

HARMONIC ANALYSIS THREE FREQUENCY RESPONSE WITH VIEWS OF THE NUMBER OF MEMBERS OF THE SERIES „FFT” TRANSFORMATION

ХАРМОНИЈСКА АНАЛИЗА ТРО ФРЕКВЕНТНОГ ОДЗИВА СА ГЛЕДИШТА БРОЈА ЧЛАНОВА РЕДА „ФФТ” ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Ilija M. Miličić¹

Milan Kekanović²

Viktorija Aladžić³

Ivana I. Miličić⁴

UDK: 004.942:531.3

DOI: 10.14415/zbornikGFS36.02

CC-BY-SA 4.0 license

Summary: In this paper, a 1D dynamical model with substrate resistance was imposed with three frequencies of displacement amplitudes with two amplitudes with frequencies in the resonant region. If the external excitation is treated as a continuous periodic real function with two variables (the basic oscillation period – the first and the ratio of the frequency of the external excitation and the response of the model – the second) then we can present the final solution of the motion of the 1D model in conjugated complex form. Applying FFT algorithms with MathCAD, the treated displacement amplitudes in the frequency and time domains respect the mapping suggested by the transfer function (I.M.Miličić, 2015) and with a smaller number of order members. Computer simulations confirmed that the harmonic response of a 1D dynamic model system can be successfully modeled based on the equivalent solution which shown here.

Keywords: Dynamic model, harmonic analysis, equivalent solution, transfer function.

Резиме: У овом раду је 1Д динамичком моделу са отпором подлоге, наметнута побуда са три учестаности амплитуда померања при чему су две амлитуде са учестаностима у резонантном подручју. Ако је спољашња побуда третирана као континуална периодична реална функција са две променљиве (основни период осциловања – прва и однос учестаности спољашње побуде и одзива модела – друга) онда можемо коначно решење кретања 1Д модела приказати у коњуговано комплексном облику. Примењујући алгоритме ФФТ са апликацијом MathCAD, третиране амплитуде померања у фреквентном и временском домену респектују пресликавање предложено функцијом преноса (И.М.Миличић, 2015) и са мањим бројем чланова реда. Рачунарским симулацијама потврђено је да се хармонијски одзив система 1Д динамичког модела може успешно моделирати на основу овде показаног еквивалентног решења.

Кључне речи: Динамички 1Д модел, хармонијска анализа, еквивалентно моделирање, функција преноса.

¹ Ilija M. Miličić, PhD, CE, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, 24000 Subotica, Serbia, e – mail: milicic@gf.uns.ac.rs

² Milan Kekanović, PhD, CE, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, 24000 Subotica, Serbia

³ Viktorija Aladžić, PhD, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, 24000 Subotica, Serbia

⁴ Ivana I. Miličić, student, University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Dr Sime Milošević 12, 21000 Novi Sad, Serbia, e – mail: i_milicic@hotmail.com

1. INTRODUCTION

Digital measuring technology is increasingly present in the field of civil engineer, so it is necessary to constantly monitor the development of measuring devices and measuring systems. Surely these systems and devices register basic physical quantities, only reading the value of each of them has become a skill exclusively for the designer of such a measuring system.

On the other hand, a multidisciplinary contribution is made to all technical disciplines that use engineering methods and every logic of engineers, but learning is still necessary - training for adapting experimental theoretical analysis of structures to contemporary requirements.

Increasingly surrounded by digitized measuring devices, monitoring systems require the experimental design analysis of structures to constantly adapt and apply new measuring devices that register known physical measuring quantities such as: mass, length, temperature, pH of the substance, etc. We would like to mention the smaller presence on the market of mechanical measuring equipment as well as electrical analogue systems for the first time to buy, but for the most part it is the absence of service support and spare parts.

This type of equipment is simply outdated on the one hand, while on the other hand, science has made a major progression of digitalization with the achievements and the devices themselves that are not ready to understand, use and repair them (parts and services).

Initially, the vast majority of present-day mining systems operate on a mathematical model that has a built-in transfer function. This feature is not physically visible, but we use it greatly. In fact, what is a transfer function?

In general, the transfer function is one of the possible ways of mathematically solving a dynamic system behavior. It is

1. УВОД

Дигитална мерна техника је свакодневно све више присутна у пословима грађевинског инжењера, па је неопходно стално пратити развој мерних уређаја и мерних система. Сасвим сигурно ти системи и уређаји региструју основне физичке величине, само је читање вредности сваке од њих постала вештина искључиво пројектанта таквог мерног система.

С друге стране, мултидисциплинарни допринос је свих техничких дисциплина које користе инжењерске методе и сваку логику инжењера, али је опет и поред тога неопходно учење – обука за прилагођавање експериментално теоријске анализе конструкција савременим захтевима.

