

РЕЈЛИЈЕВИ ТАЛАСИ - ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА ТАЛАСНОГ БРОЈА

Љиљана Тадић¹

УДК: 537,877

DOI: 10.14415/zbornikGFS29.01

Резиме: У раду се анализира зависност таласног броја Рејлијевих таласа од појединих материјалних константи тла, односно фреквенције таласа. Основу ове анализе представља дискретан облик динамичке матрице крутости тла формулисана на основу Ц. П. Волфовог решења таласне једначине. Модел за анализу чини хоризонтално услојено тло над крутом базом. За потребе дате анализе написан је програм за рачунар у Матлабу.

Кључне речи: Рејлијеви таласи, таласни број, динамичка матрица крутости, бездимензионална фреквенција

1. УВОД

При динамичкој анализи од велике важности је правилно моделирање тла, јер неправилно моделирање дела тла које улази у динамички прорачун може резултирати добијањем погрешне слике одзива анализираних система. Да би се тло правилно моделирало потребно је познавати и његове динамичке карактеристике, односно потребно је правилно одабрати све параметре тла који улазе у анализу. Осим правилног моделирања и добијања поузданих резултата, добар модел мора бити, у довољној мери, и једноставан за практичну примену. С обзиром на то да таласни број фигурише у динамичкој матрици крутости тла, да би се дошло до израза погодног за једноставно изнаглажење таласног броја, у овом раду полази се од динамичке једначине вибрација неоптерећеног система слојева тла (претпоставља се да нема извора таласа). Како се овде анализира таласни број Рејлијевих таласа, примењује се динамичка матрица крутости тла у дискретном облику, јер је она, за ову врсту таласа, нарочито код система који се састоје од већег броја слојева, једноставнија за примену, од оне написане у тачном облику.

2. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

Рејлијеви таласи

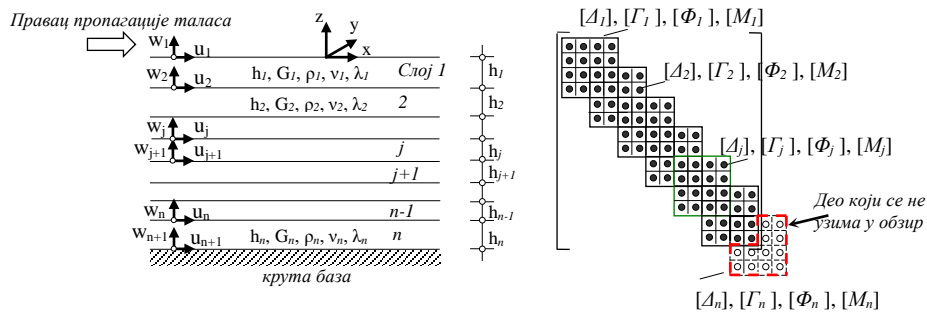
Површински таласи су доминантни у деловима тла који се налазе на релативно малој дубини, док се на дубини од неколико таласних дужина од слободне површине могу занемарити. Простиру се у виду Рејлијевих или као Лавови таласи.

¹мр Љиљана Тадић, дипл. инж. грађ., Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, тел: 024/554-300, имејл: tadic@gf.uns.ac.rs

Рејлијеви таласи представљају комбинацију подужних и попречних таласа, а карактерише их осциловање честица материје по елиптичној путањи, која лежи у вертикалној равни, управној на правац пропагације таласа. Бројна истраживања су показала да се овом врстом таласа преноси две трећине енергије кретања, што значи да њихов утицај у анализама није занемарљив.

Динамичка матрица крутости тла, својствене вредности, таласни број

Динамичка матрица крутости система састављеног од више слојева тла (Слика 1а), формира се, према уобичајеним принципима Методе коначних елемената, а на основу динамичке матрице крутости једног слоја тла. Дискретан облик динамичке матрице крутости слоја, који се користи у овом раду, добијен је линеаризацијом² динамичке матрице крутости слоја у тачном облику [7] и то развијањем њених тригонометријских чланова у Тејлоров ред, при чему су задржани само одређени чланови добијеног реда. На овај начин је, уместо тригонометријске везе између померања и сила, добијена линеарна веза између ове две величине, чиме се анализа значајно пједностављује.



