

GEOMETRIJSKI NELINEARNA ANALIZA LINIJSKIH NOSAČA U RAVNI - I DIO: IZVOĐENJE JEDNAČINA

Aleksandar Borković¹

UDK: 517.957:624.072.2

Rezime: U radu se daje detaljno izvođenje geometrijski nelinearnih jednačina statičke ravnoteže konačnog elementa Bernuli-Ojlerovog štapa prema von Karmanovom pristupu. Ove jednačine su izvedene na dva načina: primjenom principa o minimumu totalne potencijalne energije (PMTPE) te iz principa virtuelnog rada (PVR). U prvom slučaju jednačine su linearizovane razvijanjem nepoznate funkcije reziduuma u Tejlorov red, a u drugom isključivanjem nelinearnih članova gradijenta pomjeranja u onom članu virtuelnog rada koji sadrži proizvod priraštaja napona i deformacije. Pokazano je da oba pristupa daju identične jednačine, što je i očekivano jer PMTPE predstavlja specijalan slučaj PVR-a.

Rješenje nelinearnih jednačina ravnoteže se traži inkrementalno-iterativnim postupkom. Opterećenje dijelimo na inkremente a u okviru svakog inkrementa vršimo iteracije da bi došli do ravnotežnog položaja konstrukcije za taj nivo opterećenja. Ovdje je predložen standardni Njutn-Rapsonov iterativni postupak.

Ključne riječi: Bernuli-Ojlerova greda, geometrijski nelinearna analiza, metod konačnih elemenata

1. UVOD

Kao posljedica ekonomskih i estetskih zahtjeva mnoge savremene konstrukcije, tipično čelične, se nalaze u stanju geometrijske nelinearnosti. S obzirom na napredak tehnologije i dostupnost jeftinih moćnih računara, inženjer više nema izgovor da ne sprovede nelinearnu analizu. Ova analiza se obično svodi na "štikliranje" opcije u odgovarajućem softverskom paketu, što je sasvim u redu ako korisnik razumije šta je modelirano i na koji način softver radi. Prikazani postupak izvođenja geometrijski nelinearnih jednačina jednostavnog konačnog elementa BE grede može biti od koristi u ovakvim situacijama.

Dva su cilja ovog rada. Prvi je da sažeto predstavi geometrijski nelinearnu formulaciju Bernuli-Ojlerove (*Bernoulli-Euler*, BE) grede a drugi da uporedi postupak izvođenja jednačina primjenom principa virtuelnog rada (PVR) i primjenom principa o minimumu totalne potencijale energije (PMTPE). Naime, uz nekoliko izuzetaka [1, 2, 3, 4], geometrijski nelinearna analiza konstrukcija ne zauzima značajno mjesto u domaćoj literaturi izuzev preko uprošćenih jednačina "teorije II reda" [2] ravanskog štapa. Analiza nelinearnog ponašanja linijskih nosača se može naći u [1, 2] ali u opštem obliku bez

¹ mr Aleksandar Borković, dipl. inž. građ, Arhitektonsko-građevinski fakultet Banjaluka, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, tel: +38765917366, e-mail: aborkovic@agfbl.org

konkretnih primjera. U referentnoj svjetskoj literaturi [5, 6, 7, 8] nelinearna analiza BE elementa ne zauzima značajno mjesto, vjerovatno zato što se taj slučaj smatra trivijalnim. Mnogo češće se za edukativne svrhe koristi nešto jednostavniji element rešetke [6, 7]. U [7] je izvedena opšta procedura za izoparametarski konačni element dok je u [6] data formulacija konačnog elementa plitkog luka.

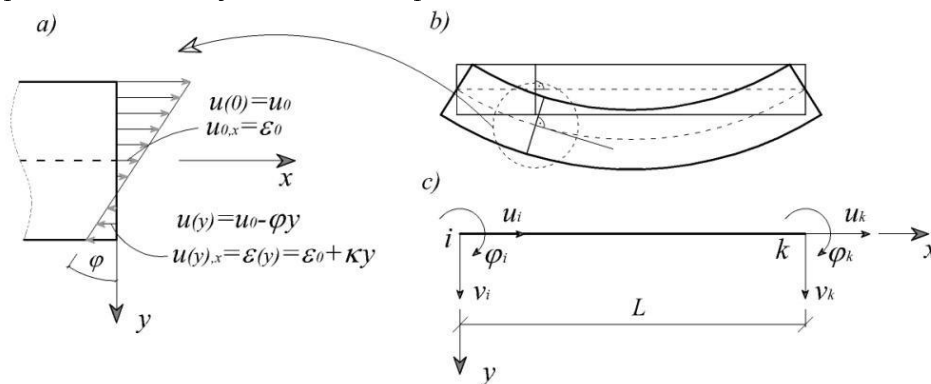
Drugi cilj rada jeste da se pomenute jednačine izvedu na dva načina. Naime, u literaturi se izvođenje nelinearnih jednačina ravnoteže čeće provodi primjenom PVR-a [3, 5, 6, 7] ali nerijetko i primjenom PMTPE [1, 2, 4, 6]. S obzirom na to da je PMTPE samo specijalan slučaj PVR-a primijenjenog na elastične sisteme pod dejstvom konzervativnih sila, jasno je da bi oba pristupa trebala dati isti rezultat u posmatranom slučaju.