Све више окружени дигитализованим мерним уређајима, системима за мониторинг налаже потребу да и експерименталну анализу конструкција стално прилагођавамо и примењујемо нове мерне уређаје који региструју познате физикалне мерне величине као што су: маса, дужина, температура, рН вредност супстанце, итд. Наведимо све мање присуство на тржишту механичке мерне опреме као и електричних аналогних система најпре за купити, али у највећој мери је одсуство сервисне подршке и резервних делова.

Једноставно застарева ова врста опреме с једне стране, док је са друге стране наука дигитализацијом донела веома велику прогресију достигнућа тако и самих уређаја који нас затичу не спремне да их разумемо, користимо и поправљамо (делови и сервиси).

Заправо, велика већина данас присутних мнерних система ради на неком математичком моделу који у себи има уграђену функцију преноса. Ова функција се физички не види, али је увелико користимо.

Заправо, шта је функција преноса ?

mainly used in electrical engineering in the theory of automatic control, communications and digital signal processing. It is a differential operator, representing the relationship between the inputs and outputs of a linear stationary system.

Therefore, once we know the system input and the transfer function, then we can reconstruct each output signal. In simple terms, the transfer function is the mathematical regularity of the relationship between the inputs and outputs of a dynamic system. In the time domain, such a system is characterized by an impulse response by transforming the input signal $\Delta(t)$ into the output signal $x(t)$.

With the corresponding (Fourier or Laplace) transformation, the input signal to the output signal can be replaced, so their relation is precisely one of the possible transfer functions.

2. MATHEMATICAL MODELING

We consider equation (9) given in [1], whose solution is the product of the measured deflection values with the coordinates of the response function of the „response – excitation” for the same point on the structure and its frequency Ω_i and the equal frequency of the external excitation.

$$x(t) = A_i \underbrace{P(\psi_i)}_{x_i} \cdot \cos(\Omega_i t + \theta_i) \quad (1)$$

$$x(t) = X_i \cdot \cos(\Omega_i t + \theta_i)$$

Where:

X_i = the displacement amplitude of the model response

Therefore, in this paper, using the MathCAD computer application, we test its mathematical equivalent to the

Уопште функција преноса је један од могућих начина математичког решења једног динамичког понашања система. Углавном се користи у електротехници код теорије аутоматског управљања, комуникацијама и дигиталној обради сигнала.

То је диференцијални оператор, који представља однос између улаза и излаза линеарног стационарног система. Према томе, када знамо улаз система и функцију преноса, онда можемо да реконструишемо сваки излазни сигнал. Једноставније речено, преносна функција је математичка законитост односа између улаза и излаза једног динамичког система. У временском домену, такав систем карактерише импулсни одзив трансформацијом улазног сигнала $\Delta(t)$ у излазни сигнал $x(t)$.

Са одговарајућом (Фуријеовом или Лапласовом) трансформацијом могу се заменити улазни сигнал у излазни, па је њихов однос управо једна од могућих функција преноса.

2. МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

Разматрамо једначину (9) дату у [1], чије решење је производ вредности мерених угиба са ординатама функције преноса „одзив – побуда” за истоветну тачку на конструкцији и њене учестаности Ω_i једнаке учестаности спољашње побуде.

где је:

X_i = амплитуда угиба одзива модела

Због тога у овом раду коришћењем рачунарске апликације MathCAD тестирамо његово математички еквива-

solution represented by the function in an exponential form:

лентно решење представљено функцијом у експонецијалном облику:

$$e^{\pm i\Omega t}$$

with coefficients

са коефицијентима

$$\bar{X} = A + iB$$

and

и

$$\bar{X}^* = A - iB$$

were, the complex constant \bar{X}^* is called the complex conjugate of \bar{X} .

где је \bar{X}^* комплексна константа, а \bar{X} њој коњугована комплексна.

Thus, the solution of equation (1) is treated here solely because of the possible approach in the way of interpreting the results of computer simulations through the complex expression of its solution represented as the sum of complex conjugated complex pairs of solutions (real and imaginary part).

Дакле, решење једначине (1) овде се третира искључиво због могућег приступа у начину тумачења резултата рачунарских симулација путем сложеног израз његовог решења представљеног као збир сложених коњуговано комплексних парова решења (реалног и имагинарног дела),

$$\bar{X} \cdot e^{i\Omega t} = [A \cdot \cos(\Omega t) - B \cdot \sin(\Omega t)] + i \cdot [A \cdot \sin(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t)] \quad (2)$$

$$\bar{X}^* \cdot e^{-i\Omega t} = [A \cdot \cos(\Omega t) - B \cdot \sin(\Omega t)] - i \cdot [A \cdot \sin(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t)] \quad (3)$$

Therefore, based on Fig. 1, in a different way, because of the simpler interpretation of the results graphically, the complex solution of equation (7) is shown. Therefore, in the final response of a 1D dynamic model with an external excitation, we have that the pairs of real values of the solution add up while the pairs of parts of the imaginary solution are canceled. Finally, one response amplitude of the 1D dynamic model can be found as the sum of the amplitudes according to (2) and (3), respectively.