Слика 1. (а) Модел хоризонтално услојеног тла над крутом базом, (б) Структура матрице $[K_R]$, односно матрица $[\Delta]$, $[\Gamma]$, $[\Phi]$ и $[M]$

С обзиром на то да таласни број фигурише у динамичкој матрици крутости, да би се дошло до израза погодног за његово једноставно изналагање, полази се од динамичке једначине вибрација неоптерећеног система слојева³:

$$[K_R]\{A\} = \{0\} \quad (1)$$

У једначини (1) је:

$\{A\}$ – вектор компоненти померања система,

$[K_R]$ – динамичка матрица крутости тла у дискретном облику, која осим таласног броја, она садржи и материјалне константе тла:

$$[K_R] = k^2 [\Delta] + k [\Gamma] + [\Phi] - \omega^2 [M] \quad (2)$$

² Линеаризацију је могуће извршити у случајевима када је таласна дужина много већа од висине слоја. [7][8]

³ Претпоставља се да нема извора таласа.

где је:

k – таласни број,

ω – фреквенција таласа,

$[\Delta]$, $[\Gamma]$, $[\Phi]$ и $[M]$ – матрице система слојева гла формиране за усвојени распоред слојева.

Матрица $[K_R]$ је реда $n \times n$, где је n број слојева који чине посматрани систем. Како таласни број има константну вредност за слој, из услова компатибилности између слојева произилази да ће он бити исти за све слојеве.

Матрице $[\Delta]$, $[\Gamma]$, $[\Phi]$ и $[M]$ су тридијагоналне матрице и имају константну вредност. Формирају се, сагласно правилима Методе коначних елемената, од матрица $[\Delta]_j$, $[\Gamma]_j$, $[\Phi]_j$ и $[M]_j$ ($j=1, 2, 3 \dots, n$) појединачних слојева (Слика 1б):

$$[\Delta]_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} \delta_{11,j} & 0 & \delta_{13,j} & 0 \\ 0 & \delta_{22,j} & 0 & \delta_{24,j} \\ \delta_{31,j} & 0 & \delta_{33,j} & 0 \\ 0 & \delta_{42,j} & 0 & \delta_{44,j} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$2\delta_{11,j} = 2\delta_{33,j} = \delta_{13,j} = \delta_{31,j} = \frac{h_j}{6}(\lambda_j + 2G_j), 2\delta_{22,j} = 2\delta_{44,j} = \delta_{24,j} = \delta_{42,j} = \frac{h_j}{6}G_j$$

$$[\Gamma]_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12,j} & 0 & \gamma_{14,j} \\ \gamma_{21,j} & 0 & \gamma_{23,j} & 0 \\ 0 & \gamma_{32,j} & 0 & \gamma_{34,j} \\ \gamma_{41,j} & 0 & \gamma_{43,j} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\gamma_{12,j} = \gamma_{21,j} = \frac{1}{2}(\lambda_j - G_j), \gamma_{14,j} = \gamma_{41,j} = \frac{1}{2}(-\lambda_j - G_j), \gamma_{23,j} = \gamma_{32,j} = \frac{1}{2}(\lambda_j + G_j),$$

$$\gamma_{34,j} = \gamma_{43,j} = \frac{1}{2}(-\lambda_j + G_j)$$

$$[\Phi]_j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} \varphi_{11,j} & 0 & \varphi_{13,j} & 0 \\ 0 & \varphi_{22,j} & 0 & \varphi_{24,j} \\ \varphi_{31,j} & 0 & \varphi_{33,j} & 0 \\ 0 & \varphi_{42,j} & 0 & \varphi_{44,j} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\varphi_{11,j} = \varphi_{33,j} = -\varphi_{31,j} = -\varphi_{13,j} = \frac{1}{h_j}G_j, \varphi_{22,j} = \varphi_{44,j} = -\varphi_{24,j} = -\varphi_{42,j} = \frac{1}{h_j}(\lambda_j + 2G_j)$$

$$[M]_j = \begin{bmatrix} m_{11,j} & 0 & m_{13,j} & 0 \\ 0 & m_{22,j} & 0 & m_{24,j} \\ m_{31,j} & 0 & m_{33,j} & 0 \\ 0 & m_{42,j} & 0 & m_{44,j} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$2m_{11,j} = 2m_{22,j} = 2m_{33,j} = 2m_{44,j} = m_{13,j} = m_{24,j} = m_{31,j} = m_{42,j} = \frac{h_j \rho_j}{6}$$

У (3), (4), (5) и (6), h_j је висина, а λ_j , ρ_j и G_j Ламеова константа, густина и модул смицања слоја j , тј.:

$$G_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}, \quad \lambda = \frac{E_j \nu_j}{(1-2\nu_j)(1+\nu_j)} = \frac{2G_j \nu_j}{(1-2\nu_j)}, \quad E_j = 2G_j(1+\nu_j)$$

где је ν_j Поасонов коефицијент, E_j Јунгов модул еластичности слоја j .

