

MATEMATIČKO MODELIRANJE MREŽE OTVORENIH TOKOVA

Zoltan Horvat¹,
Miodrag Spasojević²
Mirjana Isić³

UDK: 532.522:167.7

Rezime: U ovom radu je predstavljen linijski numerički model za hidraulički proračun mreže otvorenih tokova. Za diskretizaciju de St. Venant – ovih jednačina je korišćena Preissmann – ova šema. Ovako dobijen sistem linearnih algebarskih jednačina se u ovom slučaju ne može rešiti primenom Thomas – ovog algoritma, pa je u radu prikazan modifikovani algoritam za rešavanje ovog problema. Na kraju je dat jedan primer numeričke simulacije za mrežu otvorenih tokova sa dodatnom analizom uticaja koeficijenta ponderacije po vremenu na rezultate.

Ključne reči: Linijski numerički model, mreža otvorenih tokova, koeficijent ponderacije po vremenu.

1. UVOD

Neustaljeno linijsko strujanje u otvorenim tokovima opisuju de St. Venant – ove jednačine, koje su izvedene uz sledeće pretpostavke [1], [2]:

1. Nivo slobodne površine se ne menja previše naglo, tj. važi pretpostavka o hidrostatičkom rasporedu pritisaka.
2. Promena nivoa slobodne površine poprečno na struju nema značajnog uticaja na propagaciju talasa.
3. Neuniformnost brzina po poprečnom preseku struje ne utiče značajno na propagaciju talasa.
4. Gubici na trenje u neustaljenom tečenju ne razlikuju se značajno od onih u ustaljenom tečenju.
5. Prosečni pad dna u podužnom pravcu je mali (tj. $\cos \alpha \cong 1$, odnosno $\sin \alpha \cong \tan \alpha$, gde je α ugao koji dno zaklapa sa horizontalom).
6. Kod većine praktičnih problema može se smatrati da je gustina konstantna po poprečnom preseku, tj. $\rho = const$.

Redom se navodi jednačina kontinuiteta i dinamička jednačina

¹ Zoltan Horvat, dipl. građ. inž. – master, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554-300, e – mail: horvatz@gf.uns.ac.rs

² Dr. Miodrag Spasojević, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554-300, e – mail: mspasojevic@gf.uns.ac.rs

³ Mirjana Isić, dipl. građ. inž. – master, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554-300, e – mail: isicm@gf.uns.ac.rs

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \cdot \frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + g \cdot A \cdot S_f = 0, \quad (1)$$

gde je Q protok, A površina poprečnog preseka, Z kota slobodne površine vode, S_f nagib trenja, α koeficijent neravnomernosti brzina u poprečnom preseku, g gravitaciono ubrzanje, a x i t nezavisne promenljive (prostor i vreme).

2. DISKRETIZACIJA I LINEARIZACIJA JEDNAČINA

Za diskretizaciju jednačina (1) se koristi *Preissmann* – ova šema, koja predlaže sledeće aproksimacije izvoda funkcije $f(x,t)$ po prostoru i vremenu, kao i aproksimaciju same funkcije $f(x,t)$ [1], [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\cong \theta \cdot \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \cdot \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &\cong \psi \cdot \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (1-\psi) \cdot \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}, \\ f &\cong \theta \cdot \frac{f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1}}{2} + (1-\theta) \cdot \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Funkcija $f(x,t)$ može biti bilo koja funkcija koja se javlja u jednačinama (Q , Z , A ,...). Težinski faktor (koeficijent ponderacije) po vremenu ima vrednost $\theta \geq 0.5$, dok težinski faktor po prostoru po originalnoj šemi ima vrednost $\psi = 0.5$. Pogodnije je, međutim, pri konstruisanju matematičkog modela da se koeficijenti ψ i θ na zamenjuju konkretnim vrednostima, već da se ostane pri opštim oznakama, jer to omogućava fleksibilnost pri kasnijem korišćenju šeme.

Primenom *Preissmann* – ove šeme za diskretizaciju, kao i *Newton – Raphson* – ove iterativne metode za linerizaciju, jednačine (1) se svode na sledeće dve linearizovane algebarske jednačine [2].

$$-C_i \cdot \Delta Z_i - D_i \cdot \Delta Q_i + A_i \cdot \Delta Z_{i+1} + B_i \cdot \Delta Q_{i+1} = G_i, \quad (3)$$

$$-C'_i \cdot \Delta Z_i - D'_i \cdot \Delta Q_i + A'_i \cdot \Delta Z_{i+1} + B'_i \cdot \Delta Q_{i+1} = G'_i. \quad (4)$$

U jednačinama (3) i (4) indeks i označava računsku tačku u prostoru, C_i , D_i , A_i , B_i , G_i , C'_i , D'_i , A'_i , B'_i i G'_i su konstante, a ΔZ_i i ΔQ_i su nepoznati priraštaji kote slobodne površine vode i proticaja između dve iteracije.

