

ПОПРЕЧНЕ ВИБРАЦИЈЕ ПЛОЧА КОД СТОХАСТИЧКИ ПРОМЈЕЊИВИХ ПОРЕМЕЋАЈНИХ СИЛА ПРИМЈЕНОМ МЕТОДА КОНАЧНИХ ТРАКА

Драган Д. Милашиновић¹,
Александар Борковић²

UDK: 624.042.4/7:681.32

Резиме: У раду је приказано моделирање динамичког одзива плочастих савијајућих конструкција усљед дејства произвољне динамичке побуде. Једначине кретања су ријешене трансформацијом на нормалне координате, док су модалне једначине ријешене методом "корак по корак". Коначан одзив конструкције је добијен суперпозицијом по модовима. Приказани алгоритам је имплементиран у софтверском пакету Mathematica и у програмском језику FORTRAN, те је добијен програм MKTCSB. Верификација кода је извршена поређењем са резултатима добијеним коришћењем комерцијалног MKE програма ABAQUS.

Кључне ријечи: метод коначних трака, земљотрес, динамичка анализа

1. УВОД

Када разматрамо утицаје вјетра и земљотреса на високе грађевине или утицаје земљотреса и тешких саобраћајних возила на мостове не можемо прецизно одредити како се оптерећење мијења у времену јер је оно стохастичке природе. Међутим, у овим случајевима се статистички подаци о оптерећењу користе у форми која омогућава статистички опис одзива конструкције. У овим анализама су закони вјероватноће код описа оптерећења широко заступљени. Анализа конструкције усљед дејства неког земљотреса из прошлости чији запис посједујемо или неког земљотреса за који претпостављамо да би могао погодити дату конструкцију је такође уобичајена.

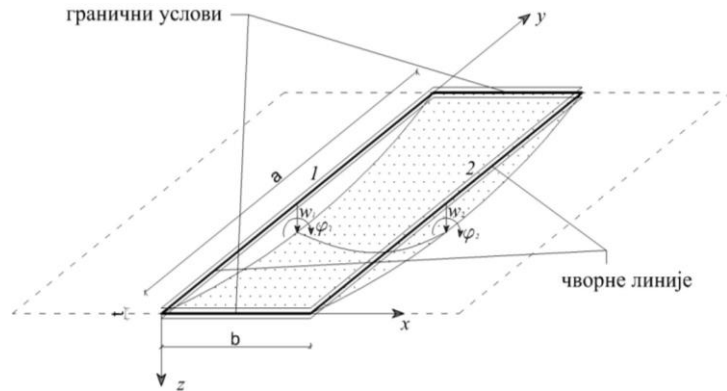
У овом раду је приказано моделирање одзива плочастих конструктивних елемената усљед дејства земљотреса примјеном метода коначних трака (МКТ). Метод коначних трака је у предности над методом коначних елемената (МКЕ) при прорачуну конструкција код којих је дужина много већа од димензија попречног пресека. Кориштене су траке са 4 степена слободе различитих услова ослањања којима се веома тачно моделира савијајуће понашање зидова и плоча реалних грађевинских објеката.

¹ проф. др Драган Д. Милашиновић, дипл. инж. грађ, Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, 24000 Суботица, тел.: 024 554 – 300, е – mail: ddmil@gf.uns.ac.rs

² Александар Борковић, дипл. инж. грађ, Универзитет у Бања Луци, Архитектонско – грађевински факултет, Бања Лука, Република Српска.

2. КОНАЧНА ТРАКА ЗА РЈЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА САВИЈАЊА

Моделирање система коначним тракама почиње разматрањем правоугаоне коначне траке са x и y осама у равни траке и z осом у правцу дебљине t (сл. 1). Одговарајући параметри помјерања у чворним линијама су угиб w и обртање око y осе φ .



Слика 1 – Коначна трака за рјешавање проблема савијања плоча

Метод коначних трака може бити схваћен и као интерполација између класичног Ritz-вог метода и метода коначних елемената, тако да је општа форма функције помјерања производ полинома и тригонометријских редова

$$f = \sum_{m=1}^r Y_m(y) \cdot \sum_{k=1}^c N_k(x) \cdot \mathbf{q}_{km}, \quad (2.1)$$

гдје су $Y_m(y)$ Ritz-ове функције, а $N_k(x)$ су полиноми као интерполационе функције из метода коначних елемената. На овај начин се усвајају следеће апроксимативне функције за коначну траку произвољно ослоњену на крајевима, сл. 1,

$$w = \sum_{m=1}^r Y_{wm} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \mathbf{q}_{wm}, \quad (2.2)$$

