

# SPECTRAL ANALYSIS OF TWO FREQUENCY RESPONSE OF THE 1D MODEL IN INTERACTION WITH THE FUNCTION OF THE TRANSFER OF „RESPONSE – EXCITATION”

## СПЕКТРАЛНА АНАЛИЗА ДВО ФРЕКВЕНТНОГ ОДЗИВА 1Д МОДЕЛА У ИНТЕРАКЦИЈИ СА ФУНКЦИЈОМ ПРЕНОСА „ОДЗИВ – ПОБУДА”

Ilija M. Miličić<sup>1</sup>  
Milan Kekanović<sup>2</sup>  
Viktorija Aladžić<sup>3</sup>

UDK: 004.942:531.3  
DOI: 10.14415/zbornikGFS36.01  
CC-BY-SA 4.0 license

**Summary:** In this paper, an excitation with two different frequencies of displacement amplitudes outside the resonant region is imposed on a 1D dynamic model with resistance of the substrate. Applying FFT algorithms with MathCAD applications, are treated displacement amplitudes in the frequency and time domains respect the mapping suggested by the transfer function (I.M.Miličić, 2015).

Conducted computer simulations confirmed that the harmonic response of a 1D dynamic model system can be successfully modeled based on the demonstrated equivalent solution.

**Keywords:** Simulation, dynamic model, equivalent solution, transfer function, displacement.

### 1. INTRODUCTION

This spectral analysis treats the classical method of time – shifting analysis based on Fourier transform. The physical process of registering an observed size in a given cross section on a support in structural engineering is treated as in electrical engineering by the notion of a signal (hence, the

**Резиме:** У овом раду је 1Д динамичком моделу са отпором подлоге, наметнута побуда са две различите учестаности амплитуда померања изван резонантног подручја. Примењујући алгоритме ФФТ са апликацијом MathCAD, третиране амплитуде померања у фреквентном и временском домену респектују пресликавање предложено функцијом преноса (И.М.Миличић, 2015). Спроведеним рачунарским симулацијама потврђено је да се хармонијски одзив система 1Д динамичког модела може успешно моделирати на основу овде показаног еквивалентног решења.

**Кључне речи:** Симулација, динамички модел, еквивалентно решење, функција преноса, померања.

### 1. УВОД

У овој спектралној анализи третира се класичан метод анализе промене угиба у времену базиран на Фуријеовој трансформацији. Физички процес регистровања опажане величине у одређеном пресеку на носачу у грађевинском конструкторству се као у електротехници третира појмом

<sup>1</sup> Ilija M. Miličić, PhD, CE, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, 24000 Subotica, Serbia, e – mail: [milicic@gf.uns.ac.rs](mailto:milicic@gf.uns.ac.rs)

<sup>2</sup> Milan Kekanović, PhD, CE, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, 24000 Subotica, Serbia

<sup>3</sup> Viktorija Aladžić, PhD, University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica, Kozaračka 2a, 24000 Subotica, Serbia

deflection change) based on duration and spread in space and / or time.

In technical science, the notion of signal and processing of them (one, two or more analyzes) is closely linked to the notion of information.

Such information is the measurement data or the result of testing – monitoring. Time domain signal analysis involves graphically displaying a single parameter or reading a specific size contained in a signal by observing its temporal regularity.

For example, if it is necessary to register temperatures in a sample of material, then the record itself is a function of the information signal, since further analysis of obtained signal is not necessary.

On the other hand, if we look at the time-lapse record at one point on the carrier, it is very difficult to draw a conclusion about the carrier (statically determined or statically indeterminate), and especially to obtain information on the mass, damping or stiffness of the carrier as a whole.

Therefore, monitoring based on signal analysis requires the introduction of a signal model, which presents in a mathematically clear way the overall information that the signal carries, without going into the problem of extracting useful parameters and reading sizes when measuring.

This method of signal modeling is in line with practical experience that by using appropriate sensors, we can convert an arbitrary signal into a form suitable for further processing or analysis.

Depending on the number of variables in the signal, we have one-dimensional signals, which depend on one variable and multidimensional signals, which depend on several variables. In addition to these, we also have continuous and discrete signals.

We emphasize on discrete signals because, unlike continuous signals, they have the domain of a set of real numbers and are defined solely on a finite number of sets.