Preuređivanjem jednačina (3) i (4) dobijaju se *jednačina deonice* i *jednačina tačke*

$$\Delta Z_i = L_i \cdot \Delta Z_{i+1} + M_i \cdot \Delta Q_{i+1} + N_i, \quad (5)$$

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1}, \quad (6)$$

gde su L_i, M_i , i N_i funkcije koeficijenata $C_i, D_i, A_i, B_i, G_i, C_i', D_i', A_i', B_i'$ i G_i' , dok su E_{i+1} i F_{i+1} funkcije koeficijenata $C_i, D_i, A_i, B_i, G_i, L_i, M_i, N_i, E_i$ i F_i .

Za modifikovani algoritam koji se koristi pri rešavanju mreže vodotoka potrebne su jednačine koje daju vezu priraštaja protoka u proizvoljnoj računskoj tački sa priraštajima kote slobodne površine vode u toj istoj tački i u prvoj tački posmatrane deonice.

Takođe su potrebne jednačine koje daju vezu priraštaja protoka u prvoj računskoj tački sa priraštajima kote slobodne površine vode u proizvoljnoj tački i u prvoj tački posmatrane deonice.

Navedene jednačine se dobijaju korišćenjem veza (3), (4) i (5).

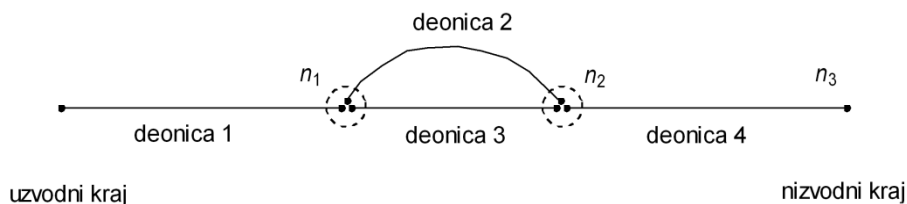
$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1} + H_{i+1} \cdot \Delta Z_1, \quad (7)$$

$$\Delta Q_i = E'_i \cdot \Delta Z_{i+1} + F'_i + H'_i \cdot \Delta Z_1, \quad (8)$$

gde su E_{i+1}, F_{i+1} i H_{i+1} funkcije koeficijenata $C_i, D_i, A_i, B_i, G_i, L_i, M_i, N_i, E_i, F_i$ i H_i , dok su E'_i, F'_i i H'_i funkcije koeficijenata $L_i, M_i, N_i, E_i, F_i, H_i, E_{i+1}, F_{i+1}$ i H_{i+1} .

3. ALGORITAM REŠAVANJA JEDNAČINA

Algoritam rešavanja se objašnjava na primeru petlje vodotoka, koji je prikazan na slici 1.



Slika 1 – Petlja vodotoka

Uvodi se dvoindeksno obeležavanje. Prvi indeks označava broj deonice, a drugi indeks broj računске tačke. Indeks m označava vrednost u prethodnoj iteraciji.

Proračun unapred (forward sweep) za petlju vodotoka

Čvor n_1

- Jednačina *kontinuiteta* za čvor n_1 . Uliva se deonica 1 (računska tačka 1, I_1), a iz čvora izlaze deonice 2 (računska tačka 2,1) i 3 (računska tačka 3,1)

$$\left({}^m Q_{1,I_1} + \Delta Q_{1,I_1} \right) - \left({}^m Q_{2,1} + \Delta Q_{2,1} \right) - \left({}^m Q_{3,1} + \Delta Q_{3,1} \right) = 0 \quad (9)$$

- *Dinamička jednačina*

$$\Delta Z_{1,I_1} = \Delta Z_{2,1} = \Delta Z_{3,1} = \Delta Z_{n_1} \quad (10)$$

Primenjujući jednačine (6), (7) i (8) može se napisati

$$\begin{aligned}\Delta Q_{1,I1} &= E_{1,I1} \cdot \Delta Z_{1,I1} + F_{1,I1}, \\ \Delta Q_{2,I2} &= E'_{2,I2} \cdot \Delta Z_{2,I2} + F'_{2,I2} + H'_{2,I2} \cdot \Delta Z_{2,I1}, \\ \Delta Q_{3,I3} &= E'_{3,I3} \cdot \Delta Z_{3,I3} + F'_{3,I3} + H'_{3,I3} \cdot \Delta Z_{3,I1}.\end{aligned}\quad (11)$$

Čvor n_2

- Jednačina *kontinuiteta* za čvor n_2 . Ulivaju se deonice 2 i 3 (računske tačke 2, I2 i 3, I3), a iz čvora izlazi deonica 4 (računska tačka 4, I1).

$$\left({}^m Q_{2,I2}^{n+1} + \Delta Q_{2,I2} \right) + \left({}^m Q_{3,I3}^{n+1} + \Delta Q_{3,I3} \right) - \left({}^m Q_{4,I1}^{n+1} + \Delta Q_{4,I1} \right) = 0 \quad (12)$$

- *Dinamička jednačina*

$$\Delta Z_{2,I2} = \Delta Z_{3,I3} = \Delta Z_{4,I1} = \Delta Z_{n_2} \quad (13)$$