Predmet rada su isključivo konstrukcije koje se nalaze u području linerane elastičnosti. U stvarnosti, geometrijska i materijalna nelinearnost se pojavljuju istovremeno. Nekad je dominantna jedna a nekad druga. Obično se očekuje da će geometrijska nelinearnost prvo doći do izražaja kod vitkih čeličnih konstrukcija. Nasuprot njima, materijalna nelinearnost je dominantna kod masivnih betonskih konstrukcija.

S obzirom da se razmatra jednostavan slučaj, gdje se javlja jednoosno naprezanje, ovaj rad može poslužiti kao osnova za učenje, razumijevanje i sistematizaciju znanja iz geometrijski nelinearne analize konstrukcija.

2. KONAČNI ELEMENT BERNULI-OJLEROVE GREDE

Dobro poznata BE hipoteza o nedeformabilnim presjecima koji ostaju upravni na deformisanu osu štapa (slika 1.b) omogućava svođenje analize štapa na analizu samo jedne materijalne linije - ose štapa. Ova pretpostavka sa zadovoljavajućom tačnošću opisuje ponašanje vitkih greda. Ako je greda izložena savijanju i aksijalnom naprezanju, tada pomjeranja u pravcu ose štapa proizvoljnog presjeka kao i odgovarajuća jedina komponenta deformacije ε_x može da se predstavi kao na slici 1.a.



Slika 1. a) podužna pomjeranja presjeka BE grede b) BE greda prije i nakon savijanja c) generalisana pomjeranja elementa sa dva čvora

U ovom radu analiziramo samo element sa dva čvora. Za osnovne nepoznate veličine, prema "deformacionom modelu", usvajamo generalisana pomjeranja čvorova, slika 1.c.

Razmatraćemo najopštiji slučaj kada štap ima šest nezavisnih čvornih pomjeranja. Ova pomjeranja slažemo u dva vektora, jedan za savijanje i drugi za aksijalno naprezanje

$$\mathbf{q}_s^T = [v_i \quad \varphi_i \quad v_k \quad \varphi_k] \quad \mathbf{q}_a^T = [u_i \quad u_k]. \quad (1)$$

Interpolacione funkcije, koje su Hermitovi (*Hermite*) polinomi, se dobijaju standardnom procedurom pretpostavljajući kubnu promjenu ugiba te linearnu promjenu podužnog pomjeranja [2, 9]:

$$\mathbf{N}_s^T = \left[1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \mid x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \mid 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \mid -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \quad (2)$$

$$\mathbf{N}_s^T = [N_{s1} \quad N_{s2} \quad N_{s3} \quad N_{s4}] \quad \mathbf{N}_a^T = \left[1 - \frac{x}{L} \mid \frac{x}{L} \right] = [N_{a1} \quad N_{a2}].$$

Funkciju podužnog pomjeranja i ugiba u funkciji čvornih nepoznatih pišemo kao

$$u(x) = \mathbf{N}_a^T \mathbf{q}_a \quad v(x) = \mathbf{N}_s^T \mathbf{q}_s. \quad (3)$$

U ovom radu će se, kako je to uobičajeno [5], kao mjera napona koristiti drugi Piola-Kirchoff (*Piola-Kirchoff*) tenzor napona a kao mjera deformacije Grin-Lagranžov (*Green-Lagrange*) tenzor deformacije koji u opštem slučaju ima oblik

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}). \quad (4)$$

Jedina komponenta tenzora deformacije, koja se javlja kod BE štapa jeste dilatacija u pravcu ose štapa te stoga uvodimo sljedeće označavanje

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} + \frac{1}{2} (u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) = u_{,x} + \frac{1}{2} (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) = \varepsilon_x \quad (5)$$

Materijalna linearnost nalaže korištenje Hukovog zakona koji, istina, narušava početnu BE hipotezu [9] ali sa zanemarljivim posljedicama

$$\sigma_{xx} = \sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (6)$$

Komponenta w (pomjeranje u pravcu z ose) ne postoji jer razmatramo nosače u ravni xy opterećene isključivo u toj ravni. Komponenta $u_{,x}^2$ ne bi trebala imati značajan uticaj kod realnih konstrukcija izuzev kad se razmatra i materijalna nelinearnost. Slijedi da izraz za dilataciju u pravcu ose štapa možemo pojednostaviti kao

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \quad (7)$$

što odgovara vonKarmanovoj teoriji. Kaže se da ovakav pristup opisuje velika pomjeranja i rotacije ali male deformacije (*large displacements and rotations but small strain*) [5].

Zgodno je dilataciju razdvojiti na dio nastao od savijanja i dio od aksijalnog naprezanja

$$\varepsilon_x = u_{0,x} + y\kappa + \frac{1}{2} v_{,x}^2 = \varepsilon_a + \varepsilon_s \quad (8)$$

gdje su

$$\varepsilon_a = u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \quad \varepsilon_s = y\kappa. \quad (9)$$

Koristeći zapis preko čvornih pomjeranja(3) imamo

$$\varepsilon_a = \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \quad \varepsilon_s = -\gamma \mathbf{N}_{s,xx}^T \mathbf{q}_s. \quad (10)$$