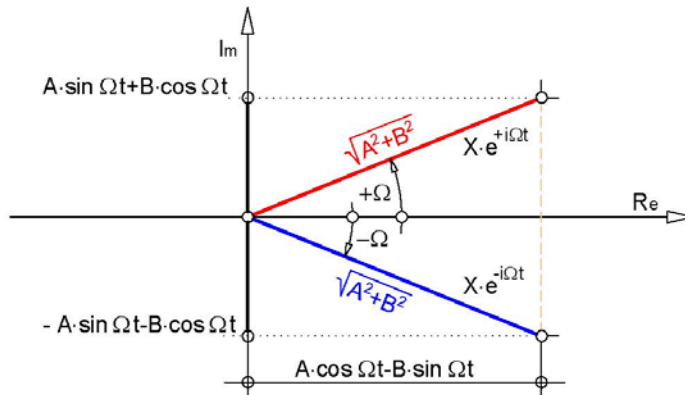
Због тога, на основу сл. 1, на другојачији начин због једноставнијег тумачења резултата графичким путем показује се комплексно решење једначине (7). Према томе, у коначном одзиву 1Д динамичког модела са спољашњом побудом имамо да се парова реалних вредности решења сабирају док се парови дела имагинарног решења поништавају. На крају, једна амплитуда одзива 1Д динамичког модела може се наћи као збир амплитуда према (2) односно (3).

$$X = |\bar{X}| + |\bar{X}^*| = 2\sqrt{A^2 + B^2} \quad (4)$$

that is,

односно,

$$X = |\bar{X}| + |\bar{X}^*| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5)$$



Слика 1 – Коњуговано комплексна осцилација
Figure 1 – Conjugated complex oscillation

3. COMPUTER SIMULATION

The input data for the simulation are: m – mass, ξ – damping and c – stiffness.

$$m := 640 \text{ kg}$$

$$\xi := 0.5$$

$$c := 1.0 \cdot 10^5 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Calculation of natural frequency and physical damping of 1D model:

$$\omega := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega = 12.5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$b := 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi \quad b = 8 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$f_d := \frac{\omega_d}{2 \cdot \pi} \quad T_d := \frac{1}{f_d}$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad f = 1.99 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_d := \omega \sqrt{(1 - \xi^2)} \quad \omega_d = 10.83 \frac{1}{\text{s}}$$

$$T_d = 0.58 \text{ s} \quad \frac{T_d}{10} = 0.058 \text{ s}$$

third – frequency model excitation

тро фреквентна побуда модела

$$A_1 := 5 \cdot \text{mm}$$

$$A_2 := 5 \cdot \text{mm}$$

$$A_3 := 5 \cdot \text{mm}$$

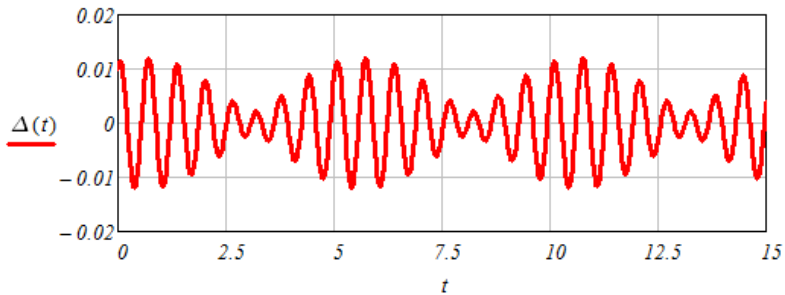
$$\Omega_1 := \frac{7}{10} \cdot \omega$$

$$\Omega_2 := \frac{8}{10} \cdot \omega$$

$$\Omega_3 := \frac{8}{10} \cdot \omega$$

- external excitation of the model
- спољашња побуда модела

$$\Delta(t) := A_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t) + A_3 \cdot \cos(\Omega_3 \cdot t)$$



Слика 2 – Спољашња трофреквентна побуда модела
Figure 2 – External three-frequency excitation of the model

The general form of the equation of motion of a model

Општи облик једначине кретања модела

$$x(t) = A_i \cdot P(\psi_i) \cdot \cos(\Omega_i t + \theta_i)$$

superposition of individual responses

суперпозиција појединачних одзива

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 t + \theta_2) + X_3 \cdot \cos(\Omega_3 t + \theta_3)$$

response amplitude

амплитуда одзива

$$X_i = \frac{c}{c} \cdot A_i \cdot P(\psi_i)$$

disorder coefficient

коэффициент поремећаја

$$\psi_i = \frac{\Omega_i}{\omega} \quad i = 1, 2, 3$$

transfer function „response – excitation”