Primenjujući jednačine (7) i (8) može se napisati

$$\begin{aligned}\Delta Q_{2,I2} &= E_{2,I2} \cdot \Delta Z_{2,I2} + F_{2,I2} + H_{2,I2} \cdot \Delta Z_{2,I1}, \\ \Delta Q_{3,I3} &= E_{3,I3} \cdot \Delta Z_{3,I3} + F_{3,I3} + H_{3,I3} \cdot \Delta Z_{3,I1}, \\ \Delta Q_{4,I1} &= E'_{4,I1} \cdot \Delta Z_{4,I1} + F'_{4,I1} + H'_{4,I1} \cdot \Delta Z_{4,I1}.\end{aligned}\quad (14)$$

Kad se jednačine (11) uvrste u (9), jednačine (14) u (12), i ako se uzmu veze (10) i (13) uz dodatnu napomenu da je $\Delta Z_{4,I1} = \Delta Z_{n_3}$ dobijaju se dve jednačine (jednačine kontinuiteta) sa tri nepoznate ΔZ_{n_1} , ΔZ_{n_2} i ΔZ_{n_3} . Da bi se sistem linearnih jednačina „zatvorio“ koristi se *nizvodni granični uslov* u čvoru n_3 .

Uopšteni oblik nizvodnog graničnog uslova je

$$\alpha_{niz} \cdot \Delta Z_I + \beta_{niz} \cdot \Delta Q_I = \gamma_{niz} \quad (15)$$

Načelno, mogu se koristiti tri vrste graničnog uslova: nivogram, hidrogram i zavisnost protok – kota slobodne površine vode (tj. kriva proticaja).

- a) Zadato $Z(t)$ (nivogram).

$${}^m Z_I^{n+1} + \Delta Z_I = Z(t_{n+1})$$

Upoređivanjem prethodne jednačine sa uopštenim oblikom graničnog uslova (15) zaključuje se da je

$$\alpha_{niz} = 1, \quad \beta_{niz} = 0, \quad \gamma_{niz} = Z(t_{n+1}) - {}^m Z_I^{n+1}, \text{ ili}$$

$$\Delta Z_I = Z(t) - {}^m Z_I^{n+1} \quad (16)$$

b) Zadato $Q(t)$ (hidrogram)

$${}^m Q_I^{n+1} + \Delta Q_I = Q(t_{n+1})$$

Upoređivanjem prethodne jednačine sa uopštenim oblikom graničnog uslova (15) zaključuje se da je

$$\alpha_{niz} = 0, \quad \beta_{niz} = 1, \quad \gamma_{niz} = Q(t_{n+1}) - {}^m Q_I^{n+1}.$$

c) Zadato $Q(Z)$ (veza protok – kota slobodne površine vode)

$${}^m Q_I^{n+1} + \Delta Q_I = f({}^{m+1} Z_I^{n+1})$$

$${}^m Q_I^{n+1} + \Delta Q_I = f({}^m Z_I^{n+1}) + \left. \frac{\partial f}{\partial Z} \right|_{{}^m Z_I^{n+1}} \cdot \Delta Z_I$$

Upoređivanjem prethodne jednačine sa uopštenim oblikom graničnog uslova (15) zaključuje se da je

$$\alpha_{niz} = \left. \frac{\partial f}{\partial Z} \right|_{{}^m Z_I^{n+1}}, \quad \beta_{niz} = -1, \quad \gamma_{niz} = -f({}^m Z_I^{n+1}) + {}^m Q_I^{n+1}.$$

Za slučaj nizvodnog graničnog uslova pod b) i c) za poslednju računsku tačku se može napisati jednačina (7) i (15) iz koje se eliminiše ΔQ_I .

$$\Delta Z_I \cdot \left(E_I + \frac{\alpha_{niz}}{\beta_{niz}} \right) + H_I \cdot \Delta Z_I = \frac{\gamma_{niz}}{\beta_{niz}} - F_I \quad (17)$$

Jednačine (16) odnosno (17) zatvaraju sistem linearnih jednačina koji se može rešiti Gauss-ovim algoritmom ili Cramer-ovim pravilom.

Proračun unazad (backward sweep) za petlju vodotoka

Deonica 4

Pošto je nakon rešavanja sistema linearnih jednačina poznato $\Delta Z_{4,I4}$ može se sračunati i $\Delta Q_{4,I4}$ pomoću jednačine tipa (7). Za ostale tačke $i = I-1, \dots, 2$ *backward sweep* se računa koristeći jednačine (5) i (7) uz napomenu da je $\Delta Z_{4,1} = \Delta Z_{n,2}$ poznato. Pomoću jednačine (8) može se sračunati $\Delta Q_{4,1}$.

