

ДОЊА И ГОРЊА ГРАНИЦА ОПТЕРЕЋЕЊА ПРАВОУГАОНИХ И КРУЖНИХ ПЛОЧА

Саша Ковачевић¹

УДК: 624.042

DOI:10.14415/zbornikGFS26.06

Резиме: *Тема рада се односи на одређивање граничног оптерећења правоугаоних и кружних плоча по теорији пластичности. Представљене су две методе за прорачун критичног оптерећења, метода доње границе (lower-bound) или статичка метода и метода горње границе (upper-bound) или кинематичка метода. Прорачун горње границе оптерећења одређује се помоћу методе линије лома (yield line theory). Решења добијена овим методама дефинишу границе интервала критичног оптерећења. Приказане су основне поставке наведених метода и нумерички примери. Разматране су правоугаоне и кружне плоче са различитим условима ослањања, оптерећеним са једнакоподељеним и концентрисаним оптерећењем.*

Кључне речи: *Критично оптерећење, доња граница оптерећења, горња граница оптерећења, линија лома.*

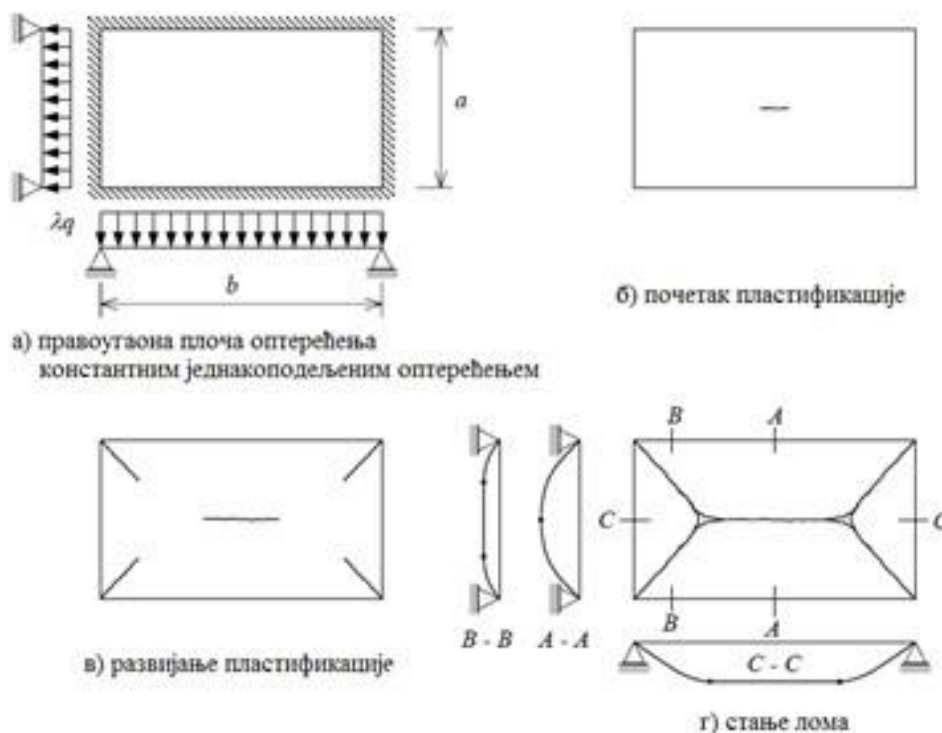
1. УВОД

Тема рада се односи на одређивање граничног оптерећења по теорији пластичности. Решење се може постићи применом једне од следећих метода [1]: инкрементална (stepwise) или директна метода, метода доње границе оптерећења (lower-bound) или статичка метода и метода горње границе оптерећења (upper-bound) или кинематичка метода. Примена прве методе је оправдана само код једноставних површинских носача или код гредних носача с обзиром, да захтева много прорачуна или примену рачунара. Примена друге методе је такође комплексан прорачун али је погодна за прорачун носивости јер дефинише доњу границу оптерећења. Примена методе горње границе је најраспрострањенија и у литератури је позната под називом теорија линије лома (yield line theory). Теорија линија лома дефинише горњу границу оптерећења и примену налази, осим код армиранобетонских плоча, и код веза у челику, челичних плоча и армиранобетонских зидова [2]. Последње две методе одређују интервал граничног оптерећења. У случају методе линије лома, која предвиђа оптерећење потребно за активирање претходно усвојеног механизма лома, решења се могу добити користећи метод виртуелног рада или равнотежни метод [3].

