

# ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА ПРОМЕНЕ ТАЛАСНОГ БРОЈА ПОВРШИНСКИХ ТАЛАСА

Љиљана Тадић<sup>1</sup>  
Ђерђ Варју<sup>2</sup>

УДК: 550.34.016

DOI: 10.14415/zbornikGFS28.04

**Резиме:** У раду је анализирана зависност промене таласног броја од појединих материјалних константи тла, односно од фреквенције таласа. Полазну основу у овој анализи чине таласна једначина и динамичка матрица крутости тла.

**Кључне речи:** сеизмички талас, таласни број, фреквенција

## 1. УВОД

Као основни проблем при математичком моделирању физичких појава, намеће се идеализација, тј. изналажење рачунског модела који одражава суштину разматране појаве, њен механизам и све важне утицаје, а који је истовремено, у довољној мери, једноставан за практичну примену.

Добрим моделом сматра онај модел који одступа од реалне слике у границама толеранције, а при томе није тако комплексан да би одређивање бројних вредности параметара који фигуришу у моделу било компликовано или немогуће.

Стање тла, због бројних варијација и комбинација понашања тла и оптерећења, не може се у потпуности описати једним математичким моделом.

Из тог разлога се одређени модели прилагођавају тако да се са задовољавајућом тачношћу примењују за одређена решења. Иако тло има изразито нелинеарне особине (које нарочито долазе до изражаја при великим померањима услед дејства земљотреса), оно се најчешће идеализује, тј. посматра као хомогена, изотропна и еластична средина, што понекад не даје довољно поуздане резултате.

Правилно моделирање тла је од изузетне важности при динамичкој анализи, јер неправилно моделирање дела тла које улази у динамички прорачун може резултирати добијањем погрешне слике одзива анализираних система.

Да би се тло правилно моделирало потребно је познавати и његове динамичке карактеристике, односно потребно је правилно одабрати све параметре тла који улазе у анализу. Међутим, анализа интеракције тла и објекта није могућа без познавања природе сеизмичких таласа.

---

<sup>1</sup>мр Љиљана Тадић, дипл. инж. грађ., Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, тел: 024/554-300, имејл: [tadic@gf.uns.ac.rs](mailto:tadic@gf.uns.ac.rs)

<sup>2</sup>мр Ђерђ Варју, дипл. инж. грађ., Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, тел: 024/554-300, имејл: [varjuy@gf.uns.ac.rs](mailto:varjuy@gf.uns.ac.rs)

## 2. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ЗА АНАЛИЗУ

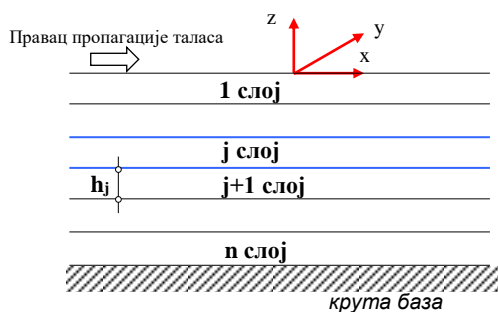
У деловима тла који се налазе на релативно малој дубини доминирају површински таласи. Ови таласи с математичког аспекта представљају само посебан случај таласа у простору.

Важно својство површинских таласа је дисперзија. Дисперзија значи да таласи различите таласне дужине имају различиту дубину продирања, а према томе и различиту брзину ширења. Таласи велике таласне дужине (мале фреквенције) се шире брже, а таласи мале таласне дужине (велике фреквенције) се шире спорије. Просторни (запремински) таласи немају ово својство.

Површински таласи се могу простирати у виду тзв. Рејлијевих (Rayleigh) или као Лавови (Love) таласи.

Рејлијеви таласи су комбинација подужних и попречних таласа и карактерише их осциловање по елиптичној путањи, којој је велика полуоса вертикална (када је талас близу површине), која лежи у вертикалној равни правца простирања таласа. Постојање ових таласа је установио Џон Вилијам Струт, лорд Рејли (John William Strutt, Lord Rayleigh) 1885. године, а који је већ 1887. године дао и теоријске основе прорачуна таласа у равни. Лавови таласи се простиру само у површинском слоју и то само ако површински слој належе на слој са већом брзином простирања таласа. Честице у овим таласима осцилују у хоризонталној равни управно на правац простирања таласа. Добили су име по А. Е. Н. Лове-у, британском математичару, који је направио математички модел таласа 1911. године.