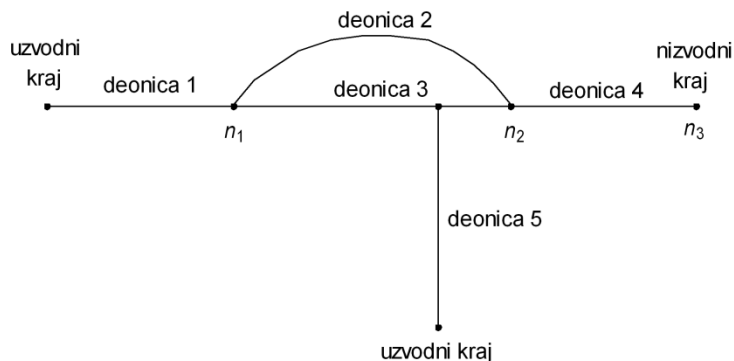
Deonica 3 i 2

Proračun za deonicu 3 i 2 je potpuno analogan proračunu za deonicu 4.

Deonica 1

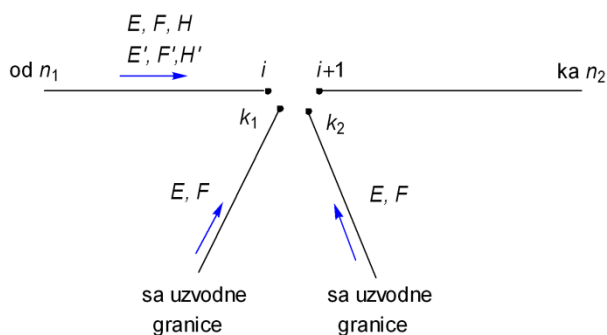
Pošto je poznato $\Delta Z_{1,i1} = \Delta Z_{n1}$ može se sračunati i $\Delta Q_{1,i1}$ pomoću jednačine tipa (6). Za ostale tačke $i = I - 1, \dots, 1$ *backward sweep* se računa koristeći jednačine (5) i (6).

Problem se može dodatno komplikovati ako se na petlju vodotoka priključuje granata deonica kao na slici 2 (deonica 5).



Slika 2 – Granata deonica koja se priključuje na petlju vodotoka

Proračun unapred (*forward sweep*) za slučaj kada se granata deonica priključuje na petlju vodotoka.



Slika 3 – Čvor na deonici petlje u koju se priključuje jedna ili više granatih deonica

Na slici 2 deonice 2, 3 i 4 su deonice petlje, a deonice 1 i 5 su granate deonice. Razmatra se uopšteni čvor na deonici petlje u koji se priključuju jedna ili više granatih deonica (kao što se u ovom slučaju u deonicu 3 uključuje deonica 5).

Smatra se da je urađen *proračun unapred* (*forward sweep*) za deonicu petlje sve do računске tačke i što je dalo koeficijente E, F, H i E', F', H' . Takođe je urađen *proračun unapred* za granate deonice sve do njihovih krajeva (do računskih tačaka k_1 i k_2) što je

dalo koeficijente E i F . Da bi se proračun nastavio potrebno je odrediti koeficijente E, F, H i E', F', H' za računsku tačku $i+1$ na deonici petlje. Za ovo se koristi

1. *jednačina kontinuiteta*,
2. *dinamička jednačina* (jednakost priraštaja nivoa u čvoru).

Jednačina kontinuiteta

$${}^m Q_i^{n+1} + \Delta Q_i + \sum_{k=1}^K ({}^m Q_k^{n+1} + \Delta Q_k) = {}^m Q_{i+1}^{n+1} + \Delta Q_{i+1} \quad (18)$$

Navode se jednačine već sračunate tokom proračuna unapred za deonicu petlje do računске tačke i i za granate deonice do poslednjih tačaka k (prva jednačina je za deonicu petlje a druga za granatu deonicu).

$$\begin{aligned} \Delta Q_i &= E_i \cdot \Delta Z_i + F_i + H_i \cdot \Delta Z_1 \\ \Delta Q_k &= E_k \cdot \Delta Z_k + F_k \end{aligned} \quad (19)$$

Da bi se proračun unapred nastavio potrebna je jednačina oblika

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1} + H_{i+1} \cdot \Delta Z_1.$$

Kada se jednačine (19) uvrste u jednačinu kontinuiteta za čvor (18), dobija se

$$\begin{aligned} & {}^m Q_i^{n+1} + E_i \cdot \Delta Z_i + F_i + H_i \cdot \Delta Z_1 + \sum_{k=1}^K ({}^m Q_k^{n+1} + E_k \cdot \Delta Z_k + F_k) = \\ & = {}^m Q_{i+1}^{n+1} + E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1} + H_{i+1} \cdot \Delta Z_1 \end{aligned} \quad (20)$$

Dinamička jednačina

Za dinamičku jednačinu se uzima *jednakost priraštaja nivoa* u čvoru.

$$\Delta Z_i = \Delta Z_{i+1} = \Delta Z_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (21)$$

Kada se jednačine (21) uvrste u jednačinu kontinuiteta (20), dobija se jednačina iz koje se vide vrednosti traženih koeficijenata.

$$\begin{aligned} & E_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} + F_{i+1} + H_{i+1} \cdot \Delta Z_1 = \\ & = \left(E_i + \sum_{k=1}^K E_k \right) \cdot \Delta Z_{i+1} - {}^m Q_{i+1}^{n+1} + {}^m Q_i^{n+1} + F_i + \sum_{k=1}^K ({}^m Q_k^{n+1} + F_k) + H_i \cdot \Delta Z_1 \end{aligned}$$