3. VIRTUELNI RAD

Virtuelni rad unutrašnjih sila tokom vremenskog intervala $(0, t+\Delta t)$ je

$$\delta {}^{t+\Delta t}_0 R_u = \int_V {}^{t+\Delta t}_0 \sigma^{ij} \delta {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ji} dV \quad (11)$$

gdje su σ^{ij} komponente drugog Piola-Kirhofovog tenzora napona a ε_{ji} komponente Grin-Lagranžovog tenzora deformacije. U uslovima BE hipoteze ovaj rad se svodi na

$$\delta {}^{t+\Delta t}_0 R_u = \int_V {}^{t+\Delta t}_0 \sigma_x \delta {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_x dV \quad (12)$$

Koristićemo inkrementalnu formulaciju prema kojoj svaku veličinu u nekom proizvoljnom trenutku $t+\Delta t$ predstavljamo kao zbir poznatog dijela (ostvarenog u intervalu od 0 do t) i inkrementa (priraštaja) koji je nepoznat a koji se ostvaruje u intervalu od t do $t+\Delta t$. Pristup kada sve veličine (napone, deformacije i pomjeranja) referišemo u odnosu na početnu konfiguraciju se naziva "totalni langražijan" (*total langragian*). Ako bi veličine mjerili u odnosu na prethodnu konfiguraciju tada je riječ o "ažuriranom langranžijanu" (*updated langrangian*). Ovdje koristimo totalni langražijan. Dakle, vršimo sljedeću dekompoziciju napona i deformacije

$${}^{t+\Delta t}_0 \sigma_x = {}^t_0 \sigma_x + {}_0 \sigma_x \quad {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_x = {}^t_0 \varepsilon_x + {}_0 \varepsilon_x. \quad (13)$$

Iz ovih izraza slijedi da je varijacija deformacije u intervalu $(0, t+\Delta t)$ jednaka varijaciji njenog priraštaja

$$\delta {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_x = \delta {}_0 \varepsilon_x. \quad (14)$$

S obzirom na usvojenu pretpostavku (7) imamo

$${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_x = {}^{t+\Delta t}_0 u_{,x} + \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_0 v_{,x}^2 = \left({}^t_0 u_{,x} + {}_0 u_{,x} \right) + \frac{1}{2} \left({}^t_0 v_{,x} + {}_0 v_{,x} \right)^2 = {}^t_0 \varepsilon_x + {}_0 \varepsilon_x \quad (15)$$

pri čemu je ukupna ostvarena deformacija do trenutka t

$${}^t_0 \varepsilon_x = {}^t_0 u_{,x} + \frac{1}{2} {}^t_0 v_{,x}^2 \quad (16)$$

a nepoznati priraštaj od trenutka t do $t+\Delta t$

$${}_0 \varepsilon_x = \left({}_0 u_{,x} + {}^t_0 v_{,x} {}_0 v_{,x} \right) + \frac{1}{2} {}_0 v_{,x}^2 = {}_0 e_x + {}_0 \eta_x \quad (17)$$

gdje smo uveli sljedeće oznake

$${}_0e_x = {}_0u_{,x} + {}_0^t v_{,x} {}_0v_{,x} \quad {}_0\eta_x = \frac{1}{2} {}_0v_{,x}^2. \quad (18)$$

${}_0e_x$ predstavlja dio priraštaja deformacije koji je linearan po nepoznatim priraštajima gradijenata pomjeranja dok je ${}_0\eta_x$ nelinearni dio.

Priraštaj deformacije preko interpolacionih funkcija i čvornih pomjeranja pišemo kao

$$\begin{aligned} {}_0e_x &= {}_0u_{,x} + {}_0^t v_{,x} {}_0v_{,x} = {}_0u_{0,x} + y {}_0K + {}_0^t v_{,x} {}_0v_{,x} = \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a - y \mathbf{N}_{s,xx}^T \mathbf{q}_s + \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \\ {}_0\eta_x &= \frac{1}{2} {}_0v_{,x}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Odgovarajuće varijacije su

$$\begin{aligned} \delta {}_0e_x &= \delta {}_0u_{0,x} + y \delta {}_0K + {}_0^t v_{,x} \delta {}_0v_{,x} = \mathbf{N}_{a,x}^T \delta {}_0\mathbf{q}_a - y \mathbf{N}_{s,xx}^T \delta {}_0\mathbf{q}_s + \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta {}_0\mathbf{q}_s \\ \delta {}_0\eta_x &= {}_0v_{,x} \delta {}_0v_{,x} = \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta {}_0\mathbf{q}_s. \end{aligned} \quad (20)$$

Sada ćemo jednačinu (12), koristeći izraze (13) i (17), zapisati kao

$$\begin{aligned} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0R_u &= \int_V ({}_0^t \sigma_x + {}_0\sigma_x) \delta {}_0\varepsilon_x dV = \int_V {}_0^t \sigma_x \delta {}_0\varepsilon_x dV + \int_V {}_0\sigma_x \delta {}_0\varepsilon_x dV = \\ &= \int_V {}_0^t \sigma_x \delta {}_0e_x dV + \int_V {}_0^t \sigma_x \delta {}_0\eta_x dV + \int_V {}_0\sigma_x \delta {}_0\varepsilon_x dV. \end{aligned} \quad (21)$$

Ovo je sistem nelinearnih jednačina jer se u trećem sabirku na desnoj strani jednačine javlja proizvod dvije nepoznate veličine, priraštaja napona i priraštaja deformacije. Rješenje sistema nelinearnih jednačina se mora tražiti nekom iterativnom procedurom. Uobičajeno je korištenje Njutm-Rapsonovog (*Newton-Raphson*) postupka koji se zasniva na sukcesivnoj linearizaciji problema razvijanjem funkcije u Tejlorov (*Taylor*) red te zadržavanjem samo linearnog člana [5].