преносна функција „одзив – побуда”

$$P(\psi) := \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}}$$

Amplitude calculation for:

Срчунавање амплитуда за:

- first response

- први одзив

$$\psi_1 := \frac{\Omega_1}{\omega} \quad \psi_1 = 0.7$$

$$P(\psi_1) = 1.155 \quad \theta_1 := \theta(\psi_1)$$

$$X_1 := \frac{c}{c} \cdot A_1 \cdot P(\psi_1) \quad X_1 = 0.0058m \quad \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} = -53.924$$

- second response

- други одзив

$$\psi_2 := \frac{\Omega_2}{\omega} \quad \psi_2 = 0.8$$

$$P(\psi_2) = 1.14 \quad \theta_2 := \theta(\psi_2)$$

$$X_2 := A_2 \cdot P(\psi_2) \quad X_2 = 0.0057m \quad \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} = -65.7723$$

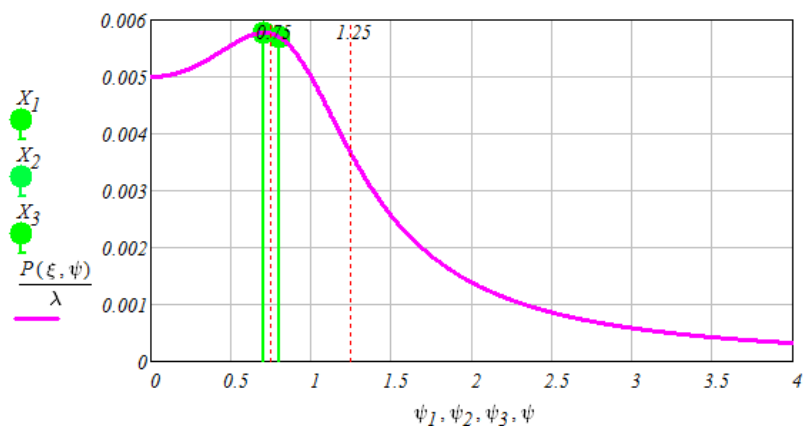
- third response

- трећи одзив

$$\psi_3 := \frac{\Omega_3}{\omega} \quad \psi_3 = 0.8$$

$$P(\psi_3) = 1.14 \quad \theta_3 := \theta(\psi_3)$$

$$X_3 := A_3 \cdot P(\psi_3) \quad X_3 = 0.0057m \quad \theta_3 \cdot \frac{180}{\pi} = -65.7723$$



Слика 3 – Амплитуде одзива 1Д модела
Figure 3 – 1D Model response amplitudes

4. HARMONIC ANALYSIS

Harmonic analysis parameters:

Number of Data Points Sampled (binary number.)

$$N := 2^9$$

Dwell Time

$$DW := 0.10 \cdot sec$$

Acquisition Time

$$AT := DW \cdot N$$

Spectral Window

$$SW := \frac{1}{2 \cdot DW}$$

Digital Resolution

$$Resolution := \frac{1}{AT}$$

Time index

$$i_a := 0, 1 \dots N - 1$$

Frequency index

$$j := 0, 1 \dots \frac{N}{2} - 1$$

4. ХАРМОНИЈСКА АНАЛИЗА

Параметри хармонијске анализе:

Број узоркованих података (бинарни број.)

$$N = 512$$

Подеок времена трајања

Време регистровања података

$$AT = 51.2 s$$

„Прозор” спектра сигнала

$$SW = 5 \cdot Hz$$

Резолуција приказа

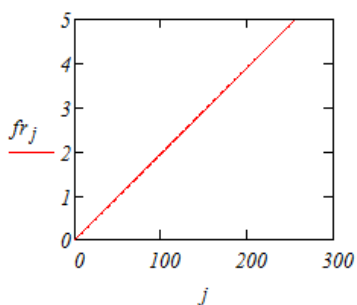
$$Resolution = 0.02 \cdot Hz$$

Индекс времена

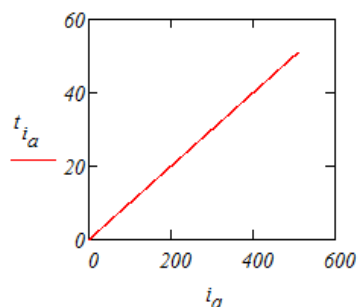
$$t_{i_a} := i_a \cdot DW$$

Индекс фреквенције

$$fr_j := \frac{j}{N \cdot DW}$$



1)



2)

Слика 4 – Коришћени индекси у хармонијској анализи
Figure 4 – Indexes used in harmonic analysis

Calculation of wave forms:**Срчунавање таласних облика:**

the first wave of excitation

први таласни облик побуде

$$\Delta_1(t) := A_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t)$$

the second wave of excitation

други таласни облик побуде

$$\Delta_2(t) := A_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t)$$

the third wave of excitation

трећи таласни облик побуде

$$\Delta_3(t) := A_3 \cdot \cos(\Omega_3 \cdot t)$$

Wave form of excitation:

Таласни облик побуде:

$$\underline{\Delta}(t) := \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \Delta_3(t)$$

the first wave of response, $\varphi=0$ први таласни облик одзива, $\varphi=0$

$$x_1(t) := X_1 \cdot \cos \left[\Omega_1 \cdot t + \left(\theta_1 \frac{\pi}{180} + \varphi \right) \right]$$

the second wave of response, $\varphi=0$ други таласни облик одзива, $\varphi=0$

$$x_2(t) := X_2 \cdot \sin \left[\Omega_2 \cdot t + \left(\theta_2 \cdot \frac{\pi}{180} + \varphi \right) \right]$$

the third wave of response, $\varphi=0$ трећи таласни облик одзива, $\varphi=0$

$$x_3(t) := X_3 \cdot \cos \left[\Omega_3 \cdot t + \left(\theta_3 \cdot \frac{\pi}{180} + \varphi \right) \right]$$

Wave form of response:

Таласни облик одзива:

$$\underline{x}(t) := x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

Fourier Transform – FFT: Frequency domain (spectrum) simulation

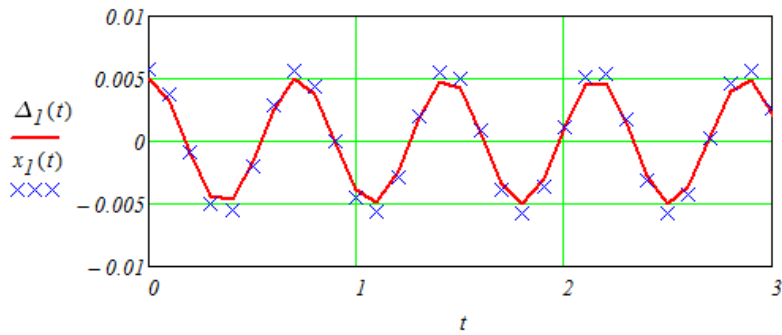
ФФТ трансформација: Симулација у фреквентном домену

$$U_1 := \text{fft}(\Delta_1(t)) \quad U_2 := \text{fft}(\Delta_2(t)) \quad U_3 := \text{fft}(\Delta_3(t)) \quad U := \text{fft}(\Delta(t))$$

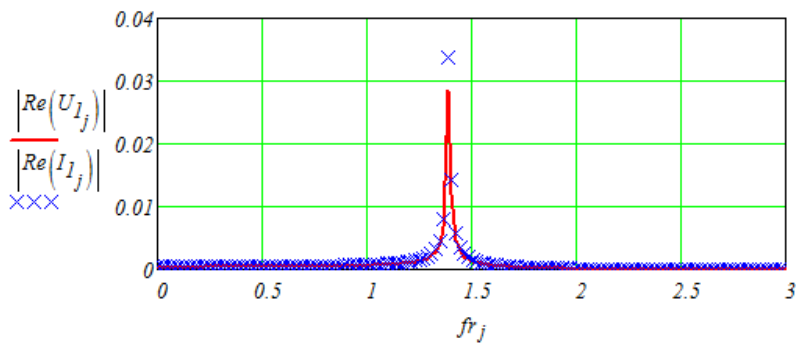
$$I_1 := \text{fft}(x_1(t)) \quad I_2 := \text{fft}(x_2(t)) \quad I_3 := \text{fft}(x_3(t)) \quad I := \text{fft}(x(t))$$

- The first wave form

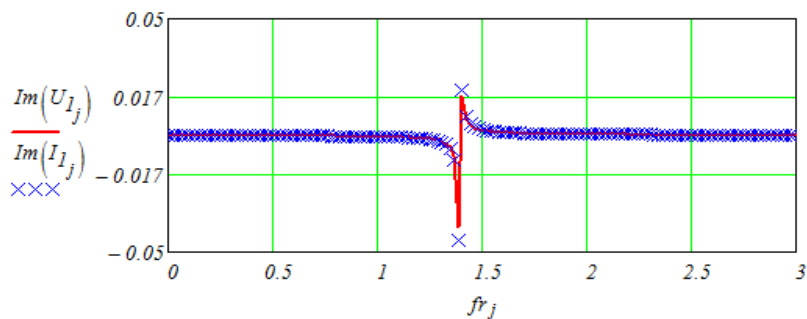
- Први таласни облик



Слика 5 – Померања 1Д модел (побуда – одзив) првог таласног облика
Figure 5 – Displacement 1D model (excitation – response) from the first waveform