сигнала (дакле, промена угиба) на основу трајања и распрострања у простору и/или времену.

У техничким дисциплинама појам сигнала и његова обрада (једна, две или више анализа) се уско везује за појам информације.

Таква информација је податак мерења или резултат тестирања – мониторинга. Анализа сигнала у временском домену подразумева графички приказ једног параметра или читање конкретне величине садржане у сигналу посматрањем његове временске законитости.

На пример, ако је потребно регистровати температуре у неком узорку материјала, тада је сам запис функције – сигнала информација јер даља анализа тако добијеног сигнала није неопходна.

Са друге стране ако посматрамо временски запис угиба у једној тачки на носачу, веома је тешко извући закључак о каквом се носачу ради (статички одређеном или статички неодређеном), а поготову добити информацију колика је маса, пригушење или крутост носача као целине.

Према томе, на основу мониторинга у анализи сигнала захтева се увођење модела сигнала, где се на математички јасан начин представља укупна информација коју сигнал носи, не улазећи у проблем издвајања корисних параметара и величина читања при мерењу.

Овакав начин моделирања сигнала у складу је са практичним искуством да применом одговарајућих сензора, произвољни сигнал можемо претворити у облик погодан за даљу обраду, односно анализу.

У зависности од броја променљивих у сигналу уводи се подела на једнодимензионалне сигнале, који зависе од једне променљиве и вишедимензионалне сигнале, који зависе од више променљивих. Поред ових наведених, имамо још и континуалне и дискретне сигнале.

That is, the basic properties of a discrete signal are defined by analogy with continuous signals.

On the other hand, if the subdomain of discrete signal is a finite set then it is a digital signal.

Practice shows that there are a large number of signals that are inherently discrete (digital).

Нагласимо и задржимо се на дискретним сигнаlima, због тога што они за разлику од континуалних сигнала имају домен скуп реалних бројева и дефинисани су искључиво на коначном броју скупова. Односно, основне особине дискретног сигнала дефинишу се по аналогији са континуалним сигнаlima. С друге стране, уколико је поддомен дискретног сигнала коначан скуп онда је то дигитални сигнал.

Закључимо да у пракси постоји велики број сигнала који су по својој природи дискретни (дигитални).

## 2. MATHEMATICAL MODELING

Let us start from equation (9) from [1], whose solution is given by the product of measured deflections and the response function of the „response-excitation” ( $X_i$  = the amplitude of the deflection of the model) and its frequency  $\Omega_i$  and equal to the frequency of the external excitation.

$$x(t) = \underbrace{A_i P(\psi_i)}_{X_i} \cdot \cos(\Omega_i t + \theta_i) \quad (1)$$

The peculiarity of this research is that the given solution (1) is simulated by a mathematically equivalent solution that can be represented by a single function in exponential form,

$$e^{\pm i\Omega t}$$

with coefficients

$$\bar{X} = A + iB$$

and

$$\bar{X}^* = A - iB$$

are the complex constant  $\bar{X}^*$  is called the complex conjugate of  $\bar{X}$ .

## 2. МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

Пођимо од једначине (9) из [1], чије решење је дато производом мерених угиба и функције преноса „одзив – побуда” ( $X_i$  = амплитуда угиба модела) и њене учестаности  $\Omega_i$  једнака учестаности спољашње побуде.

Посебност овог истраживања је да се дато решење (1) симулира математички еквивалентним решењем које можемо представити једном функцијом у експоненцијалном облику,

са коефицијентима

и

где је  $\bar{X}^*$  комплексна константа, а  $\bar{X}$  њој коњугована комплексна.

