ГРАНИЧНИ УСЛОВИ ЗА ХИДРАУЛИЧКИ ПРОРАЧУН КОД РАВАНСКИХ МОДЕЛА

Золтан Хорват [1]
Мирјана Хорват [2]
УДК: 556.048
DOI:10.14415/zbornikGFS26.01

Резиме: *Овај рад даје преглед могућности задавања граничних услова за хидраулички прорачун код раванских модела. Гранични услов може бити позната вредност јединичног протока, ниво слободне површине воде или зависност јединичног протока и нивоа слободне површине воде. Посебна пажња је посвећена чињеници да је у практичним примерима редовно познат само протицај кроз цео попречни пресек, који се добија из хидрометеоролошких станица или линијских модела. Услед овога, задавање јединичног протока као граничног услова подразумева процену ове величине уз познавање протицаја кроз целокупан разматрани попречни пресек. У раду је наведен предлог алгоритма за превазилажење наведеног проблема. Предложени алгоритам је примењен на теренска мерења спроведена на реци Дунав.*

Кључне речи: *Гранични услови, хидраулички прорачун, равански модел*

1. УВОД

У скорије време се у хидрауличкој пракси редовно користе равански модели [1]. Наводе се једначине струјања у картезијанском координатном систему [2]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\cdot h)+\frac{\partial}{\partial y}(v\cdot h)=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial}{\partial x}\left(Z_{dna}+h\right)+\frac{1}{h\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}\cdot h\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yx}\cdot h\right)\right]-\frac{\tau_{x,dno}}{h\rho},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial}{\partial y}\left(Z_{dna}+h\right)+\frac{1}{h\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xy}\cdot h\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}\cdot h\right)\right]-\frac{\tau_{y,dno}}{h\rho},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где су x, y просторне координате у правцу тока x и управно на правац тока y, t време, u, v компоненте брзине осредњене по дубини тока, редом у правцима x и y,

[1] доц.др. Золтан Хорват, дипл.инж. грађ; Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: +381 24 554 300, e-mail: horvath.czoczek.zoltan@gmail.com
[2] доц.др. Мирјана Хорват, дипл.инж. грађ; Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: +381 24 554 300, e-mail: isic.mirjana@gmail.com

h дубина, Z_{dna} кота дна, g гравитационо убрзање, ρ густина флуида, T_{xx}, T_{yx}, T_{xy}, T_{yy} сума турбулентног напона осредњеног по дубини и чланова дисперзије, а $\tau_{x,dna}$, $\tau_{y,dna}$ напони трења на дну у правцу x и y. Наведене једначине су изведене из *Navier-Stokes*-ових једначина које су потом осредњене по времену, након чега су осредњене и по дубини тока. Основне непознате у наведеним једначинама су две компоненте брзине u, v и дубина h (тј. кота слободне површине воде). Једначине струјања немају јасно дефинисани математички карактер. Наиме, поједини чланови су хиперболичког [3] а поједини чланови параболичког карактера. Међутим, без обзира на наведене потешкоће, може се констатовати да параболични делови једначина захтевају граничне услове на свим границама, док хиперболични делови једначина захтевају граничне услове само на узводним границама рачунског домена.

Као што је наведено, пошто једначине струјања у себи садрже и чланове параболичког типа, решавање система једначина неком од доступних метода подразумева задавање граничних услова на свим границама рачунског домена [4]. Начелно, гранични услов може бити задата вредност јединичног протока, коте слободне површине воде (тј. дубине) или криве протока која даје везу између јединичног протока и коте слободне површине воде (тј. дубине). Напомиње се да је узводни гранични услов обично јединични проток, док је најчешће коришћени низводни гранични услов задата кота слободне површине воде или крива протока.

2. ЈЕДИНИЧНИ ПРОТОК КАО ГРАНИЧНИ УСЛОВ

У наставку се разматра задавање јединичног протока као граничног услова. Разлог због којег је овој тематици неопходно посветити више пажње је чињеница да је у практичним примерима редовно познат само протицај кроз цео попречни пресек, који се добија као мерени податак из хидрометеоролошких станица или као срачуната вредности из линијских модела. Дакле, поставља се питање како распоредити укупан проток дуж предметног попречног пресека да би се добио јединични проток за дискретне рачунске тачке.