гдје су полиноми:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3(x/b)^2 + 2(x/b)^3, & N_2 &= b \left[x/b - 2(x/b)^2 + (x/b)^3 \right], \\ N_3 &= 3(x/b)^2 - 2(x/b)^3, & N_4 &= b \left[-(x/b)^2 + (x/b)^3 \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

док се тригонометријски редови усвајају као облици слободног осциловања у зависности од услова ослањања:

- оба краја слободно ослоњена:
 $Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a), \quad \mu_m = \pi, 2\pi, \dots, m\pi; \quad (2.4)$

- један крај укљештен а други слободно ослоњен:
 $Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a) - \alpha_m \cdot \sinh(\mu_m \cdot y/a),$
 $\alpha_m = \frac{\sin(\mu_m)}{\sinh(\mu_m)}, \quad \mu_m = 3.9266, 7.0685, \dots, \frac{(4m+1) \cdot \pi}{4}; \quad (2.5)$

- један крај укљештен а други слободан:

$$Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a) - \sinh(\mu_m \cdot y/a) - \alpha_m \cdot [\cos(\mu_m \cdot y/a) - \cosh(\mu_m \cdot y/a)],$$

$$\alpha_m = \frac{\sin(\mu_m) + \sinh(\mu_m)}{\cos(\mu_m) + \cosh(\mu_m)}, \quad \mu_m = 1.8750, 4.6940, \dots, \frac{(2m-1) \cdot \pi}{2}; \quad (2.6)$$

- оба краја укљештена:

$$Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a) - \sinh(\mu_m \cdot y/a) - \alpha_m \cdot [\cos(\mu_m \cdot y/a) - \cosh(\mu_m \cdot y/a)],$$

$$\alpha_m = \frac{\sin(\mu_m) - \sinh(\mu_m)}{\cos(\mu_m) - \cosh(\mu_m)}, \quad \mu_m = 4.7300, 7.8532, \dots, \frac{(2m+1) \cdot \pi}{2}; \quad (2.7)$$

Вектори параметара помјерања у чворним линијама коначне траке су:

$$\mathbf{q}_{vm}^T = [w_{1m} \quad \varphi_{1m} \quad w_{2m} \quad \varphi_{2m}], \quad (2.8)$$

тако да коначна трака има четири степена слободе.

3. ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА

Обзиром да се у дискретизацији методом коначних трака користе својствени облици вибрација штапа (2.4-2.7), посебно је интересантна примјена у динамици конструкција. За анализу динамичког одзива конструкције која има N степени слободе помјерања потребно је ријешити глобалну једначину кретања дату у матричној форми једначином:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (3.1)$$

гдје су \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} глобалне $N \times N$ матрице маса, пригушења и крутости, редом; $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ су $N \times 1$ вектори релативних чворних убрзања, брзина и помјерања док је $\mathbf{F}(t)$ вектор оптерећења који се за случај спољашње побуде убрзањем тла може представити као

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{u}_g(t), \quad (3.2)$$

гдје је \mathbf{I} јединични $N \times 1$ вектор а $\ddot{u}_g(t)$ је запис нападаог убрзања тла током времена. Постоје два широко кориштена поступка за рјешавање једначине кретања у временском домену: метод модалне суперпозиције и метод директне интеграције. За разлику од директне интеграције гдје се систем једначина рјешава да би се одредио укупан одзив по свим степенима слободе, у модалној анализи се одзиви појединачних модова суперпонирају да би се одредио цјелокупан одзив. Стандардни поступак се састоји у налажењу својстених вектора којима се спрегнуте једначине кретања трансформишу у систем независних диференцијалних једначина кретања система са једним степеном слободе. Ове једначине се могу ријешити на неколико начина, од којих је за стохастичку побуду најефикаснија метода “корак по корак”. Рјешења раздвојених једначина се затим суперпонирају чиме добијамо тражени одзив конструкције. За реалне конструкције матрица пригушења \mathbf{C} углавном није дијагонална, ипак да би могли раздвојити једначине кретања неопходно је претпоставити да нема интеракције између модова. Стога се претпоставља да је дијагонална, са члановима модалног

пригушења $c_{nm} = 2\xi_n \omega_n$. Коефицијент пригушења ξ_n се дефинише као однос пригушења n -тог мода и критичног пригушења мода.