When equation (1) is presented as the sum of the individual model responses:

$$x(t) = a \cdot \cos(\Omega t + \theta) + b \cdot \sin(\Omega t + \theta) \quad (2)$$

then the equivalent solution is in exponential form:

$$x(t) = \bar{X} \cdot e^{i\Omega t} + \bar{X}^* \cdot e^{-i\Omega t} \quad (3)$$

Establishing the connection between (1) and (2), it is necessary to further apply the addition theorems of the sum of two angles,

$$X \cdot \cos(\Omega t + \theta) = X \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\Omega t) - X \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\Omega t) \quad (4)$$

whereby, now combining (4) and (2), we find that:

$$\begin{aligned} a &= \bar{X} \cdot \cos(\theta), \\ b &= -\bar{X} \cdot \sin(\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{X}^2 = a^2 + b^2, \text{ respectively } - \text{ odnosno } \bar{X} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

then the phase shift,

тада је фазно померање,

$$\operatorname{tg}(\theta) = -\frac{b}{a} = -\frac{(-\bar{X}) \cdot \sin(\theta)}{\bar{X} \cdot \cos(\theta)} \quad (6)$$

whereby, establishing the relation between (2) and (3), it is found that

при чему се, успостављајући везу између (2) и (3), налази да је

$$\begin{aligned} \bar{X} \cdot e^{i\Omega t} + \bar{X}^* \cdot e^{-i\Omega t} &= \\ &= [A + iB] \cdot [\cos(\Omega t) + i \cdot \sin(\Omega t)] + [A - iB] \cdot [\cos(\Omega t) - i \cdot \sin(\Omega t)] \\ \bar{X} \cdot e^{i\Omega t} + \bar{X}^* \cdot e^{-i\Omega t} &= 2A \cdot \cos(\Omega t) - 2B \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

Therefore, combining equations (7) and (2), we arrive at the following:

Према томе, на крају, комбинујући једначине (7) и (2) долазимо да су:

$$\begin{aligned} a &= 2A, \\ b &= -2B, \\ \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{B}{A} \end{aligned} \quad (8)$$

Thus, we see that the harmonic response of the 1D system of the dynamic model (1) can be successfully modeled and displayed on the basis of an equivalent solution according to (2) and (3).

On the other hand, solution (3) alone may be suitable solely for mathematical modeling and simulation in computer applications.

From all the above, it is clear at a glance that solutions (1) and (2) may be easier and simpler to draw conclusions from the simulations of the treated 1D dynamic model.

Дакле, видимо да се хармонијски одзив система 1Д динамичког модела (1) може успешно моделирати и приказати на основу еквивалентног решења према (2) и (3).

С друге стране, само решење (3) може бити прикладно искључиво за математичко моделирање и спровођење симулација у апликацијама за рад на рачунарима. Према свему овде изнешеном само на први поглед јасно је да су решења (1) и (2) можда лакша и једноставнија за доношење закључака по спроведеним симулацијама третираног 1Д динамичког модела.

### 3. COMPUTER SIMULATION

The input data for the simulation is:  $m$  – mass,  $\xi$  – damping and  $c$  – stiffness.

$$m := 640 \cdot \text{kg}$$

$$\xi := 0.6$$

$$c := 1.0 \cdot 10^5 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Calculation of natural frequency and physical damping of 1D model:

$$\omega := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega = 12.5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$b := 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi \quad b = 9.6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$f_d := \frac{\omega_d}{2 \cdot \pi} \quad T_d := \frac{1}{f_d}$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$f = 1.99 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_d := \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_d = 10.00 \frac{1}{\text{s}}$$

$$T_d = 0.628 \text{ s}$$

$$\frac{T_d}{10} = 0.0628 \text{ s}$$

### 3. РАЧУНАРСКА СИМУЛАЦИЈА

Улазни подаци за симулацију су:  $m$  – маса,  $\xi$  – пригушење и  $c$  – крутост.

Срчунавање природне учестаности и физичког пригушења 1Д модела:

two-frequency model excitation

дво фреквентна побуда модела

$$A_1 := 0.05 \cdot m$$

$$A_2 := 0.05 \cdot m$$

$$\Omega_1 := \frac{1.0}{10} \cdot \omega$$

$$\Omega_2 := \frac{3.0}{10} \cdot \omega$$

- external excitation of the model

- спољашња побуда модела

$$\Delta(t) := A_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t)$$

The general form of the equation of motion of a model

Општи облик једначине кретања модела

$$x(t) = A_i \cdot P(\psi_i) \cdot \cos(\Omega_i \cdot t + \theta_i)$$

superposition of individual responses

суперпозиција појединачних одзива

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t + \theta_2)$$

response amplitude

амплитуда одзива

$$X_i = \frac{c}{c} \cdot A_i \cdot P(\psi_i)$$

disorder coefficient

коэффициент поремећаја

$$\psi_i = \frac{\Omega_i}{\omega} \quad i = 1, 2.$$

transfer function „response – excitation”