Poređenjem desne i leve strane poslednje jednačine dobijaju se traženi koeficijenti.

$$E_{i+1} = E_i + \sum_{k=1}^K E_k, \quad F_{i+1} = -{}^m Q_{i+1}^{n+1} + {}^m Q_i^{n+1} + F_i + \sum_{k=1}^K ({}^m Q_k^{n+1} + F_k), \quad H_{i+1} = H_i \quad (22)$$

Za nastavak proračuna unapred takođe je potrebno odrediti koeficijente E' , F' , H' iz jednačine tipa (8), koja ne sadrži ΔQ u čvoru gde se granata deonica uliva u deonicu petlje, pa ne ulazi u jednačinu kontinuiteta. Dakle, zaključuje se da je

$$E'_{i+1} = E'_i, \quad F'_{i+1} = F'_i, \quad H'_{i+1} = H'_i. \quad (23)$$

Proračun unazad (*backward sweep*) za slučaj kada se granata deonica priključuje na petlju vodotoka.

Kada se proračunom unazad stigne do računске tačke $i+1$ na deonici petlje (pa je poznato ΔZ_{i+1} i ΔQ_{i+1}) u računsku tačku i , te iste deonice, se prelazi pomoću

$$\Delta Z_i = \Delta Z_{i+1}, \quad \Delta Q_i = E_i \cdot \Delta Z_i + F_i + H_i \cdot \Delta Z_i. \quad (24)$$

Analogno prethodnom razmatranju, kada se proračunom unazad stigne do računске tačke $i+1$ na deonici petlje (pa je poznato ΔZ_{i+1} i ΔQ_{i+1}) u računsku tačku k granate deonice se prelazi pomoću

$$\Delta Z_k = \Delta Z_{i+1}, \quad \Delta Q_k = E_k \cdot \Delta Z_k + F_k. \quad (25)$$

4. REZULTATI NUMERIČKE SIMULACIJE

U programskom jeziku FORTRAN napisan je program za rešavanje mreže otvorenih tokova prikazanog na slici 2.

Ulazni podaci

Na slici 2 prikazana je šema mreže vodotoka, koja se sastoji od pet prizmatičnih deonica pravougaonih poprečnih preseka sa karakteristikama datim u tabelama 1 i 2.

Tabela 1 – Karakteristike deonica 1, 2, 3 i 4

Deonica	1	2	3	4
Dužina L (km)	9.0	7.2	6.0	9.0
Korak po prostoru Δx (km)	1.0	1.2	1.0	1.0
Širina kanala b (m)	20.0	6.0	14.0	20.0
Nagib dna S_0 (%)	0.05	0.04167	0.05	0.05
Manning-ov koef. hrapavosti n ($s \cdot m^{-1/3}$)	1/15	1/15	1/15	1/15

Deonica 5 se priključuje na deonicu 3 na rastojanju 4 km od čvora n_1 , tj. 2 km od čvora n_2 . Deonica 5 je prizmatičan betonski kanal pravougaonog poprečnog preseka, širine $b = 20.0$ m i dužine $L = 10$ km. Manning – ov koeficijent hrapavosti je $n = 0.02$ $s \cdot m^{-1/3}$. Ostale karakteristike deonice 5 su date u tabeli 2.

Tabela 2 – Karakteristike deonice 5

Stacionaža (km)	Kota dna (m)
0.0 (uzvodni kraj)	10.5
2.0	8.5
3.5	8.0
5.5	7.5
8.0	6.5
10.0 (ušće)	5.5

Uzvodni granični uslov na deonici 1 je hidrogram dat u tabeli 3.

Tabela 3 – Uzvodni granični uslov na deonici 1

t (min)	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	$t > 135$
Q (m^3 / s)	100	100	100	250	350	300	250	200	150	100	100

Uzvodni granični uslov na deonici 5 je hidrogram dat u tabeli 4.

Tabela 4 – Uzvodni granični uslov na deonici 5

t (min)	$-\infty < t < 3$	$3.5 < t < 5.0$	$5.5 < t < \infty$
Q (m^3 / s)	50	450	50

Nizvodni granični uslov na deonici 4 je funkcija $Q = Q(Z)$ dobijena iz *Chézy – Manning* – ove formule za jednoliko ustaljeno tečenje.

Stacionaža počinje od uzvodnog kraja svake deonice, tj. svaka deonica ima svoju (lokalnu) stacionažu. Kota dna $Z_D = 0.0$ se nalazi na nizvodnom kraju deonice 4.