Као што се из горњих израза види, матрице $[\Delta]_j$, $[\Gamma]_j$, $[\Phi]_j$ и $[M]_j$ зависе само од материјалних константи (G_j , λ_j , ρ_j) и од висине слоја (h_j), и имају константну вредност.

Уврштавањем израза (2) у израз (1) добија се једначина:

$$(k^2[\Delta] + k[\Gamma] + [\Phi] - \omega^2[M])\{A\} = \{0\} \quad (7)$$

Добијена једначина представља квадратни проблем својствених вредности по k , за задату кружну фреквенцију таласа.

Ако се у систему једначина (7) изврши раздвајање у смислу да се најпре поставе једначине равнотеже за силе у правцима хоризонталних померања (у правцу x осе), а онда за оне у правцима вертикалних померања (у правцу z осе), изналажење својствених вредности значајно се поједностављује, јер се уместо квадратног добија линеарни проблем својствених вредности. Наведено раздвајање је могуће извршити с обзиром на структуру матрица $[\Delta]_j$, $[\Gamma]_j$, $[\Phi]_j$ и $[M]_j$, тј. матрица $[\Delta]$, $[\Gamma]$, $[\Phi]$ и $[M]$.

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \Delta_x & 0 \\ 0 & \Delta_z \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{zx}^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 \\ 0 & \Theta_z \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_x \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

тј.:

$$\begin{bmatrix} k^2 \Delta_x + \Theta_x & k \Gamma_{xz} \\ k \Gamma_{zx} & k^2 \Delta_z + \Theta_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

У систему једначина (8), односно у систему једначина (9), уведено је следеће обележавање:

$\{A_x\}$ – вектор компоненти померања у правцу x осе,

$\{A_z\}$ – вектор компоненти померања у правцу z осе,

$$[\Theta]_x = [\Phi]_x - \omega^2 [M]_x \quad (10)$$

$$[\Theta]_z = [\Phi]_z - \omega^2 [M]_z$$

Матрице $[\Delta]_x$, $[\Delta]_z$, $[\Gamma]_{xz}$, $[\Gamma]_{zx}$, $[\Theta]_x$, $[\Theta]_z$, $[M]_x$ и $[M]_z$ су матрице система слојева формиране од субматрица $[\Delta]_{x,j}$, $[\Delta]_{z,j}$, $[\Gamma]_{xz,j}$, $[\Gamma]_{zx,j}$, $[\Theta]_{x,j}$, $[\Theta]_{z,j}$, $[M]_{x,j}$, $[M]_{z,j}$ матрица $[A]_j$, $[B]_j$, $[C]_j$ и $[M]_j$ појединачних слојева:

$$[\Delta]_{x,j} = \begin{bmatrix} \delta_{11,x}^j & \delta_{12,x}^j \\ \delta_{21,x}^j & \delta_{22,x}^j \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$2\delta_{11,x}^j = 2\delta_{22,x}^j = \delta_{12,x}^j = \delta_{21,x}^j = \frac{h_j}{6}(\lambda_j + 2G_j)$$

$$[\Delta]_{z,j} = \begin{bmatrix} \delta_{11,z}^j & \delta_{12,z}^j \\ \delta_{21,z}^j & \delta_{22,z}^j \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$2\delta_{11,z}^j = 2\delta_{22,z}^j = \delta_{12,z}^j = \delta_{21,z}^j = \frac{G_j h_j}{6}$$

$$[\Gamma]_{xz,j} = \begin{bmatrix} \gamma_{11,xz}^j & \gamma_{12,xz}^j \\ \gamma_{21,xz}^j & \gamma_{22,xz}^j \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\gamma_{11,xz}^j = \frac{1}{2}(\lambda_j - G_j), \quad \gamma_{12,xz}^j = \frac{1}{2}(-\lambda_j - G_j), \quad \gamma_{21,xz}^j = \frac{1}{2}(\lambda_j + G_j), \quad \gamma_{22,xz}^j = \frac{1}{2}(-\lambda_j + G_j)$$

$$[\Gamma]_{zx,j} = \begin{bmatrix} \gamma_{11,zx}^j & \gamma_{12,zx}^j \\ \gamma_{21,zx}^j & \gamma_{22,zx}^j \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\gamma_{11,zx}^j = \frac{1}{2}(\lambda_j - G_j), \quad \gamma_{12,zx}^j = \frac{1}{2}(\lambda_j + G_j), \quad \gamma_{21,zx}^j = \frac{1}{2}(-\lambda_j - G_j), \quad \gamma_{22,zx}^j = \frac{1}{2}(-\lambda_j + G_j)$$