преносна функција „одзив – побуда”

$$P(\psi) := \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}}$$

Amplitude calculation for:

Срачунавање амплитуда за:

- first response

- први одзив

$$\psi_1 := \frac{\Omega_1}{\omega}$$

$$\psi_1 = 0.1$$

$$P(\psi_1) = 1.003$$

$$\theta_1 := \theta(\psi_1)$$

$$X_1 := \frac{c}{c} \cdot A_1 \cdot P(\psi_1) \quad X_1 = 0.0501 \text{ m} \quad \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} = -6.9112$$

- second response

- други одзив

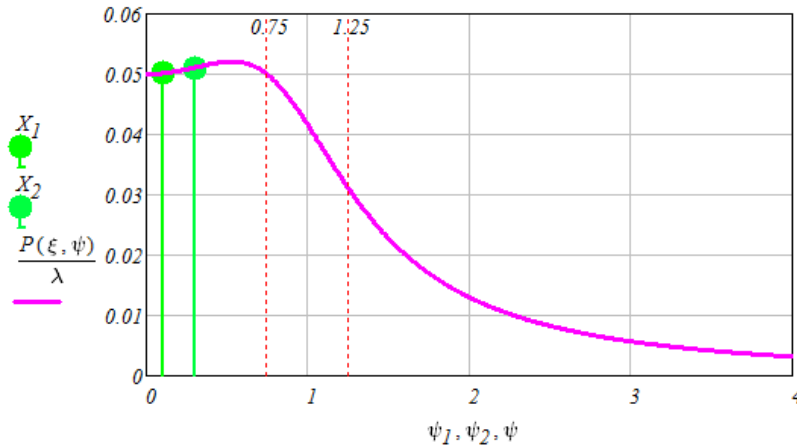
$$\psi_2 := \frac{\Omega_2}{\omega}$$

$$\psi_2 = 0.3$$

$$P(\psi_2) = 1.022$$

$$\theta_2 := \theta(\psi_2)$$

$$X_2 := A_2 \cdot P(\psi_2) \quad X_2 = 0.0511 \text{ m} \quad \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} = -21.584$$



Слика 1 – Амплитуде одзива 1Д модела  
Figure 1 – 1D Model response amplitudes

#### 4. SPECTRAL ANALYSIS

##### Parameterd of spectral analysis:

Number of Data Points Sampled (binary number.)

$$N_{ww} := 2^{11} \quad N = 2048$$

Dwell Time

$$DW := 0.10 \cdot sec$$

Acquisition Time

$$AT := DW \cdot N$$

Spectral Window

$$SW := \frac{1}{2 \cdot DW}$$

Digital Resolution

$$Resolution := \frac{1}{AT} \quad Resolution = 4.883 \times 10^{-3} \cdot Hz$$

Time index (Fig. 2-2)

$$i := 0, 1 \dots (N - 1) \quad t_i := i \cdot DW$$

Frequency index (Fig. 2-1)

$$j := 0, 1 \dots \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \quad fr_j := \frac{j}{N \cdot DW}$$

#### 4. СПЕКТРАЛНА АНАЛИЗА

##### Параметри спектралне анализе:

Број узоркованих података (бинарни број.)

Подеок времена трајања

Време регистровања података

$$AT = 204.8 s$$

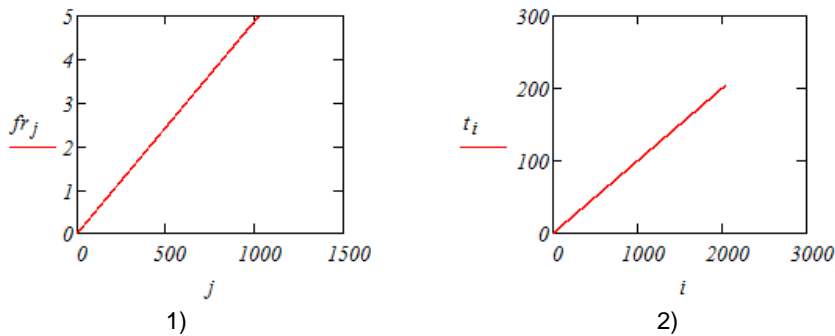
„Прозор” спектра сигнала

$$SW = 5 \cdot Hz$$

Резолуција приказа

Индекс времена (сл. 2-2)