Ako zanemarimo nelinearni dio deformacije u nelinearnom sabirku izraza (21) dobijamo

$$\delta {}_0\varepsilon_x = \delta ({}_0e_x + {}_0\eta_x) \cong \delta {}_0e_x \quad {}_0\sigma_x = E({}_0e_x + {}_0\eta_x) \cong E {}_0e_x. \quad (22)$$

Ovim smo izvršili linearizaciju problema te jednačina (21) postaje

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_0R_u = \int_V {}_0^t \sigma_x \delta {}_0e_x dV + \int_V {}_0^t \sigma_x \delta {}_0\eta_x dV + \int_V e_x E \delta {}_0e_x dV. \quad (23)$$

Identičnu jednačinu bi dobili i razvijanjem nelinearne funkcije u Tejlorov red [5].

Priraštaj rada spoljašnjih sila je

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_0R_s = \int_L {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u} dx \quad (24)$$

gdje je $\mathbf{P}$ vektor spoljašnjih koncentrisanih i raspodijeljenih opterećenja na elementu a u vektor komponentalnih pomjeranja napadnih tačaka spoljašnjih sila [9].

Principa virtualnih pomjeranja izražava jednakost radova spoljašnjih i unutrašnjih sila na virtualnim pomjeranjima sistema

$$\delta^{t+\Delta t} R_u = \delta^{t+\Delta t} R_s \quad (25)$$

što pišemo kao

$$\int_V {}_0 e_x E \delta_0 e_x dV + \int_V {}_0^t \sigma_x \delta_0 \eta_x dV = \int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}^T \delta \mathbf{u} dx - \int_V {}_0^t \sigma_x \delta_0 e_x dV. \quad (26)$$

Ispisaćemo sve članove ove jednačine u razvijenom obliku. Prvi sabirak sa lijeve strane

$$\begin{aligned} \int_V {}_0 e_x E \delta_0 e_x dV &= \int_V \left({}_0 u_{0,x} + y_0 \kappa + {}_0^t v_{,x} {}_0 v_{,x} \right) E \delta \left({}_0 u_{0,x} + y_0 \kappa + {}_0^t v_{,x} {}_0 v_{,x} \right) dV = \\ &= \int_L \left({}_0 u_{0,x} EF \delta_0 u_{0,x} + {}_0 u_{0,x} EF {}_0^t v_{,x} \delta_0 v_{,x} + {}_0 \kappa EI \delta_0 \kappa + {}_0^t v_{,x} {}_0 v_{,x} EF \delta_0 u_{0,x} + \right. \\ &\quad \left. {}_0^t v_{,x} {}_0 v_{,x} EF {}_0^t v_{,x} \delta_0 v_{,x} \right) dx = \int_L \left(\mathbf{N}_{a,x}^T {}_0 \mathbf{q}_a EF \mathbf{N}_{a,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_a + \mathbf{N}_{a,x}^T {}_0 \mathbf{q}_a EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_s + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0 \mathbf{q}_s EI \mathbf{N}_{s,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_s + \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0 \mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{a,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_a + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0 \mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_s \right) dx = {}_0 \mathbf{q}_a^T \int_L \mathbf{N}_{a,x} EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_a + \\ &\quad {}_0 \mathbf{q}_a^T \int_L \mathbf{N}_{a,x} EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s + {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} EI \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s + \\ &\quad {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_a + {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s = \\ &= {}_0 \mathbf{q}_a^T \mathbf{K}_a \delta_0 \mathbf{q}_a + {}_0 \mathbf{q}_a^T \mathbf{K}_{as} \delta_0 \mathbf{q}_s + {}_0 \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \delta_0 \mathbf{q}_s + {}_0 \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_{sa} \delta_0 \mathbf{q}_a + {}_0 \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \delta_0 \mathbf{q}_s \end{aligned} \quad (27)$$

F je površina poprečnog presjeka a I moment inercije površine za osu z .

Drugi sabirak sa lijeve strane glasi:

$$\begin{aligned} \int_V {}_0^t \sigma_x \delta_0 \eta_x dV &= \int_V {}_0^t \sigma_x \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0 \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_s dV = \int_L {}_0^t \bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0 \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_s dx \\ &= {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} {}_0^t \bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s = {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \left(\mathbf{N}_{a,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \right) EF \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s \\ &= {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{a,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_a EF \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} {}_0 \mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s \\ &= {}_0 \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_a \delta_0 \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} {}_0 \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \delta_0 \mathbf{q}_s \end{aligned} \quad (28)$$

U prethodnom izrazu sa ${}_0^t \bar{\mathbf{N}}$ je označena normalna sila ostvarena u intervalu od 0 do t

$${}_0^t \bar{\mathbf{N}} = {}_0^t \varepsilon_{x0} EF = \left(u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \right) EF = \left(\mathbf{N}_{a,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}_0^t \mathbf{q}_s \right) EF.$$