$$[\Theta]_{x,j} = [\Phi]_{x,j} - \omega^2 [M]_{x,j} = \begin{bmatrix} \theta_{11,x}^j & \theta_{12,x}^j \\ \theta_{21,x}^j & \theta_{22,x}^j \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\Theta]_{z,j} = [\Phi]_{z,j} - \omega^2 [M]_{z,j} = \begin{bmatrix} \theta_{11,z}^j & \theta_{12,z}^j \\ \theta_{21,z}^j & \theta_{22,z}^j \end{bmatrix} \quad (16)$$

где је:

$$\theta_{11,x}^j = \theta_{22,x}^j = \frac{G_j}{h_j} - \omega^2 \frac{h_j \rho_j}{3}, \quad \theta_{12,x}^j = \theta_{21,x}^j = -\frac{G_j}{h_j} - \omega^2 \frac{h_j \rho_j}{6}$$

$$\theta_{11,z}^j = \theta_{22,z}^j = \frac{1}{h_j} (\lambda_j + 2G_j) - \omega^2 \frac{h_j \rho_j}{3}, \quad \theta_{12,z}^j = \theta_{21,z}^j = -\frac{1}{h_j} (\lambda_j + 2G_j) - \omega^2 \frac{h_j \rho_j}{6}$$

где су $[A]_{xj}$, $[A]_{zj}$, $[\Gamma]_{xzj}$, $[\Gamma]_{zxj}$, $[\Theta]_{xj}$, $[\Theta]_{zj}$, $[M]_{xj}$ и $[M]_{zj}$ матрице $[\Delta]_x$, $[\Delta]_z$, $[\Gamma]_{xz}$, $[\Gamma]_{zx}$, $[\Theta]_x$, $[\Theta]_z$, $[M]_x$ и $[M]_z$ j -тог слоја.

Једначина (9) може се другачије написати:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \Delta_x & 0 \\ \Gamma_{zx} & \Delta_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_x & \Gamma_{xz} \\ 0 & \Theta_z \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_x \\ k\mathbf{A}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

тј.:

$$\left(k^2 [\Lambda] + [\Pi] \right) \{\mathbf{A}\} = \{0\} \quad (18)$$

где је са $[\Lambda]$, $[\Pi]$ и $\{\mathbf{A}\}$ обележено:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \Delta_x & 0 \\ \Gamma_{zx} & \Delta_z \end{bmatrix}, \quad [\Pi] = \begin{bmatrix} \Theta_x & \Gamma_{xz} \\ 0 & \Theta_z \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_x \\ k\mathbf{A}_z \end{Bmatrix}$$

Из једначине (18) даље следи:

$$\left([\Lambda]^{-1} [\Pi] - \chi [I] \right) \{\mathbf{A}\} = \{0\} \quad (19)$$

На овај начин је квадратни проблем својствених вредности (7) по k , сведен на линеарни (19) проблем својствених вредности по χ за дато ω . Услов за постојање нетривијалног решења матричне једначине (19), у којој је $[I]$ јединична матрица, $\{\mathbf{A}\}$ својствени вектор, а $\chi = -k^2$ својствена вредност матрице $([\Lambda]^{-1} [\Pi])$, је сингуларност матрице $([\Lambda]^{-1} [\Pi] - \chi [I])$, тј:

$$\left| [\Lambda]^{-1} [\Pi] - \chi [I] \right| = \{0\} \quad (20)$$

Као решење система једначина (20) добија се $2n$ могућих својствених вредности (χ), које, с обзиром на то да је добијен несиметричан линеарни проблем, могу бити реални и комплексни бројеви. Како је $\chi = -k^2$, тј. $k = \pm \sqrt{-\chi}$, добија се $2n$ могућих таласних бројева (k) и исто толико могућих својствених вектора $\{\mathbf{A}\}$. У зависности од добијених својствених вредности (χ), таласни бројеви (k) могу бити:

- реалани $k = \mathbf{Re}(k)$,
- имагнарани $k = i\mathbf{Im}(k)$ ($i = \sqrt{-1}$) и

- комплексни бројеви $k = \mathbf{Re}(k) + i\mathbf{Im}(k)$,
 док својствени вектори $\{\mathbf{a}\}$, зависно од таласних бројева (k), могу бити реални и
 имагинарни бројеви.