Својствени проблем у овом раду се дефинише на систему без пригушења.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

При анализи слободних вибрација претпостављамо да се сва помјерања мијењају у времену по закону хармонијске функције, према изразу $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q} \cdot e^{i\omega t}$, те (3.3) постаје

$$(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}, \quad (3.4)$$

што представља проблем својствених вриједности. Када се израз (3.4) прикаже у развијеном облику он представља карактеристични полином N -тог реда по λ , чијим рјешавањем добијамо N коријена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_N$ и њима одговарајућих N својствених вектора $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n, \dots, \mathbf{q}_N$. Ове величине представљају својствене фреквенције ($\omega_n = \sqrt{1/\lambda_n}$) и својствене облике слободних вибрација посматране конструкције. У FORTRAN – у је овај проблем ријешен примјеном Јакобијевог поступка, док *Mathematica* има интегрисану функцију за одређивање својствених вриједности. Сљедећи корак је формирање модалне матрице Φ чије су колоне својствени вектори добијени рјешавањем (3.4)

$$\Phi = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n \ \dots \ \mathbf{q}_N]. \quad (3.5)$$

Својствени вектори добијени рјешавањем једначине (3.4) су произвољни, тј. сваки вектор, независно од његовог интензитета, ће задовољити основну фреквентну једначину. Само су резултујући модални облици једнозначно дефинисани.

Да би примијенили модалну суперпозицију, потребно је извршити нормализацију модалне матрице у односу на матрицу маса или матрицу крутости. Под нормализацијом модалних облика подразумевамо усвајање помјерања једног степена слободе као референтног. У програму МКТСВ нормализација је извршена у односу на матрицу маса рачунањем скаларног фактора:

$$\mathbf{q}_n^T \mathbf{M} \mathbf{q}_n = \hat{M}_n \quad (3.6)$$

гдје \mathbf{q}_n представља произвољан својствени вектор. Затим, изражавајући нормализоване модалне облике $\hat{\mathbf{q}}_n$ као

$$\hat{\mathbf{q}}_n = \mathbf{q}_n \hat{M}_n^{-1/2}, \quad (3.7)$$

добијамо нормализовану модалну матрицу $\hat{\Phi}$, тј. важи

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} = \mathbf{I} \quad \text{и} \quad \hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} = \omega^2 \mathbf{I},$$

гдје је \mathbf{I} јединична матрица. Сљедећи корак представља прелаз на нормалне координате:

$$\mathbf{q} = \hat{\Phi} \hat{\mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \hat{\Phi} \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \hat{\Phi} \ddot{\hat{\mathbf{q}}},$$

што нам омогућава да трансформишемо једначину (3.1) множећи је са лијеве стране транспонованом нормализованом модалном матрицом:

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} \ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} \hat{\mathbf{q}} = \hat{\Phi}^T \mathbf{F}(t)$$

те добијамо систем раздвојених једначина кретања:

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + 2\xi\omega\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \omega^2\hat{\mathbf{q}} = \hat{\Phi}^T \mathbf{F}(t), \quad (3.8)$$

гдје смо претпоставили да је и матрица пригушења ортогонална у односу на својствене векторе, тј.

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} = 2\xi\omega \mathbf{I}.$$

Једначина (3.8) представља систем од N независних диференцијалних једначина кретања система са једним степеном слободе. Њиховим рјешавањем коначне вриједности параметара помјерања, брзина и убрзања у чворним линијама добијамо суперпозицијом по модовима:

$$\mathbf{q} = \hat{\Phi}\hat{\mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \hat{\Phi}\dot{\hat{\mathbf{q}}}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \hat{\Phi}\ddot{\hat{\mathbf{q}}}. \quad (3.9)$$

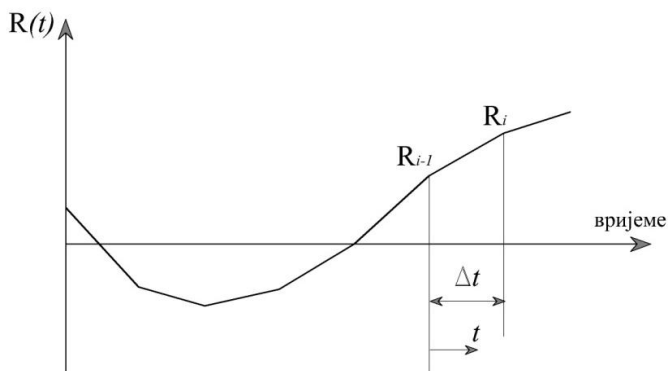
Модална једначина се може ријешити на много начина. Употреба тачног рјешења за линеарну промјену оптерећења током кратког временског интервала је потврђена као најекономичнији и најтачнији поступак за нумеричко рјешавање ове једначине уз помоћ рачунара [2]. Поступак нема проблема са стабилношћу и не производи нумеричко пригушење. Обзиром да су сеизмичка помјерања тла најчешће дефинисана као линеарна у интервалу од 0.005 секунди, метод је тачан за овај тип оптерећења за све фреквенције.