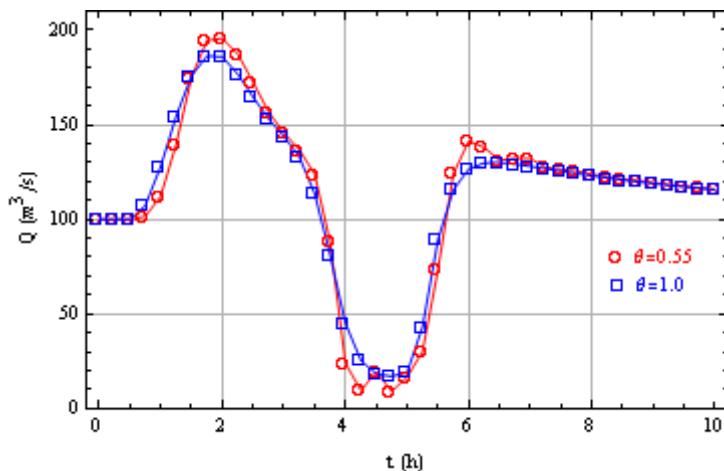
Vremenski korak za sve simulacije je $\Delta t = 15.0$ min, a koeficijent ponderacije po prostoru je $\psi = 0.5$. Koeficijent neravnomernosti brzine je $\alpha = 1.0$ za sve poprečne preseke. Koeficijent ponderacije za nagib trenja je $\beta = 0.5$ između svih poprečnih preseka.

Analiza koeficijenta ponderacije po vremenu θ

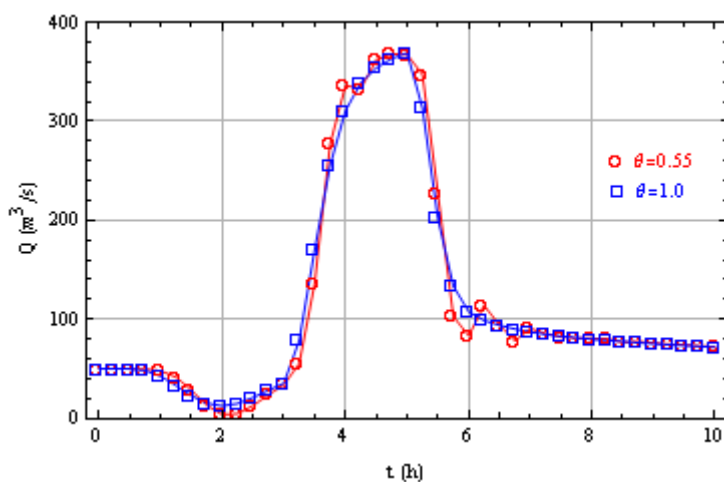
Izvršena je numerička simulacija sa zadatim ulaznim podacima. Prikazuju se rezultati hidrograma za poslednju računsku tačku deonice 1 (slika 4) i deonice 5 (slika 5).

Na obe slike se vidi da se za vrednost koeficijenta ponderacije po vremenu $\theta = 0.55$ javlja numerička oscilacija rezultata. Povećavanje vrednosti θ prouzrokuje intenzivniju numeričku difuziju koja „rasplinjava“ pomenute oscilacije. Ovo je u skalu sa zaključcima *Von Neumann* – ove analize *de St. Venant* – ovih jednačina [3].

Nije beskorisno napomenuti da se rezultati simulacija za različite vrednosti θ ne razlikuju značajno. Međutim, radi izbegavanja pojave numeričkih oscilacija svi proračuni su rađeni sa $\theta = 1.0$.



Slika 4 – Hidrogram za poslednju računsku tačku deonice 1



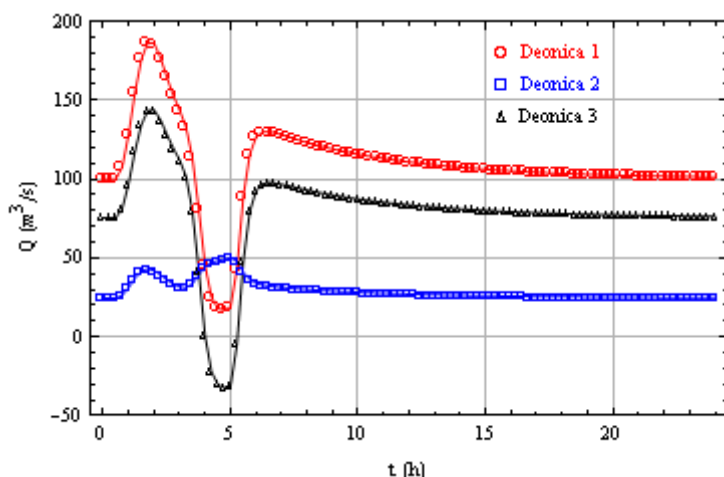
Slika 5 – Hidrogram za poslednju računsku tačku deonice 5