Од $4n$ добијених таласних бројева, такозваним „*incoming*“ таласима (пропагација
 таласа у правцу позитивне x осе) одговара $2n$ таласних бројева, а преосталих $2n$
 односи се на такозване „*outgoing*“ таласе (пропагација у правцу негативне осе x).
 Таласни бројеви који се односе на пропагацију унапред и они који одговарају
 пропагацији таласа уназад имају исту бројну вредност. Разликују се само по
 предзнаку. [6] [7] [8]

Таласна једначина, таласни број и пропагација таласа [7][8]

Ако се погледа једначина којом се по таласној теорији описује расподела померања
 у правцу x осе [8]:

$$u(x, z, t) = u(z)e^{i(\omega t - kx)} \quad (21)$$

види се да промена померања у хоризонталном правцу (правац осе x) зависи само
 од таласног броја. Сходно томе закључује се следеће:

а) када је таласни број *реалан број* ($k = \mathbf{Re}(k)$), тада је:

$$e^{-ikx} = e^{-ix \mathbf{Re}(k)}$$

што значи да таласи пропагирају у $+x$ правцу ако је $\mathbf{Re}(k) > 0$.

б) Када је таласни број *комплексан број* ($k = \mathbf{Re}(k) + i\mathbf{Im}(k)$), тада је:

$$e^{-ikx} = e^{-ix \mathbf{Re}(k)} e^{-ixi \mathbf{Im}(k)} \Rightarrow e^{-ikx} = e^{-ix \mathbf{Re}(k)} e^{x \mathbf{Im}(k)} \quad (22)$$

У овом случају, да би таласи таласи пропагирани у $+x$ правцу реални део таласног
 броја мора бити позитиван ($\mathbf{Re}(k) > 0$), док ће амплитуде померања опадати са
 порастом x , само ако је имагинарни број негативан ($\mathbf{Im}(k) < 0$). Ово се закључује на
 основу оног дела израза (22) који описује атенуацију амплитуде померања ($e^{x \mathbf{Im}(k)}$).

ц) Када је таласни број *имагинаран број* $k = i\mathbf{Im}(k)$ нема пропагације таласа. У овом
 случају таласи су опадајући (у $+x$ правцу), ако је имагинарни број негативан
 ($\mathbf{Im}(k) < 0$).

3. ТАБЕЛАРНИ И ГРАФИЧКИ ПРИКАЗ НУМЕРИЧКИХ РЕЗУЛТАТА

Приликом моделирања усвојене су следеће претпоставке:

- слојеви тла се простиру хоризонтално,
- сваки од n слојева тла је потпуно дефинисан висином (h_j), својом густином (ρ_j), модулом смицања (G_j) и Ламеовом константом (λ_j) ($j=1, 2, \dots, n$),
- сваки од слојева је константних карактеристика материјала (G, ρ, λ) унутар слоја,
- база модела је крута, тј. померања чворова базе су једнака нули.

Анализирани модел је приказан на *Слици 1а*.

Анализирано је неколико модела, који се разликују по броју слојева који их чине. Код сваког од њих, осим фреквенције таласа (ω), варирани су модул смицања, густина и Поасонов коефицијент.

Програм за формирање матрица потребних за нумеричку анализу, односно за рачунање својствених вредности и својствених вектора, писан је у *Матлабу*.

У наставку следе резултати нумеричке анализе за систем који се састоји од једног слоја тла, константних механичких карактеристика тла унутар слоја.⁴

Приказани резултати односе се на слојеве тла са материјалним константама приказаним у *Табели 1*.

Табела 1: Механичке карактеристике слојева тла

Ознака тла	Врста тла	Густина [kg/m^3]	Јунгов модул еластичности [MN/m^2]	Модул смицања $\times 10^2$ [MN/m^2]	Поасонов коефицијент
1	кречњак	1800	500	1,92308	0,30
2	кречњак	2600	4300	17,0635	0,26
3	кречњак	2580	2100	8,20313	0,28
4	глина	2100	400	1,44928	0,38
5	глина	2100	5	1,72414 $\times 10^{-2}$	0,45
6	меко тло	1760	320	1,20	0,33
7	меко тло	2000	5	1,85185 $\times 10^{-2}$	0,35
8	тврдо тло	2000	9013,33	33,885	0,33
9	меко тло	1774	319,65	1,2017002	0,33