Посматраћемо n -ту модалну једначину при чему функцију оптерећења морамо представити као $\mathbf{R}(t) = \hat{\Phi}^T \mathbf{F}(t)$, те имамо:

$$\ddot{\hat{q}}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{\hat{q}}_n + \omega_n^2\hat{q}_n = R_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

Надаље је, ради једноставности, изостављен индекс степена слободе јер посматрамо кретање само једног, произвољног степена слободе, а уводимо индекс временског инкремента.

Функцију оптерећења $R(t)$ претпостављамо као линеарну у кратком временском интервалу (сл. 2).



Слика 2 – Функција модалног оптерећења, линеарна по сегментима

Једначина линеарне функције у интервалу времена Δt је по дефиницији

$$\mathbf{R}(t) = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) \mathbf{R}_{i-1} + \frac{t}{\Delta t} \mathbf{R}_i, \quad (3.11)$$

гдје се вријеме t мјери од почетка временског корака. Сада се тачно рјешење за један интервал времена може написати као

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= A_1(t)\hat{q}_{i-1} + A_2(t)\dot{\hat{q}}_{i-1} + A_3(t)R_{i-1} + A_4(t)R_i, \\ \dot{\hat{q}}(t) &= \dot{A}_1(t)\hat{q}_{i-1} + \dot{A}_2(t)\dot{\hat{q}}_{i-1} + \dot{A}_3(t)R_{i-1} + \dot{A}_4(t)R_i, \\ \ddot{\hat{q}}(t) &= \ddot{A}_1(t)\hat{q}_{i-1} + \ddot{A}_2(t)\dot{\hat{q}}_{i-1} + \ddot{A}_3(t)R_{i-1} + \ddot{A}_4(t)R_i.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Све кориштене функције су приказане у табели 1. Рјешење се може лако провјерити уврштавањем (3.12) у (3.10). Једначине (3.12) се развијају на крају сваког временског интервала Δt и модална помјерања, брзине и убрзања се добијају из следећих рекурентних једначина:

$$\begin{aligned}\hat{q}_i(t) &= A_1\hat{q}_{i-1} + A_2\dot{\hat{q}}_{i-1} + A_3R_{i-1} + A_4R_i, \\ \dot{\hat{q}}_i(t) &= \dot{A}_1\hat{q}_{i-1} + \dot{A}_2\dot{\hat{q}}_{i-1} + \dot{A}_3R_{i-1} + \dot{A}_4R_i, \\ \ddot{\hat{q}}_i(t) &= \ddot{A}_1\hat{q}_{i-1} + \ddot{A}_2\dot{\hat{q}}_{i-1} + \ddot{A}_3R_{i-1} + \ddot{A}_4R_i.\end{aligned}\quad (3.13)$$

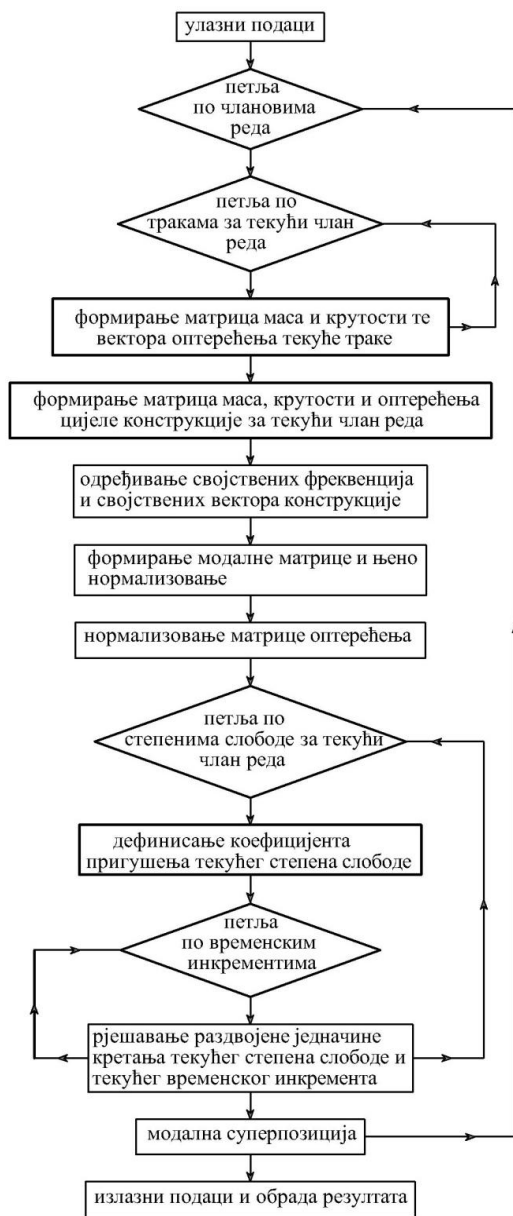
Табела 1 – Преглед кориштених константи и функција