Индекс фреквенције (сл. 2-1)



Слика 2 – Коришћени индекси у спектралној анализи  
Figure 2 – Indexes used in spectral analysis

**Calculation of wave forms:**

the first wave of excitation (Fig. 3)

$$\Delta_1(t) := A_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t)$$

the second wave of excitation (Fig. 6)

$$\Delta_2(t) := A_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t)$$

Wave form of excitation (Fig. 9),

$$\Delta(t) := \Delta_1(t) + \Delta_2(t)$$

the first wave of response,  $\varphi=0$ , (Fig. 3)

$$x_1(t) := X_1 \cdot \cos \left[ \Omega_1 \cdot t + \left( \theta_1 \frac{\pi}{180} + \varphi \right) \right]$$

the second wave of response,  $\varphi=0$ , (Fig. 6)

$$x_2(t) := X_2 \cdot \sin \left[ \Omega_2 \cdot t + \left( \theta_2 \cdot \frac{\pi}{180} + \varphi \right) \right]$$

Wave form of response (Fig. 9),

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t)$$

Fourier Transform – FFT: Frequency domain (spectrum) simulation

**Срчунавање таласних облика:**

побуда – први таласни облик (сл. 3)

побуда – други таласни облик (сл. 6)

Таласни облик побуде (сл. 9),

одзив – први таласни облик,  $\varphi=0$ , (сл. 3)

одзив – други таласни облик,  $\varphi=0$ , (сл. 6)

Таласни облик одзива (сл. 9),

ФФТ трансформација: Симулација у фреквентном домену

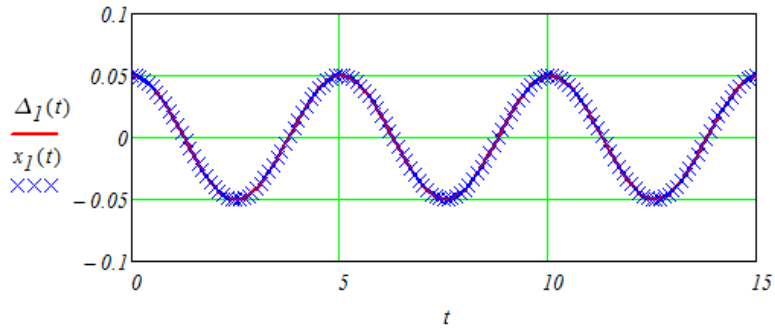
$$U := \text{fft}(\Delta(t))$$

$$I := \text{fft}(x(t))$$

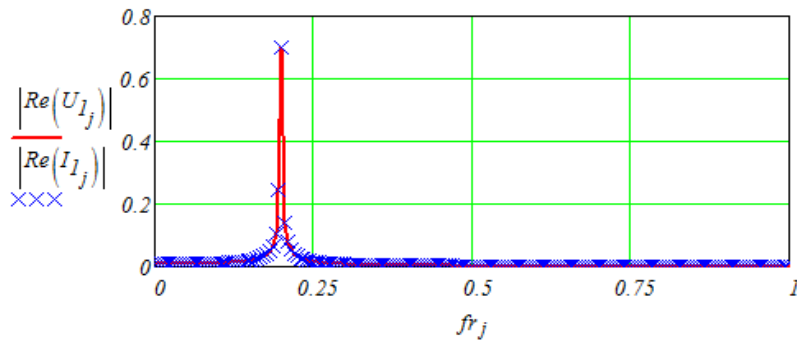


- The first wave form

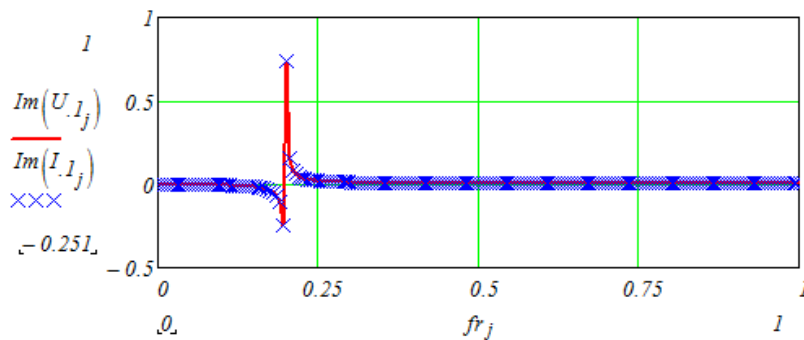
- Први таласни облик



Слика 3 – Померања 1Д модел (побуда – одзив) првог таласног облика  
Figure 3 – Displacement 1D model (excitation – response) from the first waveform