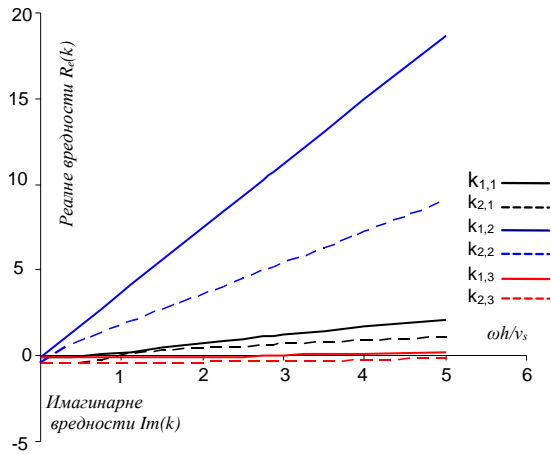
Табела 2: Промена таласног броја са променом фреквенције таласа, односно са променом квалитета тла

Фреквенција		Врста тла					
		меко тло 6**		меко тло 7**		тврдо тло 8**	
$\omega h/v_s^*$	ω [rad/s]	k [1/m]					
		$k_{1,1}$	$k_{2,1}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,3}$
0	0	-0.11909i	-0.44783i	-0.11537i	-0.46227i	-0.11909i	-0.44783i
0.375	42.68	-0.08436i	-0.41728i	1.32668	0.66078	-0.11789i	-0.44664i
0.75	85.36	0.12126	-0.30897i	2.76902	1.341802	-0.11422i	-0.44304i
1.125	128.04	0.25382	0.14931	4.18495	2.01811	-0.10782i	-0.43698i
1.5	170.72	0.48215	0.29787	5.59452	2.69331	-0.09813i	-0.42835i
2.25	256.08	0.87434	0.47605	8.40739	4.04264	-0.06242i	-0.40273i
2.50	284.533	0.99493	0.53298	9.34417	4.49226	-0.03819i	-0.39143i
2.75	312.986	1.11315	0.58946	10.28072	4.94185	0.03533	-0.37857i
2.812	320.099	1.14242	0.60353	10.51482	5.05424	0.0443	-0.37509i
3	341.44	1.22968	0.64564	11.21713	5.39143	0.065057	-0.36398i
3.5	398.346	1.45926	0.75739	13.08953	6.29048	0.105228	-0.32878i
4	455.253	1.68577	0.86861	14.96162	7.18950	0.13857	-0.28317i
5	569.066	2.13345	1.09014	18.70517	8.98741	0.20319	-0.12565i

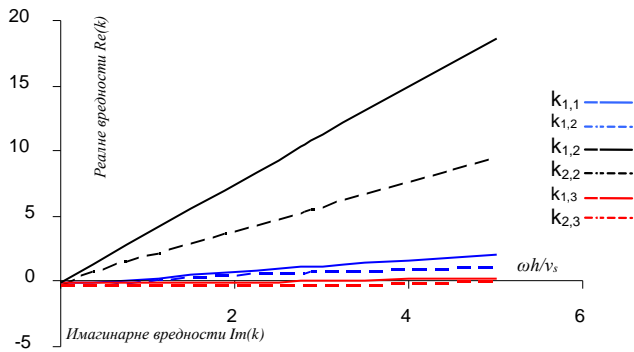
* Брзина смичућих таласа - $v_s = (G/\rho)^{1/2}$

** Подаци о механичким карактеристикама слоја се налазе у *Табели 1*

⁴ За резултате нумеричке анализе модела који се састоје од више слојева тла, обратити се аутору овог рада.



Слика 2: Графички приказ промене таласног броја са променом квалитета тла



Слика 3: Графички приказ промене таласног броја са променом модула смицања

Табела 3: Промена таласног броја са променом фреквенције таласа, односно са променом модула смицања