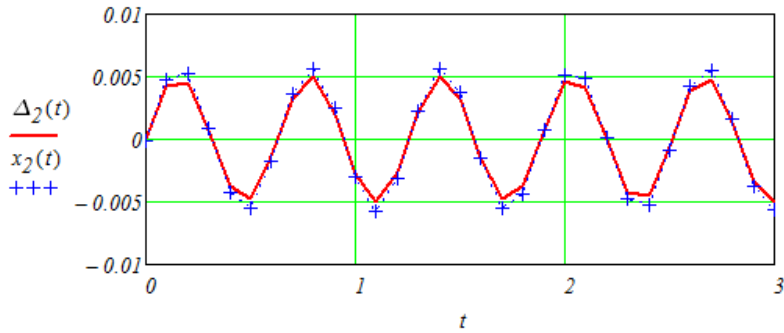
Слика 6 – Реални део – амплитуда померања првог таласног облика
Figure 6 – Real part – displacement amplitude of the first waveform



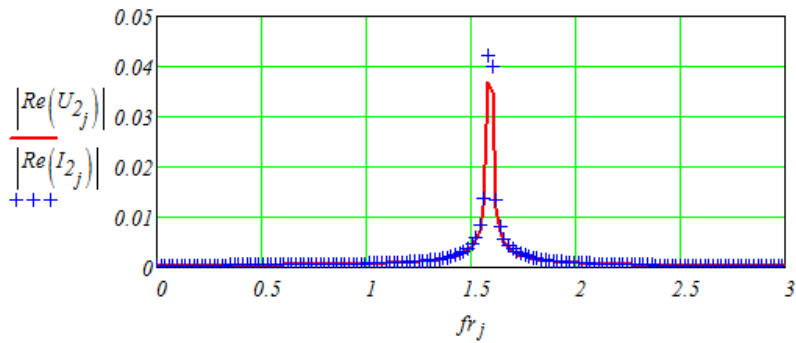
Слика 7 – Имагинарни део – амплитуда померања првог таласног облика
Figure 7 – Imaginary part – displacement amplitude of the first waveform

- The second wave form

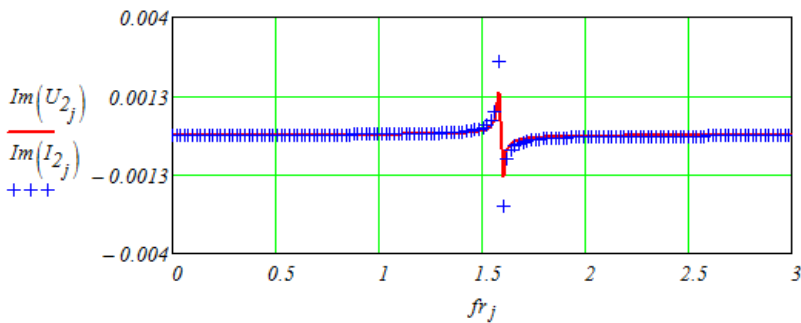
- Други таласни облик



Слика 8 – Померања 1Д модел (побуда – одзив) другог таласног облика
Figure 8 – Displacement 1D model (excitation – response) from the second waveform



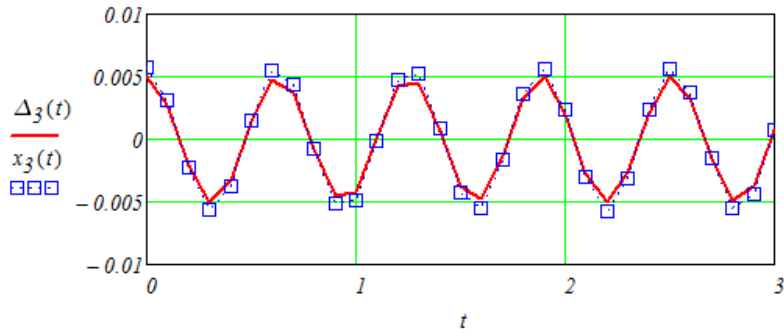
Слика 9 – Реални део – амплитуда померања другог таласног облика
Figure 9 – Real part – displacement amplitude of the second waveform



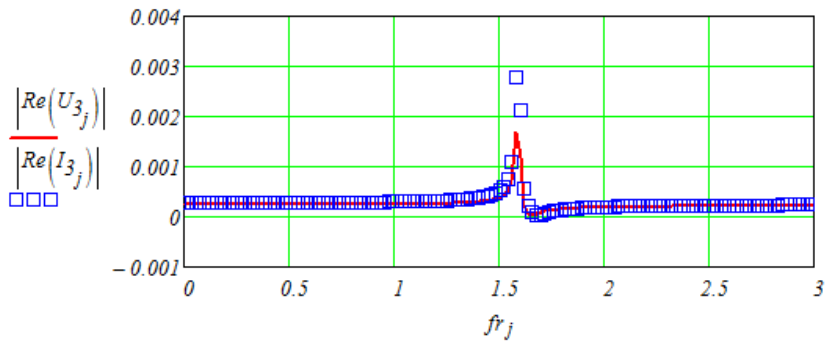
Слика 10 – Имагинарни део – амплитуда померања другог таласног облика
Figure 10 – Imaginary part – displacement amplitude of the second waveform