Површински таласи опадају са порастом дубине, тако да се на дубини од неколико таласних дужина могу занемарити. Студије су показале да се две трећине енергије кретања преноси преноси Rayleigh-евим таласима, као и то да амплитуда Рејлијевих и Ловових таласа опадају спорије са порастом  $x$  (у правцу пропагирања таласа) од амплитуда раванских таласа, што је један од главних разлога примене површинских таласа приликом решавања проблема интеракције тла и објекта.



Слика 1: Модел хоризонтално услојеног тла

### Проблем својствених вредности Лавових таласа – дискретан облик

С обзиром на то да у динамичкој матрици крутости тла фигурише таласни број, полази се од динамичке једначине слободних вибрација система у дискретном облику:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{U} = 0 \quad \dots(1)$$

где је:

$\mathbf{U}$  – вектор компоненти померања система

$\mathbf{K}_L$  – динамичка матрица крутости система слојева тла у дискретном облику, базирана на решењу таласне теорије. [2], [7]

У случају таласног кретања, за формирање динамичке матрице крутости слоја, односно система слојева тла, одређених карактеристика, потребно је знати померања на крајевима и дефинисати конститутивне релације између напона и деформација у тлу.

Хоризонтално слојевито тло може се моделирати простим, једнодимензионалним системом као на слици 1.

Матрица  $\mathbf{K}_L$  је реда  $n \times n$ , где је  $n$  број слојева од којих се посматрани систем састоји. Ова матрица у себи садржи карактеристике тла и таласни број који је исти за свих  $n$  слојева система (из услова компатибилности између слојева).

У случају Ловових таласа, ова матрица је:

$$\mathbf{K}_L = k^2 \Delta + \Phi - \omega^2 \mathbf{M} \quad \dots(2)$$

где је:

$\Delta$ ,  $\Phi$  и  $\mathbf{M}$  матрице система слојева

$k$  – таласни број,

$\omega$  – фреквенција таласа.

Матрице  $\Delta$ ,  $\Phi$  и  $\mathbf{M}$  су реда  $n \times n$ , где је  $n$  број слојева у систему. Формирају се од матрица  $\Delta_j$ ,  $\Phi_j$  и  $\mathbf{M}_j$  ( $j=1, 2, 3 \dots, n$ ) појединачних слојева:

$$\Delta_j = \frac{1}{6} G_j h_j \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Phi_j = \frac{G_j}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_j = \frac{1}{6} h_j \rho_j \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

где су  $\Delta_j$ ,  $\Phi_j$  и  $\mathbf{M}_j$  матрице  $j$ -ог слоја.

Ове матрице, зависе само од карактеристика материјала (материјалних константи) и од дебљине слојева, и имају константну вредност.

Уврштавањем једначине (2) у једначину (1) добија се:

$$(k^2 \Delta + \Phi - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4)$$

одакле следи једначина:

$$(\Delta^{-1} \Phi_M - \chi \mathbf{I}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5)$$

која представља дискретан проблем својствених вредности. У једначини (5) је уведено следеће обележавање:

$\mathbf{I}$  – јединична матрица,

$$\Phi_M = \Phi - \omega^2 \mathbf{M} \quad (6)$$

$$\chi = -k^2 \quad (7)$$

У овм случају као решења својственог проблема добијају се могући таласни бројеви  $k$  (за задату фреквенцију таласа).

Треба напоменути да је динамичка матрица крутости система (2) добијена линеаризовањем динамичке матрице крутости у тачном облику (елементи динамичке матрице крутости у тачном облику су тригонометријске функције).

Линеаризацију је могуће извршити у случајевима када је дебљина слоја много мања од таласне дужине. Дискретан облик матрице крутости је једноставнији за примену у практичним прорачунима (посебно у случају површинских таласа код система који се састоје од већег броја слојева). [1], [2], [3], [4], [5], [7], [8]

### 3. РЕЗУЛТАТИ НУМЕРИЧКЕ АНАЛИЗЕ

Анализа се односи на пропагацију Лавових таласа у хоризонтално услојеном тлу над крутом базом (слика 1). Програм за добијање динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_L$ , односно  $\Delta$ ,  $\Phi$  и  $\mathbf{M}$  матрице, и за рачунање својствених вредности, писан је у *MATLAB*-у. Претпостављено је следеће:

- систем слојева тла се распростире хоризонтално,
- сваки слој је потпуно дефинисан вредностима густине ( $\rho$ ), модула смицања ( $G$ ) и висином ( $h$ ).