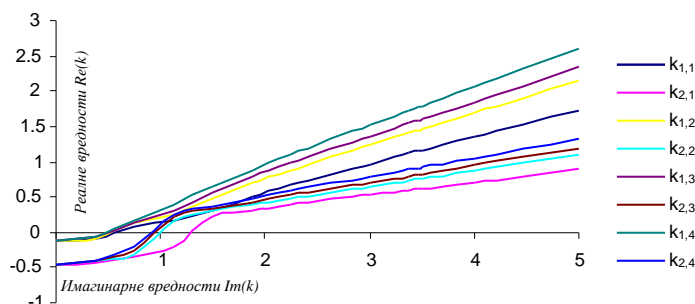
Фреквенција		$\rho=2000\text{kg/m}^3, \nu=0,33$					
		$G=1,20 \times 10^2 \text{MN/m}^2$			$G=33,885 \times 10^2 \text{MN/m}^2$		
		$k \text{ [1/m]}$					
$\omega h/v_s^*$	ω	$k_{1,1}$	$k_{2,1}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,3}$
0	0	-0.11909i	-0.44783i	-0.11909i	-0.44783i	-0.11909i	-0.447834i
0.375	42.68	-0.08681i	-0.41915i	1.330227	0.69443	-0.11789i	-0.44664i
0.75	85.36	0.11371	-0.31875i	2.76969	1.40712	-0.11423i	-0.44305i
1.125	128.04	0.23756	0.11168	4.184218	2.11563	-0.10784i	-0.43701i
1.5	170.72	0.45572	0.28608	5.59275	2.82313	-0.09818i	-0.42840i
1.875	213.40	0.65714	0.37595	6.9989	3.53024	-0.08410i	-0.41709i
2.25	256.08	0.84125	0.46058	8.40387	4.23715	-0.06262i	-0.40285i
2.50	284.533	0.95904	0.51595	9.34011	4.70835	-0.03862i	-0.39158i
2.75	312.986	1.07435	0.57086	10.27614	5.17952	0.03477	-0.37876i
2.812	320.099	1.10288	0.58453	10.5101	5.29730	0.04389	-0.37529i
3	341.44	1.18789	0.62545	11.21204	5.65068	0.06469	-0.36422i
3.5	398.346	1.41136	0.73398	13.08342	6.5929	0.10492	-0.32913i
4	455.253	1.63162	0.84195	14.95452	7.53509	0.13825	-0.28369i
5	569.066	2.06661	1.05697	18.69613	9.41936	0.20275	-0.12732i

Табела 4: Промена таласног броја са променом фреквенције таласа, односно са променом Поасоновог коефицијента

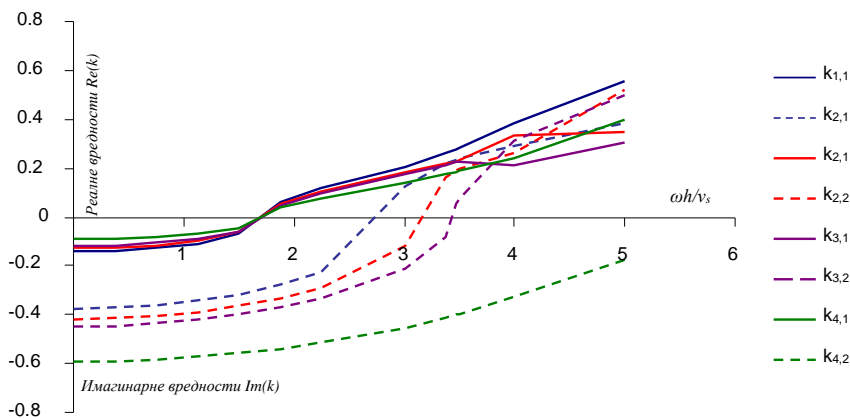
$\omega h/v_s$	$G_2=120170.018\text{kN/m}^2, \rho=1775\text{kg/m}^3$							
	Поасонов коефицијент							
	0,20		0,28		0,33		0,45	
	k [1/m]							
	$k_{1,1}$	$k_{2,1}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,3}$	$k_{1,4}$	$k_{2,4}$
0	-0.14239i	-0.37454i	-0.12803i	-0.41658i	-0.11909i	-0.44783i	-0.09006i	-0.59218i
0.375	-0.13903i	-0.37119i	-0.12499i	-0.41358i	-0.11629i	-0.44506i	-0.08804i	-0.59018i
0.75	-0.12844i	-0.3610i	-0.11542i	-0.40442i	-0.10745i	-0.43664i	-0.08159i	-0.58414i
1.5	-0.07136i	-0.31699i	-0.06408i	-0.36554i	-0.05983i	-0.40128i	-0.04603i	-0.55951i
1.875	0.059166	-0.27955i	0.05308	-0.33343i	0.04968	-0.37266i	0.038627	-0.54048i
2.25	0.118712	-0.22569i	0.10631	-0.28943i	0.09993	-0.33456i	0.078739	-0.51656i
3	0.206941	0.12864	0.18223	-0.11966i	0.17448	-0.2113i	0.142205	-0.45224i
3.375	0.262678	0.22089	0.21851	0.16313	0.21334	-0.08032i	0.175651	-0.41086i
3.464	0.279768	0.23352	0.22891	0.19029	0.22404	0.05051	0.18424	-0.39998i
3.5	0.28663	0.23798	0.23361	0.19931	0.22849	0.07746	0.18769	-0.39562i
4	0.382387	0.29019	0.33505	0.26277	0.31130	0.21178	0.24292	-0.32802i
5	0.55253	0.38089	0.52094	0.34459	0.49904	0.30537	0.39742	-0.17899i

