ПЕТКОВИЋ, М., Прилог савременом српском неимарству – Део 3/1: Лучне бране и теорија танких љуски, Грађ. фак. у Суботици, Суботица 2015.

[24] PRIŞCU, R., *Constructii Hidrotehniće - Vol. I*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, **1974**, str.326-342

[25] ROCHA, M., Statement of the physical problem of the arch dam, *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams,* Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, London, **1965**).

[26] ROSANOV, N., Études sur modèles élastiques de la statique des ouvrages hydrauliques, *Symp. on Conc. Dam Mod., Lab. Nac. Eng. Civil, Paper 10*, Lisbon, **1963**.

[27] TÖLKE, F., *Talsperren, staudamme und staumauerr*, (у: LUDIN, A., Wasserkraftan lagen-2. Hälfte, 1, Teil: Talsperen, стр. 492 и даље), Springer-Verlag, Berlin, **1938.**

[28] TOTTENHAM, H., Further developments in the integral equation technique in arch dam analysis, *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams,* Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, London, **1965**)
[29] U. S. Dept. of Interior, Bureau of Reclamation, *Design of arch dams,* Denver, **1977**.
[30] ВЛАСОВ, В. З., *Общая теория оболочек и ее приложения в технике, Избрани труди,* Академия Наук СССР, Часть 1, Москва, **1962.**

ПРОЈЕКТНА ДОКУМЕНТАЦИЈА, ТЕХНИЧКА САОПШТЕЊА И ИЗВОДИ

[31] PETKOVIĆ, M., *Komparativna statička analiza lučne brane "Otilovići" – sistemi nL, 1K+nL, MKE, No (17), deo II,* стр. 167-369, Građ.fak. u Nišu, Niš **1978**.
[32] PETKOVIĆ, M., *Statička analiza lučne brane "Glažnja" – sistemi 1K+nL, mK+nL,* в. Лит. [15], стр. 258-305, **1981**.
[33] PETKOVIĆ, M., B. IGNJATOVIĆ, B., Neki aspekti rešenja i tehno-ekonomske analize HE „Ponte de Pedra“ u Mato Grosso - Brazil, *Зборник радова YUCOLD Комитета за високе бране,* Kladovo, **2003**.
[34] PETKOVIĆ, M., B. IGNJATOVIĆ, B., Prikaz rešenja i tehno-ekonomske analize HE "Napoleao de Brito" u Mato Grosso do Sul - Brazil, *Зборник радова YUCOLD Комитета за високе бране,* Kladovo, **2003.**