Drugi sabirak sa desne strane jednačine (26):

$$\begin{aligned}
\int_V {}^t\sigma_x \delta_0 e_x dV &= \int_V {}^t\sigma_x \delta \left(\mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a - \nu \mathbf{N}_{s,xx}^T \mathbf{q}_s + \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \right) dV = \\
&= \int_L {}^t\bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_{a,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_a dx - \int_L {}^t\bar{\mathbf{M}} \mathbf{N}_{s,xx}^T \delta_0 \mathbf{q}_s dx + \int_L {}^t\bar{\mathbf{N}} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \delta_0 \mathbf{q}_s dx = \\
&= \int_L \left(\mathbf{N}_{a,x}^T {}^t\mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \right) EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_a + \int_L \mathbf{N}_{s,xx}^T {}^t\mathbf{q}_s EI \mathbf{N}_{s,xx}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s + \\
&= \int_L \left(\mathbf{N}_{a,x}^T {}^t\mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \right) EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s = {}^t\mathbf{q}_a^T \int_L \mathbf{N}_{a,x} EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_a + (29) \\
&= \frac{1}{2} {}^t\mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_a + {}^t\mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,xx} EI \mathbf{N}_{s,xx}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s + \\
&= {}^t\mathbf{q}_a^T \int_L \mathbf{N}_{a,x} EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{q}_s^T \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T dx \delta_0 \mathbf{q}_s \\
&= {}^t\mathbf{q}_a^T \mathbf{K}_a \delta_0 \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{K}}_{sa} \delta_0 \mathbf{q}_a + {}^t\mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \delta_0 \mathbf{q}_s + {}^t\mathbf{q}_a^T \bar{\mathbf{K}}_{as} \delta_0 \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{K}}_s \delta_0 \mathbf{q}_s
\end{aligned}$$

Sa ${}^t\bar{\mathbf{M}}$ je označen momenat savijanja ostvaren u intervalu od 0 do t

$${}^t\bar{\mathbf{M}} = -\nu_{,xx} EI = -\mathbf{N}_{s,xx}^T {}^t\mathbf{q}_s EI. \quad (30)$$

U prethodnim jednačinama smo uveli sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_a &= \int_L \mathbf{N}_{a,x} EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx & \mathbf{K}_s &= \int_L \mathbf{N}_{s,xx} EI \mathbf{N}_{s,xx}^T dx \\
\bar{\mathbf{K}}_s &= \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T dx & \bar{\mathbf{K}}_{sa} &= \bar{\mathbf{K}}_{as}^T = \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T {}^t\mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{a,x}^T dx \\
\bar{\mathbf{K}}_a &= \int_L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{a,x}^T {}^t\mathbf{q}_a EF \mathbf{N}_{s,x}^T dx.
\end{aligned} \quad (31)$$

Rad spoljašnjih sila, razdvajajući ga na aksijalni i savijajući dio, ćemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}^T \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} dx &= \int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{N}} \delta_0 \mathbf{q} dx = \int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_a^T \bar{\mathbf{N}}_a \delta_0 \mathbf{q}_a dx + \int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_s^T \bar{\mathbf{N}}_s \delta_0 \mathbf{q}_s dx = \\
&= \int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_a^T \bar{\mathbf{N}}_a dx \delta_0 \mathbf{q}_a + \int_L {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_s^T \bar{\mathbf{N}}_s dx \delta_0 \mathbf{q}_s = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_a^T \delta_0 \mathbf{q}_a + {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_s^T \delta_0 \mathbf{q}_s
\end{aligned} \quad (32)$$

gdje su sa $\bar{\mathbf{N}}$, $\bar{\mathbf{N}}_a$ i $\bar{\mathbf{N}}_s$ označene odgovarajuće matrice interpolacionih funkcija [9].

Jednačinu (26), koristeći izraze (27), (28), (29) i (32), možemo matrično napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} {}_0\mathbf{q}_a^T & {}_0\mathbf{q}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \bar{\mathbf{K}}_{as} \\ \bar{\mathbf{K}}_{sa} & \mathbf{K}_s + \bar{\mathbf{K}}_s + \bar{\mathbf{K}}_a + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_s \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{q}_a \\ {}_0\mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}_a^T & {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}_s^T \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{q}_a \\ {}_0\mathbf{q}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^t{}_0\mathbf{q}_a^T & {}^t{}_0\mathbf{q}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \bar{\mathbf{K}}_{as} \\ \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_{sa} & \mathbf{K}_s + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_s \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} {}^t{}_0\mathbf{q}_a \\ {}^t{}_0\mathbf{q}_s \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (33)$$

S obzirom na to da varijacije priraštaja pomjeranja moraju biti različite od nule, slijedi sljedeći sistem jednačina gdje je svaki član transponovan:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \bar{\mathbf{K}}_{as} \\ \bar{\mathbf{K}}_{sa} & \mathbf{K}_s + \bar{\mathbf{K}}_s + \bar{\mathbf{K}}_a + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{q}_a \\ {}_0\mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}_a \\ {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_{as} \\ \bar{\mathbf{K}}_{sa} & \mathbf{K}_s + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t{}_0\mathbf{q}_a \\ {}^t{}_0\mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}_a - \mathbf{K}_a {}^t{}_0\mathbf{q}_a + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_{as} {}^t{}_0\mathbf{q}_s \\ {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}_s - \bar{\mathbf{K}}_{sa} {}^t{}_0\mathbf{q}_a + \mathbf{K}_s {}^t{}_0\mathbf{q}_s + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{K}}_s {}^t{}_0\mathbf{q}_s \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (34)$$