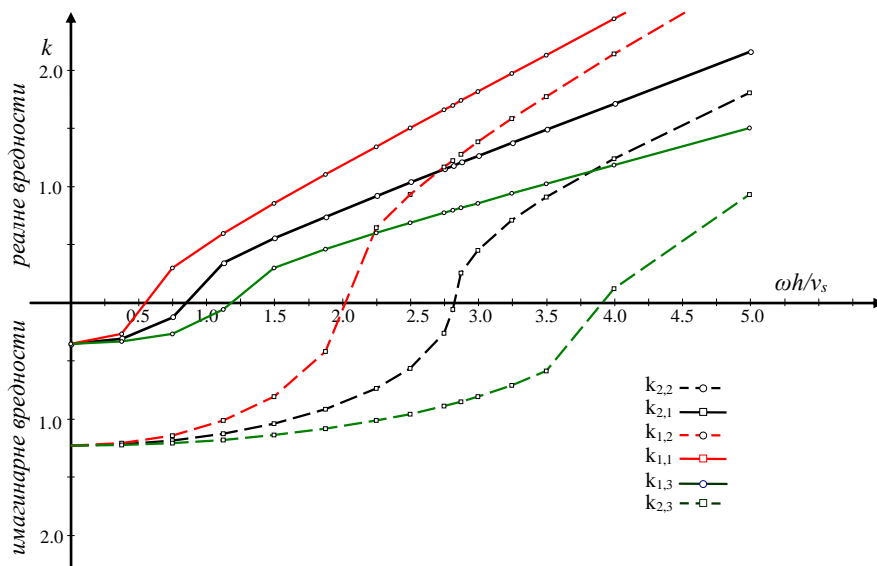
Анализа је вршена за неколико система састављених различитог броја слојева. Овде су приказани резултати прорачуна за систем од два слоја који су једнаких висина и истих механичких карактеристика. Осим фреквенције таласа, вариран је и модул смицања (приказани су резултати за  $G_1=60170.018kN/m^2$ ,  $G_2=120170.018kN/m^2$ ,  $G_3=240170.018kN/m^2$ ), односно густина тла ( $\rho_1= 1.774kNs^2/m^4$ ,  $\rho_2= 2.5kNs^2/m^4$ ,  $\rho_3=3.0kNs^2/m^4$ ).

Табела 1: Табеларни приказ добијених својствених вредности ( $\chi$ ), односно таласних бројева ( $k$ ) за различите вредности фреквенције таласа ( $\omega$ ) при вредности модула смицања  $G_2$

$\omega h/v_s^*$	$\omega$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{1,2}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$
0	0	1.5160	0.1242	-0.3525i	-1.2313i
0.375	42.68	1.4891	0.0973	-0.3120i	-1.2203i
0.75	85.36	1.4084	0.0167	-0.1291i	-1.1868i
1.125	128.04	1.2740	-0.1178	0.3432	-1.1287i
1.5	170.72	1.0857	-0.3060	0.5532	-1.0420i
1.875	213.40	0.8437	-0.5481	0.7403	-0.9185i
2.25	256.08	0.5479	-0.8439	0.9186	-0.7402i
2.50	284.533	0.3208	-1.0709	1.0349	-0.5664i
2.75	312.986	0.0699	-1.3219	1.1497	-0.2643i
2.812	320.099	0.0034	-1.3884	1.1783	-0.0582i
2.875	327.213	-0.0646	-1.4564	1.2068	0.2542
3	341.44	-0.2050	-1.5968	1.2636	0.4528
3.25	369.893	-0.5031	-1.8949	1.3766	0.7093
3.5	398.346	-0.8265	-2.2183	1.4894	0.9091
4	455.253	-1.5436	-2.9354	1.7133	1.2424
5	569.066	-3.2646	-4.6564	2.1579	1.8068

$$* v_s^2 = G / \rho$$

За сваку од задатих фреквенција таласа добијене су по две својствене вредности  $\chi$  матрице  $\Delta^{-1}\Phi_M$ , односно по четири вредности таласног броја. Све добијене својствене вредности  $\chi$  су реалне, што и морају бити с обзиром на карактеристике матрица (3) и (6),- симетричне су и позитивно дефинитне.