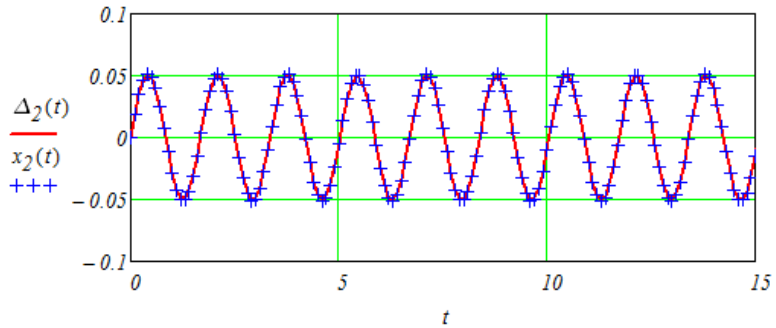
Слика 4 – Реални део – амплитуда померања првог таласног облика  
Figure 4 – Real part – displacement amplitude of the first waveform



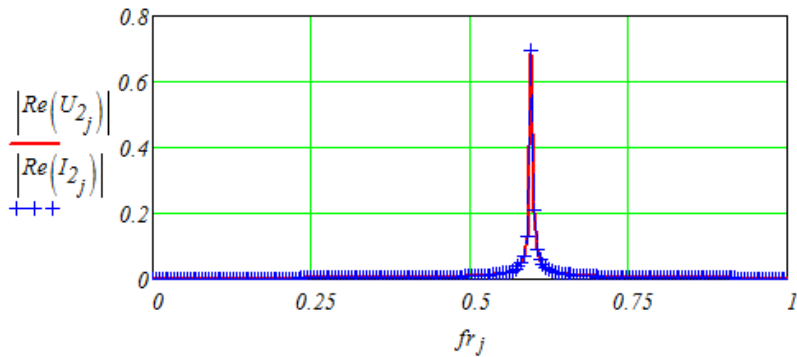
Слика 5 – Имагинарни део – амплитуда померања првог таласног облика  
Figure 5 – Imaginary part – displacement amplitude of the first waveform

- The second wave form

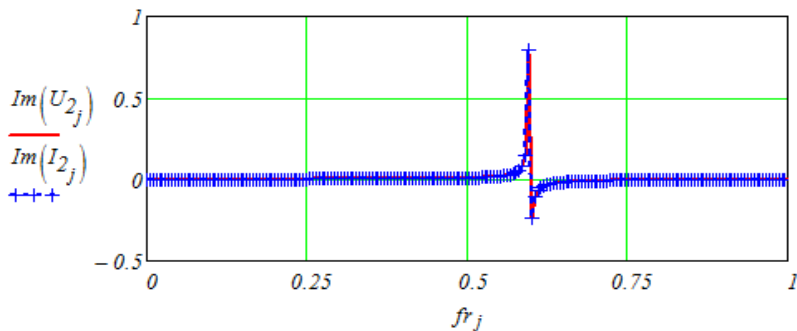
- Други таласни облик



Слика 6 – Померања 1Д модел (побуда – одзив) другог таласног облика  
Figure 6 – Displacement 1D model (excitation – response) from the second waveform

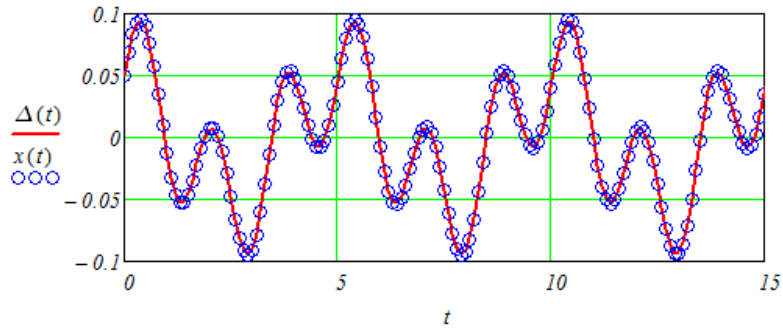


Слика 7 – Реални део – амплитуда померања другог таласног облика  
Figure 7 – Real part – displacement amplitude of the second waveform