Ovo je sistem linearnih jednačina po nepoznatim priraštajima pomjeranja koji jednostavnije zapisujemo kao

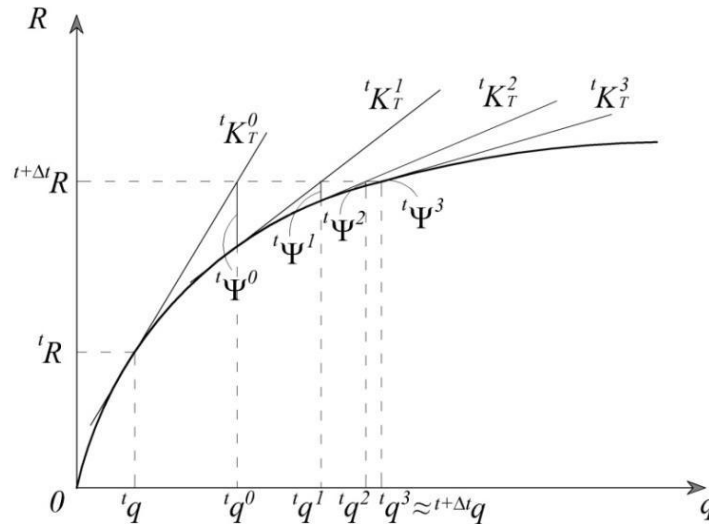
$${}^t{}_0\mathbf{K}_T {}_0\mathbf{q} = {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R} - {}^t{}_0\mathbf{F} = -{}^t{}_0\mathbf{\Psi}. \quad (35)$$

U ovoj jednačini $\mathbf{K}_T$ je tangentna matrica krutosti, ${}_0\mathbf{q}$ vektor priraštaja pomjeranja, ${}^t{}_0\mathbf{F}$ vektor unutrašnjih čvornih sila, ${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}$ vektor spoljašnjeg čvornog opterećenja a ${}^t{}_0\mathbf{\Psi}$ vektor neuravnoteženih sila (reziduum).

Rješavanjem ovog sistema jednačina dobijamo inkrement pomjeranja koji dodajemo na ukupno ostvareno pomjeranje. Ovako dobijeno ukupno pomjeranje neće uravnotežiti spoljašnje opterećenje zbog uvedene pretpostavke (22). Naime, već prilikom linearizacije smo počeli pripremati jednačine za rješavanje Njutr-Rapsonovom metodom. Primjena ove metode zahtijeva da u svakom inkrementu vršimo iteracije tako što opet formiramo tangentnu matricu krutosti i vektor neuravnoteženih sila (sa uključenim novim, tačnijim, pomjeranjem) te određujemo novi inkrement pomjeranja. Iteracije ponavljamo sve dok rješenje ne iskonvergira ka traženom sa zadovoljavajućom tačnošću koju unaprijed definišemo.

Na slici 2 je prikazan uprošćen prikaz rješavanja nelinearne jednačine primjenom Njutr-Rapsonovog postupka. Pretpostavljamo da poznajemo položaj konstrukcije u trenutku t te tražimo položaj koji će uravnotežiti opterećenje u trenutku $t+\Delta t$. Poznavanjem tangentne matrice krutosti u trenutku t , možemo odrediti inkrement pomjeranja koji odgovara opterećenju ${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{R}$. Potom inkrement dodajemo na ukupno pomjeranje te određujemo reziduum. Ovaj postupak ponavljamo sve dok rješenje ne iskonvergira, što je na uprošćenoj skici 2 već u trećoj iteraciji.

Kriterij za kovergenciju se može postaviti na mnogo načina. U ovom istraživanju je postavljen uslov da norma vektora reziduuma bude manja od 0.001.



Slika 2. Uprošćen prikaz Njutn-Rapsonove procedure

Opisani postupak se naziva "pun Njutn-Rapsonov metod" jer se tangentna matrica krutosti formira u svakoj iteraciji. Postoji nekoliko varijanti modifikovanog Njutn-Rapsonovog metoda koje samo ponekad, ili čak nikad ne formiraju tangentnu matricu krutosti [6]. Ovim se štedi računarsko vrijeme potrebno za njeno formiranje ali se istovremeno produžava period potreban za proračun povećanog broja potrebnih iteracija. Može se pokazati da pun Njutn-Rapsonov metod ima kvadratnu konvergenciju ako su zadovoljeni određeni uslovi [5, 10]. Najbitniji od ovih uslova jeste da je početno, pretpostavljeno rješenje blizu traženog. Ovo je u inženjerskim problemima skoro uvijek zadovoljeno, izuzev u slučaju nagle promjene konfiguracije posmatrane konstrukcije. Blizina početne i krajnje konfiguracije nam takođe omogućava da od više rješenja sistema nelinearnih jednačina uvijek dobijemo ono koje odgovara realnom odzivu konstrukcije.

4. MINIMUM TOTALNE POTENCIJALNE ENERGIJE

Energija deformacije BE štapa u uslovima linearne elastičnosti je

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x E \varepsilon_x dV. \quad (36)$$

Kako je uobičajeno u literaturi [1, 2, 4], izostavićemo indekse intervala na koji se odnose posmatrane veličine i pretpostaviti da je uvijek riječ o ukupnim naponima, deformacijama i pomjeranjima, od početne nenapregnute do trenutne konfiguracije.