У наставку следи опис две методе и њихова анализа. Напомиње се да је посматрани попречни пресек подељен на дискретне (рачунске) тачке. Свака од њих има свој (припадајући) јединични проток q_i, брзину u_i и површину A_i.

2.1. Пропорционалност површина и јединичног протока

Прва метода претпоставља да је произвољни јединични проток q_i пропорционалан максималном јединичном протоку q_{max} исто као што је одговарајућа припадајућа површина A_i пропорционална максималној припадајућој површини A_{max}.

$$q_i / q_{\max} = A_i / A_{\max}$$

$$\frac{q_i}{A_i} = \frac{q_{\max}}{A_{\max}} = u_i = const. \tag{2}$$

Из последње једначине се види да је последица ове методе униформност брзина у попречном пресеку $u_i=const$, што је суштински погрешно. Међутим, метода се овде приказује у целини ради демонстрирања принципа. Из елементарне хидраулике се може написати израз за просечну брзину у попречном пресеку као

$$u_i = \frac{Q}{A} = \frac{\sum q_i}{\sum A_i}, \tag{3}$$

где је Q укупан протицај кроз разматрани попречни пресек. Ако је познато A_{max} онда се помоћу једначина (2) и (3) може написати да је

$$q_{\max} = u_i\, A_{\max} = \frac{\sum q_i}{\sum A_i} A_{\max}. \tag{4}$$

Из једначине (2) се може написати израз за јединични проток у облику

$$q_i = \frac{A_i}{A_{\max}} \cdot q_{\max}.$$

У последњи израз се уврштава (4), што коначно даје

$$q_i = \frac{A_i}{A_{\max}} \cdot \frac{\sum q_i}{\sum A_i} \cdot A_{\max} = A_i \cdot \frac{Q}{\sum A_i}. \tag{5}$$

Иако једначина (5) делује логично, она је начелно погрешна јер брзина у попречном пресеку не може бити константна. Међутим, једначина (5) може послужити за грубу процену јединичног протока у попречном пресеку.

2.2. Пропорционалност површина и брзина

Ова метода претпоставља да је произвољна брзина u_i пропорционална максималној брзини u_{max} исто као што је одговарајућа припадајућа површина A_i пропорционална максималној припадајућој површини A_{max}.

$$u_i / u_{\max} = A_i / A_{\max}$$
$$\frac{q_i}{A_i^2} = \frac{u_{\max}}{A_{\max}} = const. \tag{6}$$

Из последње једначине се види да је

$$u_{\max} = const \cdot A_{\max}. \tag{7}$$

Из елементарне математике је познато да је

$$const = \frac{q_i}{A_i^2} \quad \Rightarrow \quad const = \frac{\sum q_i}{\sum A_i^2},$$

па се коначно може написати израз за константу као

$$const = \frac{\sum q_i}{\sum A_i^2} = \frac{Q}{\sum A_i^2}. \tag{8}$$

Дакле, на крају се помоћу једначина (6), (7) и (8) добијаја образац за распоред јединичних протока унутар разматраног попречног пресека водотока

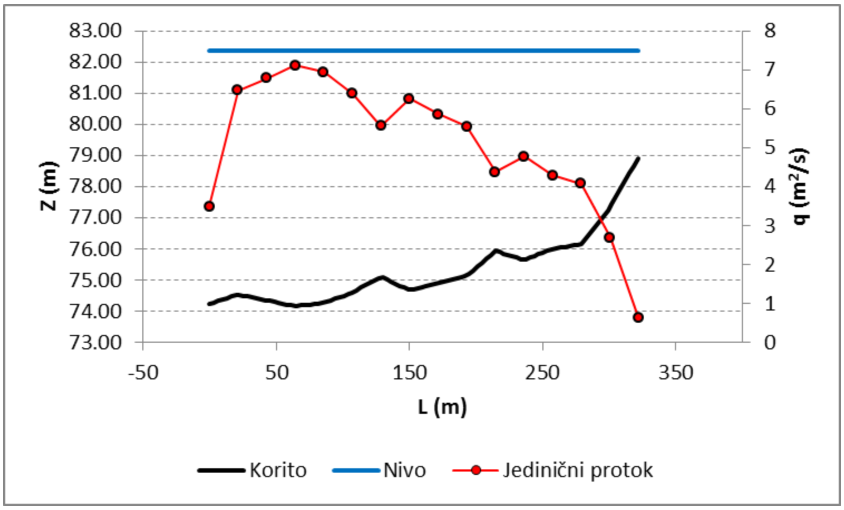
$$q_j = u_{\max} \frac{A_i^2}{A_{\max}} = \frac{Q}{\sum A_i^2} A_{\max} \frac{A_i^2}{A_{\max}} = \frac{Q}{\sum A_i^2} A_i^2. \tag{9}$$