¹Саша Ковачевић, дипл.инж. грађ., студент докторских студија на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, e-mail: sasakovacevic988@gmail.com

2. ГОРЊА И ДОЊА ГРАНИЦА ОПТЕРЕЋЕЊА

За слободно ослоњену правоугаону плочу оптерећену са константним једнакоподељеним оптерећењем λq , где је q фиксна вредност а λ фактор оптерећења, на Слици 1 је приказан поступак пластификације плоче. При томе, усваја се еласто-идеално-пластичан материјал. Постепено повећавајући оптерећење ($\lambda > 0$) до одређење границе плоча се понаша потпуно еластично. Уколико се оптерећење λ повећа до границе $\lambda = \lambda_c$ напон у плочи достиже границу течење и јављају се прве пластичне деформације, Слика 1.



Слика 1. Развој пластификације код слободно ослоњене правоугаоне плоче [1]

Повећавање оптерећења ствара више тачака у којима се достиже граница пластичности након чега се образују линије или зоне лома. На крају се добија механизам лома са максималним фактором оптерећења λ_p . Граница течења зависи само од момента савијања. Пластична ротација (у појединим тачкама око линије лома) се може појавити само ако је одговарајући момент савијања једнак пластичном моменту m_p , означен као и момент течења (yield moment) или гранични момент (ultimate moment). Битна карактеристика ове теорије је да је механизам лома изабран само на основу линије лома док се зоне лома не разматрају. Ако је потребно увести и зоне лома у прорачун онда се оне могу апроксимирати са гушћом мрежом линија лома. Након што се изабере одговарајући механизам лома дефинише се једначина:

$$W = E_d \quad (1)$$

где је W рад спољашњих сила и E_d рад унутрашњих сила остварен на померању за време лома. Слика 2 приказује усвојени координатни систем и позитиван правац за померање и произвољно континуално оптерећење. Рад спољашњих сила на померању $w(x,y)$ се може изразити као:

$$W = \lambda \iint_A q(x,y)w(x,y)dxdy \quad (2)$$



Слика 2. Произвољно површинско оптерећење по елементу плоче [1]

Што се тиче унутрашњих сила, оне врше рад само дуж линија лома. Усваја се да само момент савијања врши рад дуж линије лома:

$$E_d = \sum m_p \cdot |\Delta\varphi_d| \cdot l_s \quad (3)$$

где је m_p пластични момент, $\Delta\varphi_d$ угао нагиба између делова плоче и l_s дужина линије лома. Доња граница граничног оптерећења λ_p се може одредити из равнотеже спољашњих сила λq и расподеле напона који не изазивају појаву пластификације. У случају кад је за одређено оптерећење λq могуће одредити и механизам лома и допуштен распоред напона, онда је дефинисано тачно решење и фактор оптерећења λ је једнак граничном фактору оптерећења λ_p . За дефинисање доње границе фактора оптерећења λ_p потребно је наћи такав распоред момената који испуњава следећа два критеријума: задовољава све услове равнотеже и услов течења није нигде прекорачен. Једначине равнотеже за плоче имају облик [4]:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \lambda q(x,y) = 0 \quad (4)$$

и потребно је задовољити услов континитета и граничне услове односно, неопходно је претпоставити расподелу момената која задовољава ове услове. Други услов који је неопходно задовољити је услов течења. Апсолутна вредност момента савијања у свим тачкама и у свим правцима мора бити мања од момента пластификације m_p плоче. Потребно је задовољити да је већи главни момент савијања мањи од $+m_p$ и да је мањи главни момент савијања већи до $-m_p$. Ови услови се могу изразити изразима (5) или графички помоћу Моровог круга [1].

$$m_I = \frac{1}{2}(m_{xx} + m_{yy}) + \sqrt{\frac{1}{4}(m_{xx} - m_{yy})^2 + m_{xy}^2}$$

$$m_{II} = \frac{1}{2}(m_{xx} + m_{yy}) - \sqrt{\frac{1}{4}(m_{xx} - m_{yy})^2 + m_{xy}^2}$$
(5)

3. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ

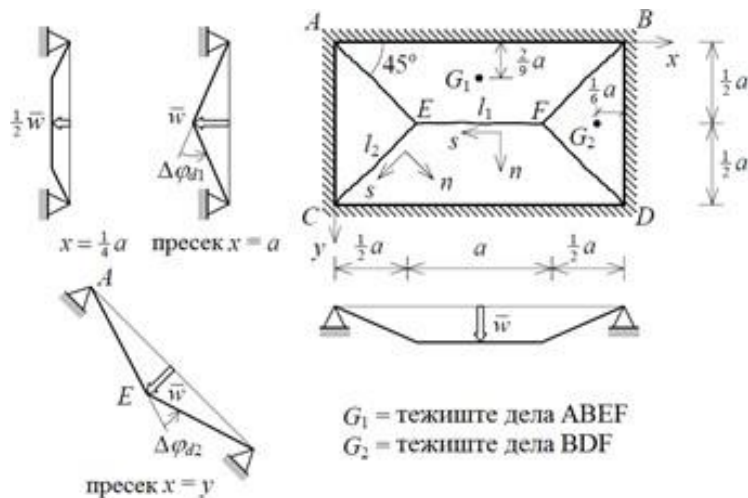
Као најједноставнији пример на којем ће се показати одређивање фактора оптерећења је правоугаона слободно ослоњена плоча оптерећена једнакоподељеним оптерећењем, Слика 3. За усвојене линије лома, рад спољашњих и унутрашњих сила износи:

$$W = \frac{5}{6} \cdot \lambda \cdot q \cdot a^2 \cdot w$$
(6)

$$E_d = 12 \cdot m_p \cdot w$$

Изједначавањем спољашних и унутрашњих радова добија се фактор оптерећења:

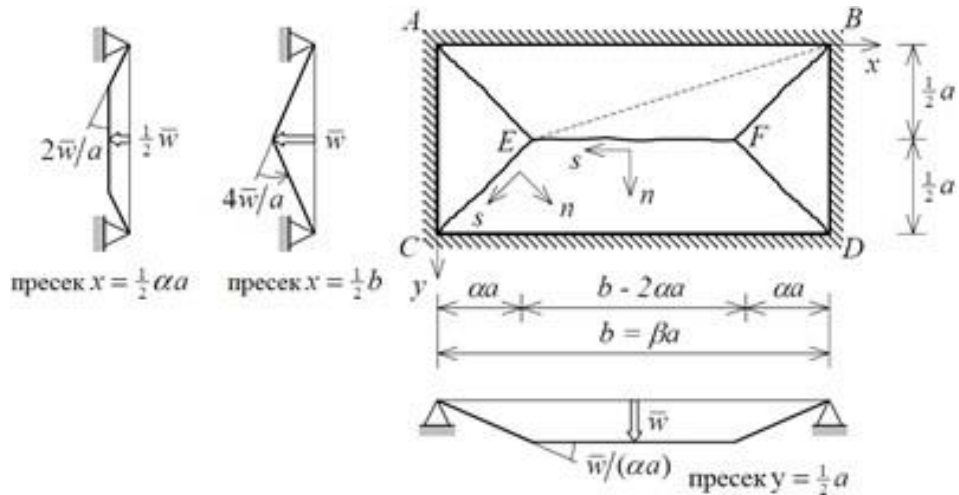
$$\lambda = \frac{72}{5} \frac{m_p}{q \cdot a^2}$$
(7)



Слика 3. Линије лома за слободно ослоњену плочу [1]

Аналогном процедуром као у претходном случају али усвајајући линије лома као на Слици 4 добија се фактор оптерећења:

$$\lambda = 8 \cdot \left(\frac{\beta + \frac{1}{2 \cdot \alpha}}{\beta - \frac{2 \cdot \alpha}{3}} \right) \cdot \frac{m_p}{q \cdot a^2} \quad (8)$$



Слика 4. Линије лоба за слободно ослоњену плочу произвољних димензија [1]

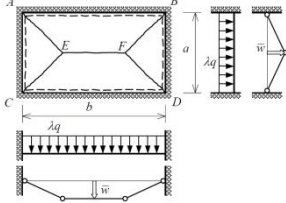
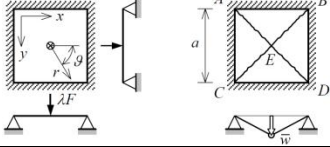
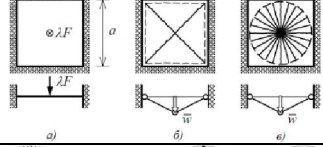
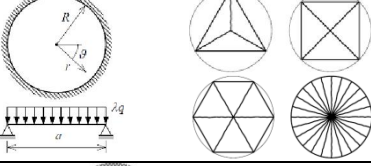
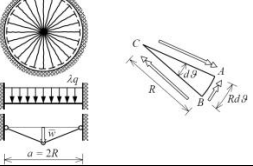
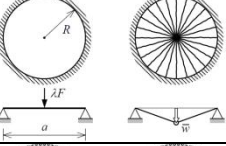
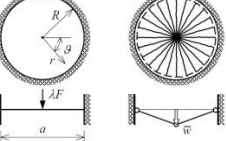
На основу претходног резултата даје се неколико решења за фактор оптерећења за различите параметре α и β , Табела 1. Фактор оптерећења за доњу границу износи:

$$\lambda = \frac{m_p}{q} \left(\frac{8}{b^2} + \frac{8}{a \cdot b} + \frac{8}{a^2} \right) \quad (9)$$