Prikaz rezultata

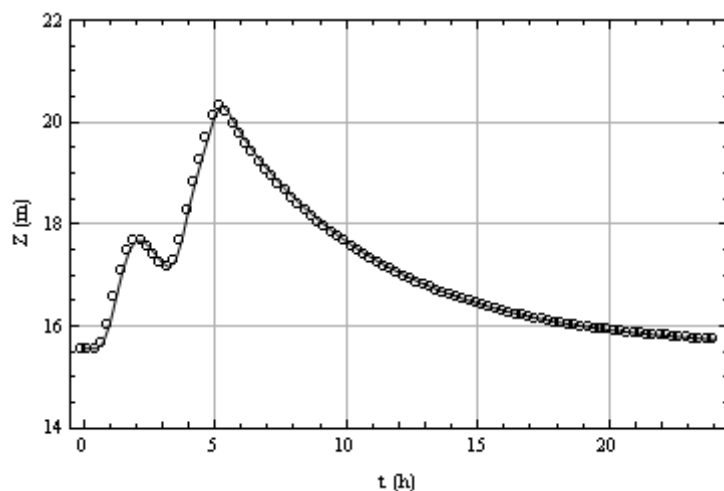
Prikazuju se *hidrogrami* u čvoru n_i (slika 6). U ovaj čvor se uliva deonica 1, a iz čvora izlaze deonice 2 i 3. Hidrogram deonice 1 pokazuje pik u 2 h, što predstavlja prolaz talasa koji je krenuo sa uzvodnog kraja te deonice. Posle toga dolazi do značajnog smanjenja protoka (u vremenu oko 4.5 ÷ 5.0 h) usled pojave povratnog strujanja u deonici 3 (negativne vrednosti za proticaj). Razlog za ovo je poplavni talas koji je krenuo sa uzvodnog kraja deonice 5 i stigao u deonicu 3 (slika 2). Nakon ulaska tog talasa u deonicu 3 jedan deo vode nastavlja nizvodno a drugi deo prouzrokuje povratno

strujanje u gornjem delu deonice 3, što se „oseća“ i u čvoru n_1 . Takođe je zanimljivo napomenuti da deo vode koji povratnim strujanjem stiže u čvor n_1 nastavlja svoj put nizvodno u deonici 2 (drugi pik u deonici 2 na slici 6).

Na slici 7 je prikazan *nivogram* za čvor n_1 . Takođe je bitno primetiti da se na nivogramu vidi uticaj oba poplavna talasa (dva pika na slici 7).



Slika 6 – Hidrogrami za čvor n_1

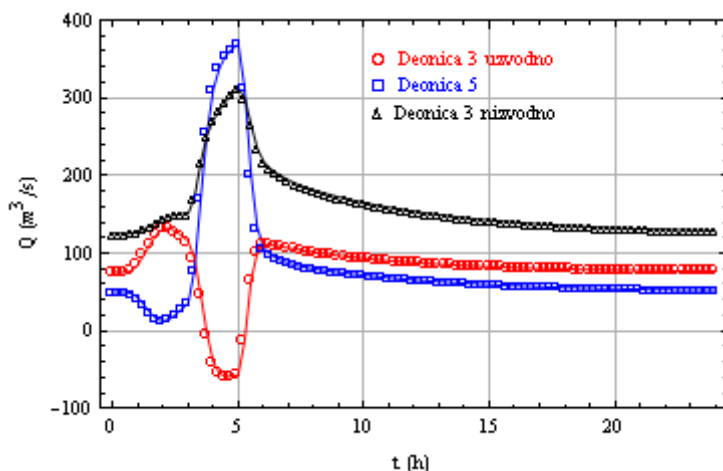


Slika 7 – Nivogram za čvor n_1

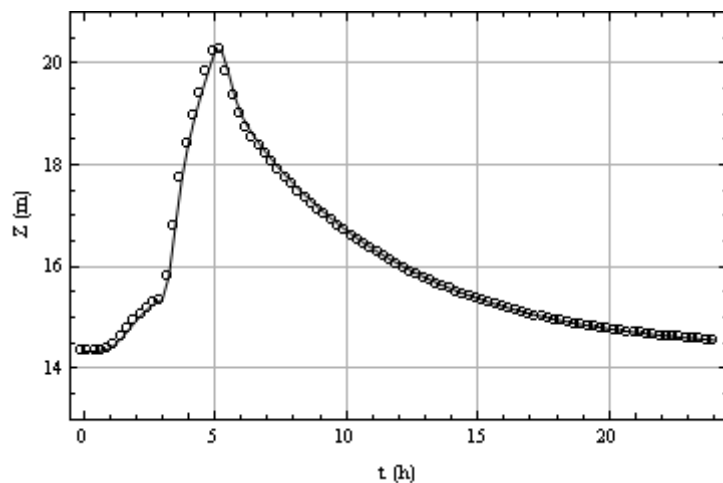
Posmatra se mesto ulivanja deonice 5 u deonicu 3 (slika 2). Prikazuju se *hidrogrami* za ovaj čvor (slika 8). Vidi se da u deonici 5 proticaj prvo opada usled nailaska poplavnog talasa u deonici 3, koji je krenuo sa uzvodnog kraja deonice 1. Nakon ovoga proticaj intenzivno raste usled talasa koji stiže sa uzvodnog kraja deonice 5. Kad ova voda dospe u deonicu 3 delom nastavlja nizvodno, a delom uzrokuje povratno strujanje u gornjim

delovima deonice 3 (negativne vrednosti proticaja). Ovo povratno strujanje je toliko intenzivno da se „oseća“ i u čvoru n_1 , kao što je to prethodno pokazano.