3. ПРИМЕНА НА ТЕРЕНСКЕ ПРИМЕРЕ

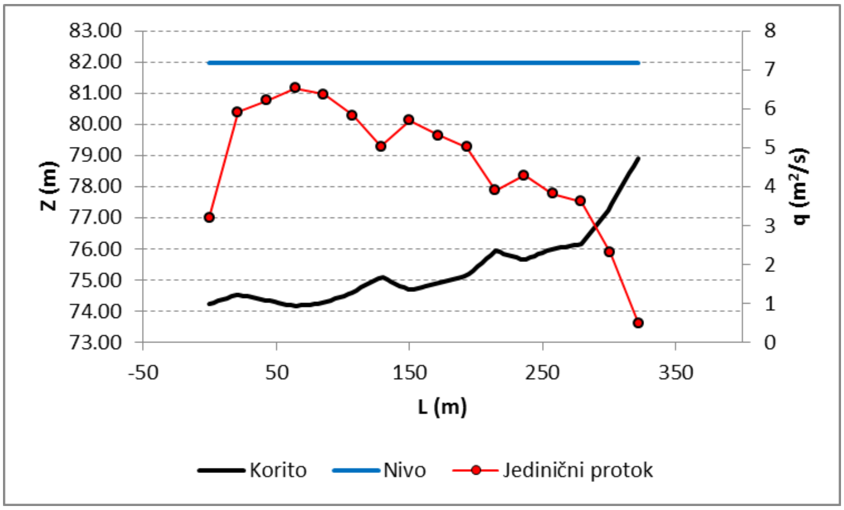
У овом поглављу се наводе два примера нумеричких симулација струјања воде где је било протребно задати јединичне протоке као узводни гранични услов. Оба примера се односе на деонице реке Дунав [5].

3.1. Деоница реке Дунав између Мохача (Х) и Бездана (СРБ)

Теренска мерења су извршена на деоници Дунава у пограничном подручију између Мађарске и Републике Србије у трајању од пет дана од 23. до 27. маја 2011. године. Унутар одабране деонице, ограничене насељима Бездан (ркм 1425.5) у Србији и Мохач (ркм 1446.9) у Мађарској, рађена су детаљна мерења морфологије корита. Кота дна је мерена ехо-сонаром приближно на сваких 100 м, док је положај пловила одређиван ГПС уређајем. Тачност батиметријских мерења је била 0.01 м. Хидрауличка мерења су спроведена у складу са истраживањем аутора [6,7]. Равански хидраулички модел је формиран дуж целе деонице, па је на узводном крају (код насеља Мохач) било неопходно дефинисати гранични услов. На разматраној локацији постоји податак о укупном протицају кроз попречни пресек, који је мерен на локалној хидрометеоролошкој станици. Током трајања кампање скупљања теренских података на мерној станици Мохач је констатован пад протицаја са 1700 м^3/с на 1540 м^3/с. Рачунска мрежа нумеричког модела је имала 16 дискретних тачака управно на главни ток реке. Користећи једначину (9) процењене су вредности јединичних протока дуж попречног пресека за протицај од 1700 м^3/с (слика 1), при чему се јасно види да геометрија корита има пресудан утицај на разматрану величину. Пошто је приказани попречни пресек плићи на десној страни, ту су и вредности q знатно мање, при чему се јасно види да и минималне локалне промене у геометрији проузрокују видљиво различите резултате у расподели разматране величине. Смењењем вредности протицаја смањују се и вредности јединичног протока, уз напомену да услед овога не долази до значајне прерасподеле вредости q (слика 2) унутар самог пресека.