- The third wave form

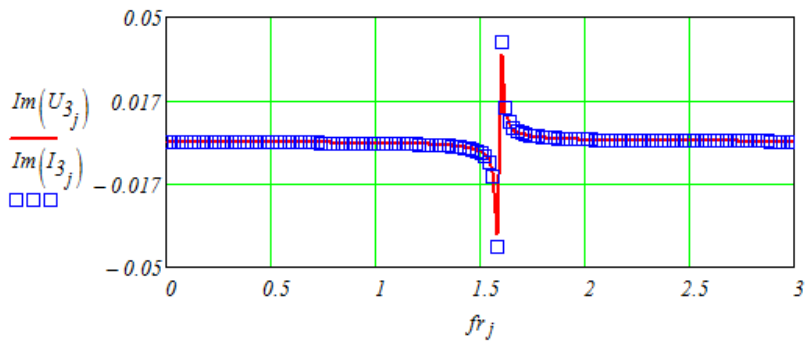
- Трећи таласни облик



Слика 11 – Померања 1Д модел (побуда – одзив) трећег таласног облика
Figure 11 – Displacement 1D model (excitation – response) from the third waveform

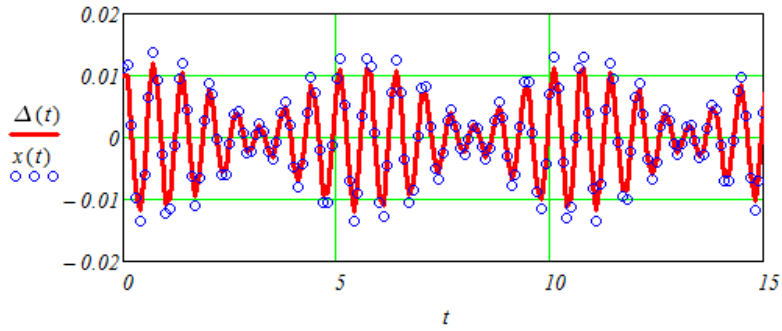


Слика 12 – Реални део – амплитуда померања трећег таласног облика
Figure 12 – Real part – displacement amplitude of the third waveform

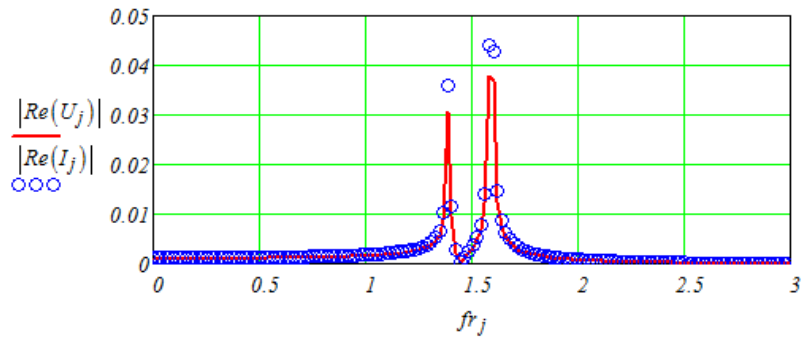


Слика 13 – Имагинарни део – амплитуда померања трећег таласног облика
Figure 13 – Imaginary part – displacement amplitude of the third waveform

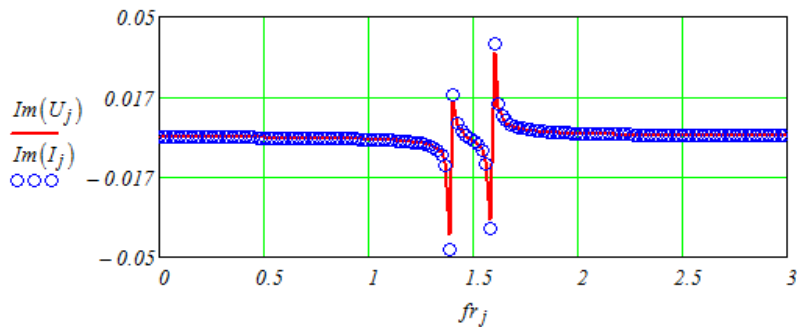
- Superposition of wave forms
- Суперпозиција таласних облика



Слика 14 – Померања 1Д модел (побуда – одзив)
Figure 14 – Displacement 1D dynamic model (excitation – response)



Слика 15 – Реални део – амплитуда померања
Figure 15 – Real part – displacement amplitude



Слика 16 – Имагинарни део – амплитуда померања
Figure 16 – Imaginary part – displacement amplitude