Табела 1. Решење за фактор оптерећења за различите параметре α и β

β	α	$\lambda q \cdot a^2 / m_p$
1 (квadratна плоча)	0.5	24.00
2	0.5	14.40
2 (оптимално решење)	$1/4(\sqrt{13}-1) = 0.651$	14.14
∞ (бесконечно дуга плоча)	$1/2\sqrt{3} = 0.866$	8.00

Табела 2. Фактор оптерећења за различите типове плоча и случајеве оптерећења

Тип плоче и случај оптерећења	λ_p - доња граница	λ_p - горња граница
	$\lambda = \frac{16 \cdot m_p}{q \cdot a^2} \cdot \left(\frac{\beta + 1}{\beta - \frac{1}{3}} \right)$	$\lambda = 16 \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \cdot \frac{m_p}{q \cdot a^2}$
	$\lambda \cdot F = 8 \cdot m_p$	
	$\begin{aligned} \text{б) } \lambda \cdot F &= 16 \cdot m_p \\ \text{в) } \lambda \cdot F &= 4 \cdot \pi \cdot m_p \end{aligned}$	$\lambda \cdot F = 4 \cdot \pi \cdot m_p$
	$\lambda = 6 \cdot \frac{m_p}{q \cdot R^2} = 24 \cdot \frac{m_p}{q \cdot a^2}$	
	$\lambda = 12 \cdot \frac{m_p}{q \cdot R^2} = 48 \cdot \frac{m_p}{q \cdot a^2}$	
	$\lambda F = 2 \cdot \pi \cdot m_p$	
	$\lambda F = 4 \cdot \pi \cdot m_p$	

4. ЗАКЉУЧАК

У раду је представљена доња и горња граница граничног оптерећења за правоугаоне и кружне плоче за различите услове ослањања и случајеве оптерећења. Изложене су основне поставке и претпоставке за доњу и горњу границу оптерећења. Приказан је прорачун оба фактора оптерећења за случај слободно ослоњене плоче оптерећене једнакоподељеним оптерећењем. За остале типове плоча и случајеве оптерећења дата је Табела 2 са приказаним линијама лома и фактором оптерећења. На основу Табеле 2 може се приметити да за поједине типове плоча доња и горња граница имају исту вредност што представља тачно решење с обзиром, да ове границе дефинишу интервал оптерећења. Осим тога, на основу изложене анализе може се видети да се носивост правоугаоних плоча повећава ако се смањује дужина плоче у подужном правцу. Другим речима, највећу носивост има квадратна плоча, чак три пута већу у односу на веома дугачку правоугаону плочу. На основу исте табеле може се запазити да у случају квадратних и кружних плоча, оптерећених концентрисаним силама, фактор оптерећења не зависи од димензије плоче већ само од момента пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Vrouwenvelder, A., Witteveen J.: *The plastic behaviour and the calculation of plates subjected to bending*, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft, **2003**.
- [2] Al-Sabah, A., Falter, H.: *Finite element lower bound "yield line" analysis of isotropic slabs using rotation-free elements*, Engineering Structures (53), 38-51, **2013**.
- [3] Thavalingam, A., Jennings, A., McKeown, J., Sloan, D.: *A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs*, Computers & Structures, 601-612, **1988**.
- [4] Timoshenko, S., Woinowski-Krieger, S.: *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York, **1959**.

LOWER-BOUND AND UPPER-BOUND FOR RECTANGULAR AND CIRCULAR PLATES

Summary: *This paper defines critical load for rectangular and circular plates. It is presented two methods for critical load, lower-bound theory and upper-bound theory. Calculation for upper-bound is based on yield line theory. Solutions for these methods define interval of critical load. Basic assumptions for these methods and numerical examples are displayed. Paper deals with rectangular and circular plates with different supporting conditions, loaded with uniform loads and concentrated forces.*

Keywords: *Critical load, lower-bound, upper-bound, yield line.*