Na slici 9 je prikazan *nivogram* za čvor gde se deonica 5 uliva u deonicu 3.



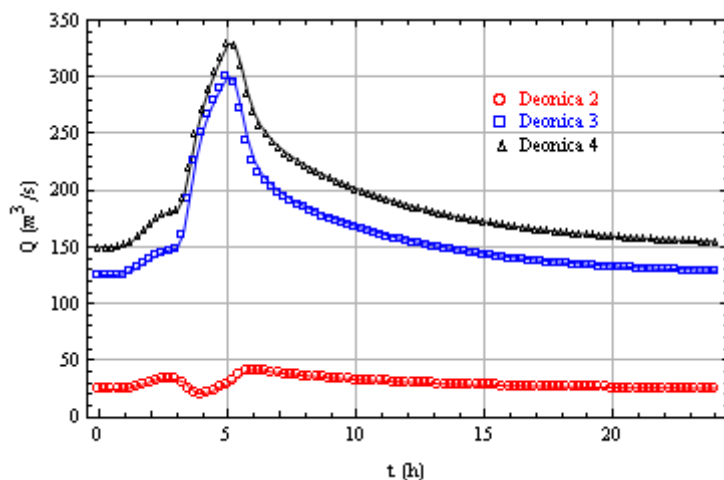
Slika 8 – Hidrogrami za čvor gde se deonica 5 uliva u deonicu 3



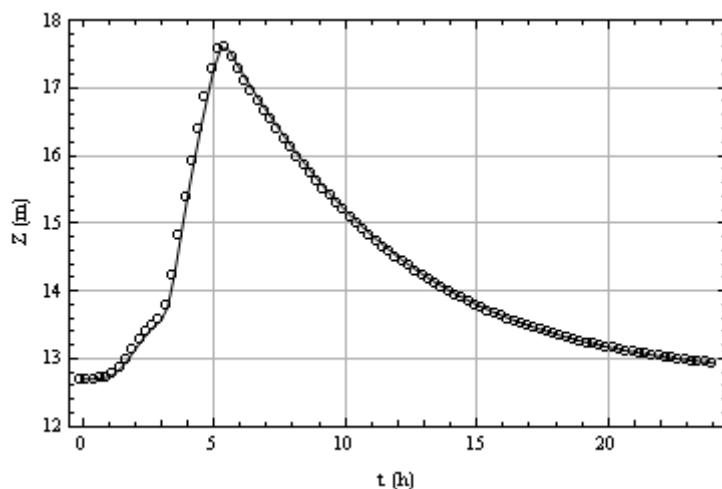
Slika 9 – Nivogram za čvor gde se deonica 5 uliva u deonicu 3

Na slikama 10 i 11 se prikazuju *hidrogrami*, odnosno *nivogram* za čvor n_2 . U ovaj čvor se ulivaju deonice 2 i 3, a iz čvora izlazi deonica 4.

Napominje se da je za sve čvorove proveravana jednačina kontinuiteta (suma protoka u čvoru mora biti nula) i dinamička jednačina (jednakost priraštaja kota slobodne površine vode). Obe jednačine su zadovoljenje za sve čvorove što ukazuje na ispravno funkcionisanje numeričkog modela.



Slika 10 – Hidrogrami za čvor n_2



Slika 11 – Nivogram za čvor n_2

5. ZAKLJUČAK

Analiza uticaja koeficijenta ponderacije po vremenu θ potvrđuje da se povećanjem vrednosti ovog parametra pojačava numerička difuzija. Ovaj zaključak, dobijen numeričkim eksperimentom, je istovetan zaključku koji se dobija *Von Neumann* – ovom analizom linearizovanih *de St. Venant* – ovih jednačina [3].

Prikazan algoritam za rešavanje mreže otvorenih tokova ispravno funkcioniše što je prikazano na primeru. Takođe je pokazano da numerički model može da simulira i povratno strujanje, koje je u ovom slučaju nastalo nailaskom poplavnog talasa u deonici 5 analiziranog sistema.

LITERATURA

- [1] Miodrag Jovanović, REGULACIJA REKA Rečna hidraulika i morfologija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, **2002**.
- [2] Miodrag Spasojević, Numerička hidraulika, Pisana predavanja, Subotica, **1996**.
- [3] Mirjana Isić, Miodrag Spasojević, Matematičko modelisanje 1D neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima, 18. Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Subotica, **2009**.

MATHEMATICAL MODELING OF AN OPEN CHANNEL LOOPED NETWORK

***Summary:** This paper presents a one – dimensional numerical model for an open channel looped network. The Preissmann scheme was used for discretization of the de. St. Venant equations. The discretization yields a system of linear algebraic equations that could not be solved using the Thomas algorithm, so the paper presents a modified algorithm for resolving this problem. Finally, an example of a numerical simulation for an open channel looped network is given with an additional analysis of the time weighting coefficient and its influence on the results.*

***Key words:** One – dimensional numerical model, open channel looped network, time weighting coefficient.*