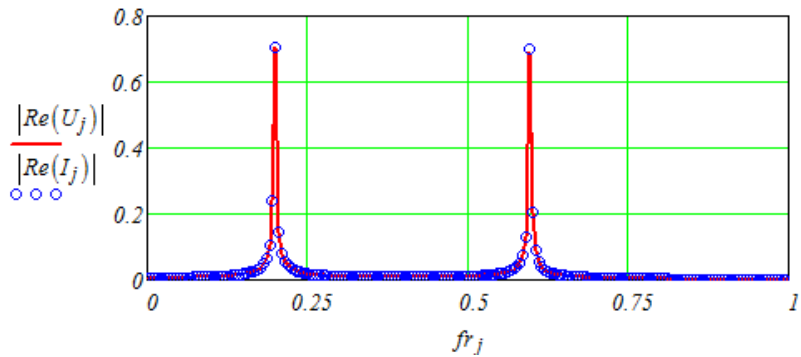


Слика 8 – Имагинарни део – амплитуда померања другог таласног облика  
Figure 8 – Imaginary part – displacement amplitude of the second waveform

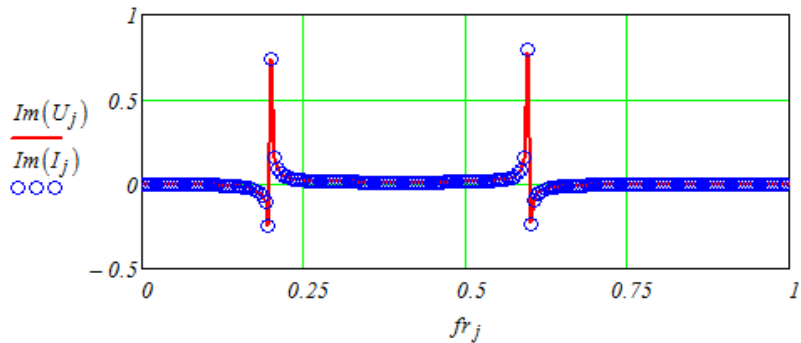
- Superposition of wave forms
- Суперпозиција таласних облика



Слика 9 – Померања 1Д модел (побуда – одзив)  
Figure 9 – Displacement 1D dynamic model (excitation – response)



Слика 10 – Реални део – амплитуда померања  
Figure 10 – Real part – displacement amplitude



Слика 11 – Имагинарни део – амплитуда померања  
Figure 11 – Imaginary part – displacement amplitude

## 5. CONCLUSION

Based on the conducted computer simulation with imposed external dynamic effect - one load of two-frequency character, it is shown that:

- the number of members of the order in the implementation of the FFT is not an important factor,
- mathematical modeling with the MathCAD application and with a larger number of Fourier transform order members compared to the „pedestrian procedure” does not show any deviation for the treated displacement magnitude,
- considered FFT in both domains (time and frequency) with a treated response function in the response composed of real (Fig. 4,7,10) and imaginary (Fig. 5,8,11) parts of the total and individual displacement solutions, registers „peaks” at the sites of the first and second frequency of excitation – 1D dynamic signal model.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The published results in this paper are the scientific contributions of the first author, who on this occasion wish to thank all his co-authors so far who took a part in the preparation of this article as well as other papers already published on the proposed topic.

Special thanks to the Head of Static and Dynamic Testing [1], Prof. dr Lj. Vlajić, on the opportunity to participate in the realization of this joint work and personally obtain the measurement results for myself so that I can continue to research independently.

Therefore, I successfully tested the results with the help of the portable response-excitation function from 2004 to the present.