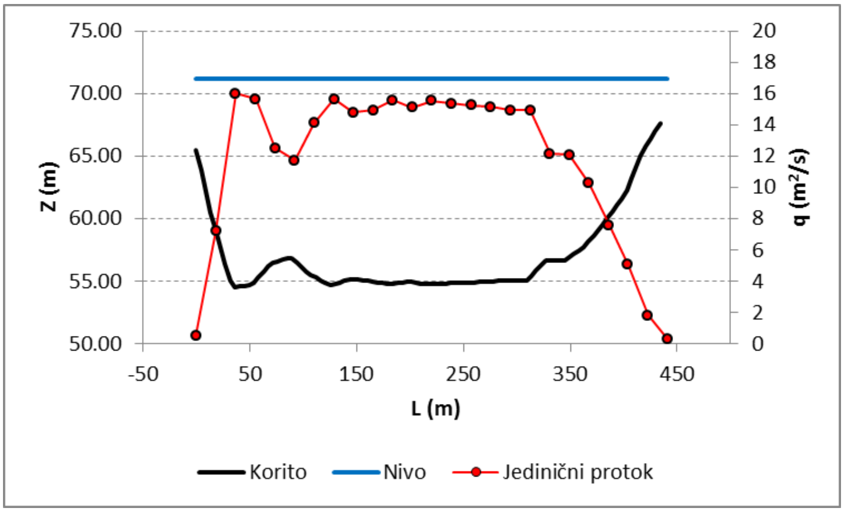
Слика 1. Распоред јединичних протока за протицај од 1700 $м^3/с$



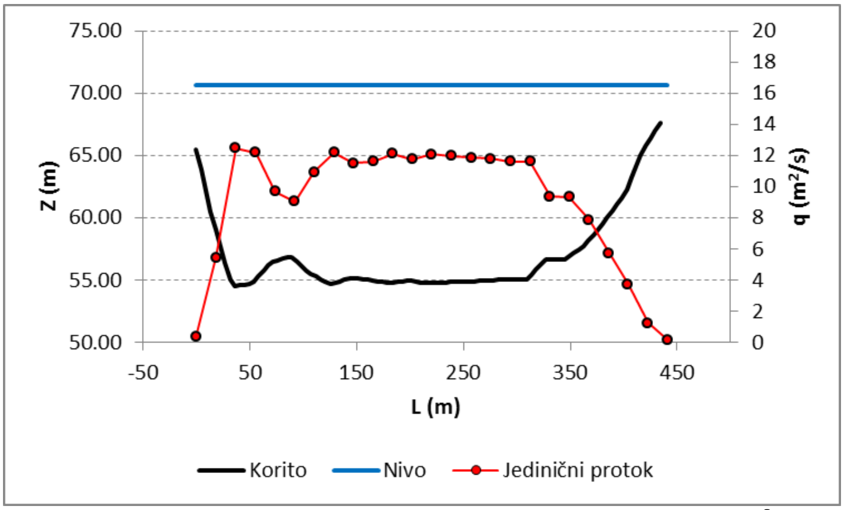
Слика 2. Распоред јединичних протока за протицај од 1540 $м^3/с$

3.2. Деоница реке Дунав код Београда

Теренска мерења су извршена на деоници реке Дунав код Београда у трајању од седам дана од 11. до 17. јула 2013. године. Унутар одабране деонице, која се налази између ркм 1168.00 и ркм 1159.54, рађена су детаљна мерења морфологије корита. Кота дна је мерена ехо-сонаром приближно на сваких 100 м, док је положај пловила одређиван ГПС уређајем. Тачност батиметријских мерења је и у овом случају била 0.01 м. Равански хидраулички модел је формиран дуж целе деонице, па је на узводном крају (ркм 1168.00) било неопходно дефинисати гранични услов. Пошто на датој локацији не постоји хидрометеоролошка станица, формиран је линијски модел који се у низводном правцу простирао до најближе локације са познатим нивограмом, а у узводном смеру до најближе локације са познатим хидрограмом. Овако формиран линијски модел је продуковао бројчане вредности укупног протицаја кроз узводни попречни пресек раванског модела. Констатовано је да је током трајања кампање скупљања теренских података на ркм 1168.00 дошло до опадања протицаја са 5394 м^3/с на 4176 м^3/с. Рачунска мрежа нумеричког модела је имала 25 дискретних тачака управно на главни ток реке. Користећи једначину (9) процењене су вредности јединичних протока унутар попречног пресека за протицај од 5394 м^3/с (слика 3), при чему се јасно види да при обалама где је корито плиће пролази знатно мања количина воде него у средишњем делу попречног пресека. Такође се и у овом случају јасно види да и минималне локалне промене у геометрији проузрокују видљиво различите резултате у расподели разматране величине (што се види на левој страни дијаграма на слици 3). Као што је то и очекивано, смењењем вредности укупног протицаја смањују се и вредности јединичног протока (слика 4). Међутим, у овом случају је пад протицаја далеко значајнији него у првом примеру, па се на слици 4 може приметити да долази и до различите расподеле вредности q унутар разматраног пресека у односу на протицај приказан на слици 3.