Koristeći dekompoziciju (8) energiju deformacije možemo pisati kao

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_a + \varepsilon_s) E (\varepsilon_a + \varepsilon_s) dV = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_a E \varepsilon_a + 2 \varepsilon_s E \varepsilon_a + \varepsilon_s E \varepsilon_s) dV = \\
&= \frac{1}{2} \int_{LF} ((u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2) E (u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2) + 2 y \kappa E (u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2) + y^2 \kappa E \kappa) dF dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_L ((u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2) E F (u_{0,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2) + \kappa E I \kappa) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_L (u_{0,x} E F u_{0,x} + \frac{1}{4} v_{,x}^2 E F v_{,x}^2 + v_{,x}^2 E F u_{0,x} + \kappa E I \kappa) dx
\end{aligned} \tag{37}$$

Bitno je napomenuti da su u pitanju proizvodi skalarnih veličina te ih možemo komutirati po potrebi. Uvodeći zapis preko (3) imamo

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_L (\mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a E F \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a + \frac{1}{4} \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s E F \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s + \\
&\quad \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s E F \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a + \mathbf{N}_{s,xx}^T \mathbf{q}_s E I \mathbf{N}_{s,xx}^T \mathbf{q}_s) dx.
\end{aligned} \tag{38}$$

Sada ćemo izvršiti odgovarajuće komutacije unutar svih sabiraka

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_L (\mathbf{q}_a^T \mathbf{N}_{a,x} E F \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a + \frac{1}{4} \mathbf{q}_s^T \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s E F \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s + \\
&\quad \mathbf{q}_s^T \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s E F \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_s^T \mathbf{N}_{s,xx} E I \mathbf{N}_{s,xx}^T \mathbf{q}_s) dx
\end{aligned} \tag{39}$$

da bi mogli uvesti sljedeći matrični zapis

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{K}_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{8} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_{sa} \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s. \tag{40}$$

Uvedene oznake su već definisane jednačinama (31). Jedina razlika je u izostavljanju oznake intervala na koji se odnose pomjeranja.

Potencijal spoljašnjih sila je

$$W = -\mathbf{q}_s^T \mathbf{R}_s - \mathbf{q}_a^T \mathbf{R}_a \tag{41}$$

te je ukupna potencijalna energija elementa

$$\Pi = U + W. \tag{42}$$

Potreban uslov ravnoteže jeste da totalna potencijalna energija ima stacionarnu vrijednost. Dovoljan uslov jeste da ta energija bude u minimumu, tj. da je druga varijacija veća od nule što je obezbijeđeno kvadratnom formom matrice krutosti.

Dakle, prva varijacija potencijalne energije po pomjeranjima mora biti jednaka nuli

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = 0. \tag{43}$$

Slijedi da je potrebno naći gradijent skalarnog polja (potencijalne energije) i izjednačiti ga sa nulom (jer su virtuelna pomjeranja po definiciji različita od nule)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_a} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_s} \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Ovi uslovi ravnoteže predstavljaju sistem nelinearnih jednačina po nepoznatim čvornim pomjeranjima. Vektor neuravnoteženih sila (reziduum, $\mathbf{\Psi}$) smo uveli u prethodnom odjeljku.

Sada ćemo prikazati izvođenje Njutn-Rapsonove metode. Kao što je već napomenuto, ovaj postupak se zasniva na aproksimaciji funkcije u okolini neke tačke Tejlrovim redom, pri čemu zadržavamo samo linearni član. Naravno, interesuju nas vrijednosti promjenljive za koju je funkcija (u ovom slučaju reziduum) jednaka nuli.

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q}^0 + \Delta \mathbf{q}^0) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^0 = \mathbf{\Psi}(\mathbf{q}^0) + \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q}^0 = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{q}^0 = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{\Psi}(\mathbf{q}^0) \quad (45)$$

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^0 + \Delta \mathbf{q}^0 \quad \mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}^i$$

Postupak je iterativan te ga ponavljamo dok jednačine ravnoteže ne budu zadovoljene sa traženom tačnošću.

Možemo vidjeti da se dobija identičan oblik jednačina kao i (35). Vektor neuravnoteženih sila predstavlja gradijent totalne potencijalne energije. Tangentna matrica krutosti je Hesijan (*Hessian*) totalne potencijalne energije.

Izvedimo sada jednačine ravnoteže:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{K}_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{8} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_{sa} \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s - \mathbf{q}_s^T \mathbf{R}_s - \mathbf{q}_a^T \mathbf{R}_a \quad (46)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_a} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{sa}^T \mathbf{q}_s - \mathbf{R}_a \\ \frac{1}{2} \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_{sa} \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{q}_s} + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s - \mathbf{R}_s \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}. \quad (47)$$

Prilikom diferenciranja člana $\frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_{sa} \mathbf{q}_a$ po $\mathbf{q}_s$ potrebno je malo izmijeniti oblik posmatranog člana energije deformacije. Da bi ovo izveli, posmatraćemo zapis preko interpolacionih funkcija i pomjeranja

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_{sa} \mathbf{q}_a = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{q}_s^T \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s EF \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a dx. \quad (48)$$

S obzirom na to da su $\mathbf{q}_s^T \mathbf{N}_{s,x}$ i $\mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a$ skalarne funkcije, izvršićemo odgovarajuće komutacije te dobiti:

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{K}}_{sa} \mathbf{q}_a = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{q}_s^T \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a EF \mathbf{N}_{s,x}^T \mathbf{q}_s dx. \quad (49)$$

Sada uvođenjem oznake

$$\bar{\mathbf{K}}_a = \int_0^L \mathbf{N}_{s,x} \mathbf{N}_{a,x}^T \mathbf{q}_a EF \mathbf{N}_{s,x}^T dx \quad (50)$$

možemo uvesti drugo označavanje istog člana energije deformacije:

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{K}}_{sa} \mathbf{q}_a = \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{K}}_a \mathbf{q}_s \quad (51)$$

te konačno dobiti gradijent potencijalne energije

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_a} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}}_{sa}^T \mathbf{q}_s - \mathbf{R}_a \\ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}}_s \mathbf{q}_s + \bar{\mathbf{K}}_a \mathbf{q}_a + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s - \mathbf{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}}_{sa}^T \mathbf{q}_s - \mathbf{R}_a \\ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}}_s \mathbf{q}_s + \bar{\mathbf{K}}_{sa} \mathbf{q}_a + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s - \mathbf{R}_s \end{bmatrix} = \Psi. \quad (52)$$

Izjednačavanjem reziduuma sa nulom dobijamo tražene jednačine ravnoteže.

Gradijent reziduuma, potreban za rješavanje nelinearnih jednačina, je

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_a}{\partial \mathbf{q}_a} & \frac{\partial \Psi_a}{\partial \mathbf{q}_s} \\ \frac{\partial \Psi_s}{\partial \mathbf{q}_a} & \frac{\partial \Psi_s}{\partial \mathbf{q}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \bar{\mathbf{K}}_{sa}^T \\ \bar{\mathbf{K}}_{sa} & \frac{3}{2} \bar{\mathbf{K}}_s + \bar{\mathbf{K}}_a + \mathbf{K}_s \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Prilikom ovih diferenciranja neophodno je uočiti da su $\mathbf{K}_a$ i $\mathbf{K}_s$ nezavisne od pomjeranja, one su jedini blokovi osnovne matrice krutosti. Preostali blokovi su zavisni od pomjeranja i to: $\bar{\mathbf{K}}_{sa} = \bar{\mathbf{K}}_{sa}(\mathbf{q}_s)$, $\bar{\mathbf{K}}_a = \bar{\mathbf{K}}_a(\mathbf{q}_a)$ i $\bar{\mathbf{K}}_s = \bar{\mathbf{K}}_s(\mathbf{q}_s^2)$.

5. ZAKLJUČAK

Oba predstavljeni pristupa, PVR i PMTPE, daju isti rezultat što je i očekivano jer je PMTPE samo specijalan slučaj PVR-a kada se posmatra elastičan sistem pod dejstvom konzervativnih sila.

U domaćoj literaturi je dominantan pristup izvođenja jednačina primjenom PMTPE-a. Jedan od mogućih razloga za ovu pojavu jeste taj da varijacioni račun u domaćoj literaturi ne zauzima značajno mjesto. Naime, dok se u PVR-u mora egzaktno koristiti varijacioni račun, recimo u jednačini (20), u PMTPE-u se varijacije pojavljuju samo formalno u osnovnoj jednačini (43) a čitavo izvođenje se svodi na određivanje parcijalnih izvoda.

Zbog svoje opštosti, primjena PVR-a pri izvođenju jednačina ravnoteže predstavlja standardni postupak u referentnoj svjetskoj literaturi.

LITERATURA

- [1] M. Sekulović, Metod konačnih elemenata, Građevinska knjiga, Beograd, **1988**.
- [2] M. Sekulović, Teorija linijskih nosača, Građevinska knjiga, Beograd, **2011**.
- [3] G. Radenković, Tanke elastične ljuske: teorija i specijalna poglavlja, Gros knjiga, Beograd, **1995**.
- [4] D. D. Milašinović, Metod konačnih traka u teoriji konstrukcija sa računarskim programima, Student, Novi Sad, **1994**.
- [5] K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice-Hall, New Jersey, **1996**.
- [6] M. A. Crisfield, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons, Chichester, **2000**.
- [7] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, The Finite Element Method Volume 1: The Basis, Butterworth-Heinemann, Oxford, **2000**.
- [8] J. Bonet, R. D. Wood, Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press, New York, **2008**.
- [9] G. Radenković, Statika linijskih nosača, Građevinska knjiga, Beograd, **2011**.
- [10] <http://www.wikipedia.org/>

GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE BEAM STRUCTURES - PART I: DERIVATIONS OF EQUATIONS

Summary: Detailed derivation of geometrically nonlinear equations of statical equilibrium for finite element of Bernoulli-Euler beam according to Von-Karman theory is given in this paper. These equations are derived in two similar but different manners: by the principal of minimum of total potential energy (PMTPE) and by the principle of virtual work (PVW). In the first case, equations are linearized through evaluation of unknown residuum function into Taylor series, while in the other case they are linearized by neglecting nonlinear terms of displacement gradient in the part of virtual work that includes product of stress and strain increments. It is shown that both approaches give identical equations which was expected because PMTPE represents special case of PVW.

Incremental-iterative procedure is used for solution of these equations. Load is divided into increments while iterations are performed during each increment to obtain equilibrium for the given load level. Standard full Newton-Raphson method is proposed here.

Keywords: Bernoulli-Eulerbeam, geometrically nonlinear analysis, finite element method