Слика 2: Дијаграм промене таласног броја ( $k$ ) са променом фреквенције таласа ( $\omega$ ), односно модула смицања ( $G$ )

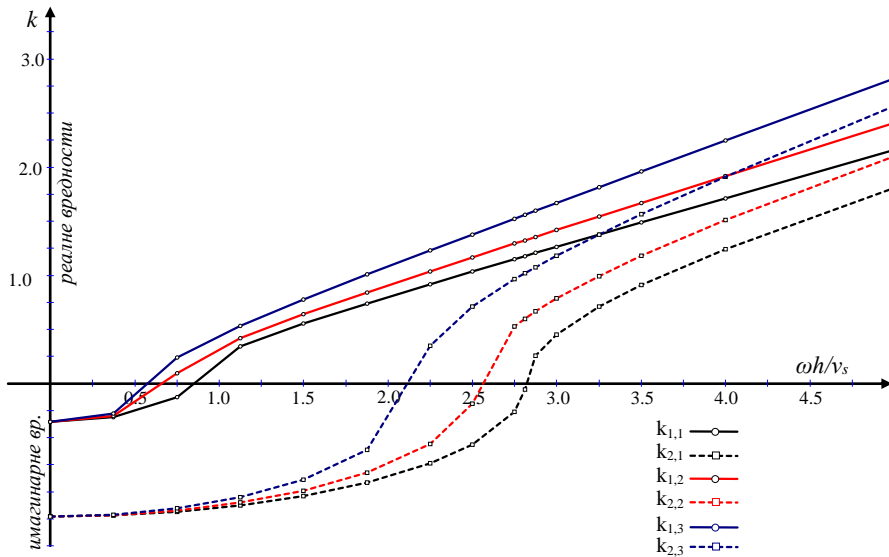
Табела 2: Табеларни приказ добијених таласних бројева ( $k$ ) за различите фреквенције таласа ( $\omega$ ) и три различите вредности модула смицања ( $G$ )

$\omega h/v_s$	$G_1$		$G_2$		$G_3$	
	$k_{1,1}$	$k_{2,1}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,3}$
0	-0.3525i	-1.2313i	-0.3525i	-1.2313i	-0.3525i	-1.2313i
0.375	-0.2656i	-1.2093i	-0.3120i	-1.2203i	-0.3328i	-1.2258i
0.75	0.3010	-1.1407i	-0.1291i	-1.1868i	-0.2653i	-1.2092i
1.125	0.5993	-1.0162i	0.3432	-1.1287i	-0.0559i	-1.1811i
1.5	0.8574	-0.8104i	0.5532	-1.0420i	0.3018	-1.1405i
1.875	1.1038	-0.4163i	0.7403	-0.9185i	0.4606	-1.0861i
2.25	1.3451	0.6461	0.9186	-0.7402i	0.6001	-1.0157i
2.50	1.5042	0.9332	1.0349	-0.5664i	0.6883	-0.9581i
2.75	1.6625	1.1714	1.1497	-0.2643i	0.7742	-0.8902i
2.812	1.7020	1.2268	1.1783	-0.0582i	0.7954	-0.8713i
2.875	1.7414	1.2809	1.2068	0.2542	0.8165	-0.8516i
3	1.8202	1.3861	1.2636	0.4528	0.8584	-0.8092i
3.25	1.9769	1.5864	1.3766	0.7093	0.9413	-0.7111i
3.5	2.1340	1.7783	1.4894	0.9091	1.0236	-0.5864i
4	2.4467	2.1435	1.7133	1.2424	1.1860	0.1220
5	3.0698	2.8340	2.1579	1.8068	1.5059	0.935

То практично значи да се за систем од  $n$  слојева добија  $n$  реалних својствених вредности  $\chi$ , односно  $2n$  вредности таласних бројева. Како је својствена вредност  $\chi$  једнака негативној вредности квадрата таласног броја, то таласни бројеви могу бити и реални и имагинарни бројеви, па је њихов број једнак двострукој вредности броја слојева тла у систему.