Слика 3. Распоред јединичних протока за протицај од 5394 м^3/с



Слика 4. Распоред јединичних протока за протицај од 4176 м^3/с

4. ЗАКЉУЧАК

При формирању равански хидрауличких модела редовно се јавља проблем задавања узводног граничног услова у виду јединичног протока. У пракси се често јавља оскудност мерених података за ову величину, па је у раду приказана једна од могућности процене јединичног протока унутар попречног пресека водотока познавајући одговарајуће геометријске карактеристике и укупан проток кроз разматрани попречни пресек. Приказане су две методологије од којих се прва метода (пропорционалност површина и јединичног протока) може користити само као алат за грубу процену, док друга метода (пропорционалност површина и брзина) начелно нема недвосмислених ограничења. У раду су такође дата два примера која се заснивају на реалним (теренским) мерењима. У оба случаја је квалитативно оцењено да предложена метода пропорционалности површина и брзина даје реалне резултате и она се препоручује за практичну употребу при задавању јединичних протока као гарничних услова код равански модела.

ЗАХВАЛНИЦА

Овај рад је финансиран од стране Министарства за образовање, науку и технолошки развој Републике Србије, број пројекта ТР 37009.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Budinski and M. Spasojević. 2-D Modeling of Flow and Sediment Interaction: Sediment Mixtures. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 140(2): 199-209, **2013**.

[2] З. Хорват, М. Исић и М. Спасојевић. Математичко моделисање раванског неустаљеног течења у отвореним токовима. *Зборник радова / ИИ Симпозијум студената докторских студија из области грађевинарства, архитектуре и заштите животне средине ПхИДАЦ*, 289-296, **2010**.
[3] M. Isic, Z. Horvat, M. Spasojevic. Advection step in the split-operator approach applied to river modeling. *Applied Numerical Mathematics*, 72:1-18, **2013**.
[4] Z. Horvat, A 2-D flow model for alluvial watercourses. *International Conference: Contemporary Achievements in Civil Engineering*, 24.-25. April **2014**.
[5] З. Хорват, Равански модел интеракције воде, наноса и загађивача у природним водотоцима, *Докторска дисертација*, Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, **2014**.
[6] M. Muste, K. Yu, and M. Spasojevic. Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics; Part I: moving-vessel measurements. *Flow Measurement and Instrumentation*, 15:1-16, **2004**.
[7] M. Muste, K. Yu, T. Pratt, and D. Abraham. Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics; Part II: fixed-vessem measurements. *Flow Measurement and Instrumentation*, 15:17-28, **2004**.

BOUNDARY CONDITIONS FOR FLOW COMPUTATION IN 2-D MODELS

Summary: *This work presents some possibilities for imposing boundary conditions for flow computation in 2-D models. Boundary conditions can be given as imposed unit discharges, free-surface elevation or a known rating curve. A frequently encountered situation is that only the total discharge through a cross-section is known, either from a hydro-meteorological station or as a result of a 1-D model. Taking this into consideration, imposing a known unit discharge implies making an estimate of its value knowing only the total discharge through the considered cross-section. This work proposes an algorithm for resolving this issue. The proposed algorithm was implemented on field measurements conducted on the Danube River.*

Keywords: *Boundary conditions, flow computation, 2-D models*