Табела 5: Промена таласног броја са променом фреквенције таласа, односно са променом густине

Фреквенција	$G=120,170\text{ MN/m}^2, \nu=0,33$							
	Густина [kg/m ³]							
	1174		1775		2100		2580	
	k [1/m]							
$\omega h/v_s^*$	$k_{1,1}$	$k_{2,1}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,3}$	$k_{1,4}$	$k_{2,4}$
0	-0.11909i	-	-0.11909i	-0.44783i	-0.11909i	-0.44783i	-0.11909i	-0.44783i
0.375	-0.09738i	0.447834i	-0.08408i	-0.41708i	-0.07586i	-0.41119i	-0.06176i	-0.40236i
0.75	0.06951	-0.36100i	0.12206	-0.30787i	0.14339	-0.27507i	0.17127	-0.21896i
1.125	0.174676	-0.21083i	0.255713	0.15264	0.31421	0.21382	0.39869	0.25997
1.5	0.31182	0.21216	0.48498	0.29913	0.55980	0.33232	0.65508	0.37502
1.875	0.49964	0.30563	0.68957	0.39065	0.77378	0.42926	0.88339	0.48029
2.25	0.66633	0.38010	0.87792	0.47773	0.97389	0.52299	1.10012	0.58321
3	0.970284	0.52128	1.23421	0.64783	1.356269	0.70711	1.51824	0.78627
3.5	1.16298	0.61343	1.46446	0.75993	1.60469	0.82871	1.79132	0.9206
4	1.351652	0.70486	1.69164	0.87150	1.85037	0.94985	2.06196	1.05465
5	1.72214	0.88653	2.14069	1.09374	2.33689	1.19130	2.59895	1.32190



Слика 4: Графички приказ промене таласног броја са променом густине



Слика 5: Графички приказ промене таласног броја са променом Поасоновог коефицијента

4. ЗАКЉУЧЦИ

Дискретан облик динамичке матрице крутости гла знатно је једноставнији за примену у нумеричким анализама од тачног облика динамичке матрице крутости. Испод граничне фреквенције нема пропагације таласа. Уочава се да су сви таласни бројеви испод те фреквенције имагинарни.

Тон са најмањом брзином пропагације, односно онај са највећим таласним бројем је доминантан, јер се најдуже задржава у систему. Стога је он први тон. Упоређивањем добијених резултата уочава се да најнижу граничну фреквенцију има први тон модела са најмањим модулом смицања. Такође, најнижу граничну фреквенцију има први тон модела са најмањом густином, али промена густине не мења значајно вредност таласног броја.

Промена Поасоновог коефицијента нема значајнијег утицаја на промену вредности таласног броја код пропагације Рејлијевих таласа. Међутим, промена Поасоновог коефицијента значајно утиче облике осциловања, што наводи на закључак да је у динамичкој анализи, односно у анализи простирања сеизмичких таласа нужно правилно одредити све параметре гла који улазе у анализу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Gilat, *Увод у Матлаб 7.5 са примерима*, Микро књига, Београд, **2008**.
- [2] I. S. Iohvidov, *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms*, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, **1982**.
- [3] Тимошенко, *Виша динамика*, ГК, Београд, **1962**.
- [4] Тимошенко С., Гудиер Ј. Н., *Теорија еластичности*, ГК, Београд, **1962**.
- [5] Тимошенко, *Теорија осцилација-примене у техници*, ГК, Београд **1966**.

- [6] Lysmer J., G. Waas, *Lumped Mass Method for Rayleigh Waves*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 60, **1972**.
- [7] Wolf J. P., *Dynamic Stiffness Matrix of Soil by Boundary method*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 8, **1986**.
- [8] Glenn J. Rix, Carlo G. Lai, Krzysztof Wilmański, *Surface Waves in Geomechanics: Direct and Inverse Modelling for Soil and Rocks*, Udine, **2005**.

RAYLEIGH WAVES-PARAMETRIC ANALYSIS OF CHANGE IN WAVE NUMBER

***Summary:** The paper analyzes the dependence of the change wave number of materials soil constants, ie the frequency of the waves. The starting point in this analysis consists of wave equation and the discrete dynamic stiffness matrix of soil. The model for to analysis is the horizontally layered soil on rigid base. The program for this analysis is written in MatLab.*

***Key words:** Rayleigh waves, wave number, dynamic stiffness matrices, dimensionless frequency*