## 5. ЗАКЉУЧАК

На основу спроведене рачунарске симулације са наметнутим спољашњим динамичким дејством – једним оптерећењем двофреквентног карактера, показано је да:

- број чланова реда при спровођењу ФФТ није битан фактор,
- математичко моделирање применом апликације MathCAD и са већим бројем чланова реда Фуријеве трансформације у односу на „пешке поступак” не показује никаква одступања за третирану величину померања,
- разматрана ФФТ у оба домена (временском и фреквентном) са третираном функцијом преноса у одзиву састављеног од реалних (сл. 4,7,10) и имагинарних (сл. 5,8,11) делова укупног и појединачних решења за померања, региструје „пикове” на местима прве и друге учестаности побуде – улазног сигнала 1Д динамичког модела.

## ЗАХВАЛНИЦА

Публиковани резултати у овом раду је научни допринос првог аутора, који се овом приликом жели захвалити свим својим коауторима до сада који су узели учешће и помогли му око припрема, како овог чланка, тако и осталих већ публикованих радова на предложеној тематици.

Посебно се захваљујем руководиоцу статичког и динамичког испитивања [1], проф. др Љ. Влајићу, на могућности да учествујем у реализацији тог заједничког посла и прибавим лично за себе резултате мерења како би могао наставити самостално да истражујем. Због тога са великим задовољством резултате успешно тестирам уз помоћ преносне функције „одзив – побуда” од 2004. до данас.

## REFERENCES

- [1] Vlajić, Lj.M., Miličić, I.M., Prokić, A.D.: Eksperimentalna analiza dinamičkih uticaja spregnute konstrukcije u fabrici "Banini a.d." u Kikindi, DOI:10.14415/konferencijaGFS2014.013, Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Međunarodna konferencija "Savremena dostignuća u građevinarstvu", **2014.**, str. 107-116
- [2] Miličić, M.I., Romanić, J.M.: Teorijska analiza dinamičkih uticaja 1D modela pobuđenog dejstvom spoljašnjih pomeranja, Savremena dostignuća u građevinarstvu (3; Subotica; **2015** ), ISBN 978-86-80297-62-0, str. 341-350
- [3] Miličić, M.I., Lađinović, Đ.: Računarska simulacija odziva dvo frekventne pobude 1D dinamičkog modela primenom FFT i IFFT algoritma, Savremena dostignuća u građevinarstvu (4; Subotica; **2016** ), ISBN 978-86-80297-63-7, str. 239-248
- [4] Miličić, M.I., Prokić, A., Folić, R.: Matematičko modeliranje odziva 1D modela sa otporom podloge primenom Furijeve transformacije, Međunarodno naučno-stručno savetovanje Zemljotresno inženjerstvo i inženjerska seizmologija (5; Sremski Karlovci; **2016** ), ISBN 978-86-88897-08-2, str. 273-282
- [5] Miličić, M.I., Prokić, A., Lađinović, Đ.: Computer simulation of the order frequencies amplitudes excitation on response dynamic 1D models, Conference proceedings 5th international conference contemporary achievements in civil engineering **2017**, DOI:10.14415/konferencijaGFS2017.032, ISBN 978-86-80297-68-2, pp. 311-320
- [6] Miličić, M.I., Lađinović, Đ., Miličić, I.I.: Computer simulation 1D model excited of two frequent by the action of external displacemnt – part 1, Conference proceedings 6th international conference contemporary achievements in civil engineering **2018**, DOI:10.14415/konferencijaGFS2018.016, ISBN 978-86-80297-73-6, pp. 183-192
- [7] Miličić, M.I., Prokić, A., Folić, R.: Computer simulation 1D model excited of two frequent by the action of external displacemnt – part 2, Conference proceedings 6th international conference contemporary achievements in civil engineering **2018**, DOI:10.14415/konferencijaGFS2018.017, ISBN 978-86-80297-73-6, pp. 193-202
- [8] Miličić, M.I.: Mehanika 2, Građevinski fakultet Subotica, ISBN 978-86-80297-75-0, COBISS.SR-ID 325232391, Print – graf, Kikinda, **2018**,
- [9] Wilson, E.L.: Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, ISBN 0-923907-00-9, Third Edition, Berkeley, California, USA, 2012.
- [10] Tang, K.T.: Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3, ISBN-10 3-540-44695-8 Springer Berlin Heidelberg New York, **2007**.
- [11] PTC, Mathcad 14.0, User's Guide (pdf), February **2007**.