5. CONCLUSION

Based on the conducted computer simulation with imposed external dynamic action – loading with three frequencies of external displacement amplitudes, it is shown that:

- the number of members of the order at FFT is not an important factor in this harmonic analysis,
- the jittering state of the "beating" was successfully simulated, indicating that this possible state of oscillatory movement is in correspondence with the proposed transfer function „response – excitation“,
- applied mathematical modeling with a 1D model with MathCAD application and with a smaller number of members of the Fourier transform order gives very good results,
- considered FFT in both domains (temporal and frequency) with the presented functions of real (Fig. 6, 9, 12 and 15) and imaginary parts (Fig. 7, 10, 13 and 16) of individual displacement solutions are registered by „peaks“ at the places of the first, the second and third frequencies of model excitation.

5. ЗАКЉУЧАК

На основу спроведене рачунарске симулације са наметнутим спољашњим динамичким дејством – оптерећењем са три учестаности амплитуда спољашњег померања показано је да:

- број чланова реда при ФФТ није битан фактор у овој хармонијској анализи,
- стање подрхтавања "бијења" успешно се симулирало, што показује да је и то могуће стање осцилаторног кретања у кореспонденцији са предложеном преносном функцијом „одзив – побуда“,
- примењено математичко моделирање 1Д моделом са апликацијом MathCAD и са мањим бројем чланова реда Фуријеве трансформације даје веома добре резултате,
- разматрана ФФТ у оба домена (временском и фреквентном) са приказаним функцијама реалних (сл. 6, 9, 12 и 15) и имагинарних делова (сл. 7, 10, 13 и 16) појединачних решења за померања региструје „пикове“ на местима прве, друге и треће учестаности побуде модела.

REFERENCES

- [1] Vlajić, Lj. M., Miličić, I.M., Prokić, A. D.: Eksperimentalna analiza dinamičkih uticaja spregnute konstrukcije u fabrici "Banini a.d." u Kikindi, DOI:10.14415/konferencijaGFS 2014.013, Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Međunarodna konferencija "Savremena dostignuća u građevinarstvu", **2014.**, str. 107-116
- [2] Miličić, M.I., Romanić, J.M.: Teorijska analiza dinamičkih uticaja 1D modela pobuđenog dejstvom spoljašnjih pomeranja, Savremena dostignuća u građevinarstvu (3; Subotica; **2015**), ISBN 978-86-80297-62-0, str. 341-350
- [3] Miličić, M.I, Lađinović, Đ.: Računarska simulacija odziva dvo frekventne pobude 1D dinamičkog modela primenom FFT i IFFT algoritma, Savremena dostignuća u građevinarstvu (4; Subotica; **2016**), ISBN 978-86-80297-63-7, str. 239-248
- [4] Miličić, M.I., Prokić, A., Folić, R.: Matematičko modeliranje odziva 1D modela sa otporom podloge primenom Furijeve transformacije, Međunarodno naučno-stručno savetovanje Zemljotresno inženjerstvo i inženjerska seizmologija (5; Sremski Karlovci; **2016**), ISBN 978-86-88897-08-2, str. 273-282
- [5] Miličić, M.I, Prokić, A, Lađinović, Đ.: Computer simulation of the order frequencies amplitudes excitation on response dynamic 1D models, Conference proceedings 5th international conference contemporary achievements in civil engineering **2017**, DOI:10.14415/konferencijaGFS2017.032, ISBN 978-86-80297-68-2, pp. 311-320

- [6] Miličić, M.I, Lađinović, Đ, Miličić, I.I.: Computer simulation 1D model excited of two frequent by the action of external displacemnt – part 1, Conference proceedings 6th international conference contemporary achievements in civil engineering **2018**, DOI:10.14415/konferencijaGFS2018.016, ISBN 978-86-80297-73-6, pp. 183-192
- [7] Miličić, M.I, Prokić, A., Folić, R.: Computer simulation 1D model excited of two frequent by the action of external displacemnt – part 2, Conference proceedings 6th international conference contemporary achievements in civil engineering **2018**, DOI:10.14415/konferencijaGFS2018.017, ISBN 978-86-80297-73-6, pp. 193-202
- [8] Miličić, M.I.: Mehanika 2, Građevinski fakultet Subotica, ISBN 978-86-80297-75-0, COBISS.SR-ID 325232391, Print – graf, Kikinda, **2018**,
- [9] Prokofjev, I.P., Smirnov, A.F.: Teorija konstrukcija III deo, Građevinska knjiga, Beograd, 1961.
- [10] Wilson, E.L.: Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, ISBN 0-923907-00-9, Third Edition, Berkeley, California, USA, 2012.
- [11] Tang, K.T.: Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3, ISBN-10 3-540-44695-8 Springer Berlin Heidelberg New York, **2007**.
- [12] PTC, Mathcad 14.0, User's Guide (pdf), February **2007**.