Табела 3: Табеларни приказ добијених таласних бројева ( $k$ ) за различите фреквенције таласа ( $\omega$ ) и три различите вредности густине ( $\rho$ )

$\omega h/v_s$	$G_2, \rho_1$		$G_2, \rho_2$		$G_2, \rho_3$	
	$k_{1,1}$	$k_{2,1}$	$k_{1,2}$	$k_{2,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,3}$
0	-0.3525i	-1.2313i	-0.3525i	-1.2313i	-0.3525i	-1.2313i
0.375	-0.3120i	-1.2203i	-0.3015i	-1.2176i	-0.2806i	-1.2126i
0.75	-0.1291i	-1.1868i	0.0958	-1.1758i	0.2402	-1.1550i
1.125	0.3432	-1.1287i	0.4194	-1.1027i	0.5339	-1.0520i
1.5	0.5532	-1.0420i	0.6398	-0.9912i	0.7768	-0.8879i
1.875	0.7403	-0.9185i	0.8423	-0.8260i	1.0063	-0.6157i
2.25	0.9186	-0.7402i	1.0375	-0.5616i	1.2300	0.3480
2.50	1.0349	-0.5664i	1.1653	-0.1840i	1.3773	0.7107
2.75	1.1497	-0.2643i	1.2920	0.5267	1.5236	0.9641
2.812	1.1783	-0.0582i	1.3235	0.5999	1.5600	1.0208
2.875	1.2068	0.2542	1.3550	0.6664	1.5965	1.0756
3	1.2636	0.4528	1.4178	0.7863	1.6692	1.1809
3.25	1.3766	0.7093	1.5426	0.9940	1.8139	1.3779
3.5	1.4894	0.9091	1.6676	1.1786	1.9589	1.5638
4	1.7133	1.2424	1.9157	1.5094	2.2472	1.9126
5	2.1579	1.8068	2.4092	2.1006	2.8214	2.5629



Слика 3: Дијаграм промене таласног броја ( $k$ ) са променом фреквенције таласа ( $\omega$ ), односно вредности густине ( $\rho$ )

Другим речима, број добијених вредности таласног броја зависи од броја слојева у систему. Имајући у виду једначину померања за случај Ловових таласа  $v(x, z, t) = v(z) e^{-ikx} e^{i\omega t}$  (решење таласне једначине) следи да се половина од укупног броја добијених вредности таласног броја односи на пропацију унапред (сви добијени позитивни реални бројеви и сви имагинарни са негативним предзнаком), а исто толико их се односи на пропацију таласа уназад.

#### 4. ЗАКЉУЧАК

Динамичка матрица крутости у дискретном облику знатно је једноставнија за примену у анализама од динамичке матрице крутости у тачном облику. Испод тзв. граничне фреквенције нема пропагације таласа, тачније, у случајевима када је таласни број имагинаран број, реч је о таласима са опадајућом амплитудом. Уочава се да су сви таласни бројеви испод најниже граничне фреквенције имагинарни. Тон са највећим таласним бројем је доминантан, јер има најмању брзину пропагације, тј. најдуже се задржава. Упоредивањем добијених резултата (слика 2) уочава се да најнижу граничну фреквенцију има први тон система са најмањим модулом смицања (први тон код сваког од анализираних система је онај који има највећи таласни број). Што се тиче Поасоновог броја, он нема никаквог утицаја на вредност таласног броја код пропагације Лавових таласа. Осим ове анализе, вршена је и друга анализа, чији резултати нису приказани у овом раду, а која се односи на Рејлијеве таласе. Она је показала да је његов утицај на промену таласног броја код Рејлијевих таласа незнатан.

На крају треба нагласити да је приликом анализе простирања сеизмичких таласа, потребно правилно одабрати све параметре тла који улазе у анализу.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко, *Виша динамика*, ГК, Београд, **1962**.
- [2] Тимошенко С., Гудиер Ј. Н., *Теорија еластичности*, ГК, Београд, **1962**.
- [3] Тимошенко, *Теорија осцилација-примене у техници*, ГК, Београд, **1966**.
- [4] Пешић. Ј. Л.: *Опита геологија, Ендодинамика*, Београд, **1995**.
- [5] Lysmer J., G. Waas, *Lumped Mass Method for Rayleigh Waves*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 60, **1972**.
- [6] Gilat A., *Увод у Матлаб 7.5 са примерима*, Микро књига, Београд, **2008**.
- [7] Wolf J. P., *Dynamic Stiffness Matrix of Soil by Boundary method*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 8, **1986**.
- [8] I. S. Iohvidov, *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms*, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, **1982**.
- [9] Јарић Ј., *Механика континуума*, ГК, Београд, **1988**.

### PARAMETRIC ANALYSIS OF CHANGE IN WAVE NUMBER OF SURFACE WAVES

*Summary: The paper analyzes the dependence of the change wave number of materials soil constants, ie the frequency of the waves. The starting point in this analysis consists of wave equation and dynamic stiffness matrix of soil.*

*Keywords: surface waves, wave number, frequency*