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$	$\bar{\omega} = \omega\xi$	$\bar{\xi} = \xi / \sqrt{1-\xi^2}$	$a_0 = 2\xi / \omega\Delta t$	$a_1 = 1 + a_0$
$a_2 = -1 / \Delta t$	$a_3 = -\bar{\xi}a_1 - a_2 / \omega_D$	$a_4 = -a_1$	$a_5 = -a_0$	$a_6 = -a_2$
$a_7 = -\bar{\xi}a_5 - a_6 / \omega_D$	$a_8 = -a_5$	$a_9 = \omega_D^2 - \bar{\omega}^2$	$a_{10} = 2\bar{\omega}\omega_D$	
$S(t) = e^{-\bar{\xi}\omega t} \sin(\omega_D t)$	$\dot{S}(t) = -\bar{\omega}S(t) + \omega_D C(t)$	$\ddot{S}(t) = -a_9 S(t) + a_{10} C(t)$		
$C(t) = e^{-\bar{\xi}\omega t} \cos(\omega_D t)$	$\dot{C}(t) = -\bar{\omega}C(t) + \omega_D S(t)$	$\ddot{C}(t) = -a_9 C(t) + a_{10} S(t)$		
$A_1(t) = C(t) + \bar{\xi} S(t)$	$A_2(t) = \frac{1}{\omega_D} S(t)$	$A_3(t) = \frac{1}{\omega^2} [a_1 + a_2 t + a_3 S(t) + a_4 C(t)]$		
$A_4(t) = \frac{1}{\omega^2} [a_5 + a_6 t + a_7 S(t) + a_8 C(t)]$	$A_5(t) = \dot{C}(t) + \bar{\xi} \dot{S}(t)$	$A_6(t) = \frac{1}{\omega_D} \dot{S}(t)$		
$A_7(t) = \frac{1}{\omega^2} [a_2 + a_3 \dot{S}(t) + a_4 \dot{C}(t)]$	$A_8(t) = \frac{1}{\omega^2} [a_6 + a_7 \dot{S}(t) + a_8 \dot{C}(t)]$	$A_9(t) = \ddot{C}(t) + \bar{\xi} \ddot{S}(t)$		
$A_{10}(t) = \frac{1}{\omega_D} \ddot{S}(t)$	$A_{11}(t) = \frac{1}{\omega^2} [a_3 \ddot{S}(t) + a_4 \ddot{C}(t)]$	$A_{12}(t) = \frac{1}{\omega^2} [a_7 \ddot{S}(t) + a_8 \ddot{C}(t)]$		

Функције $A_1 - A_{12}$ се рачунају само једном за сваки мод. Дакле, за сваки временски инкремент потребно је извршити само 12 множења и 9 сабирања. Просјечан савремени рачунар треба приближно 10^{-6} секунди за једно множење и једно сабирање. Слиједи да је рачунару за рјешавање 200 корака у секунди за земљотрес у трајању од 50с потребно око 0.01с, тј. за рјешавање 100 модалних једначина му је потребна отприлике 1 секунда. Стога није потребно разматрати друге нумеричке методе као што су брза Fourier – ова трансформација или нумеричко рјешавање Duhamel – овог интеграла. Због брзине ове јасне линеарне технике корак по корак, она може бити примјењена за одређивање тачног спектра одговора користећи при том минималну количину рачунарског времена.

4. ПРОГРАМ МКТСВ – НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕРИ

Програм МКТСВ је развијен на основу програма за одређивање својствених вриједности датог у [1] гдје је приказано формирање матрице крутости и конзистентне матрице маса. Упрошћени дијаграм тока је дат на слици 3.

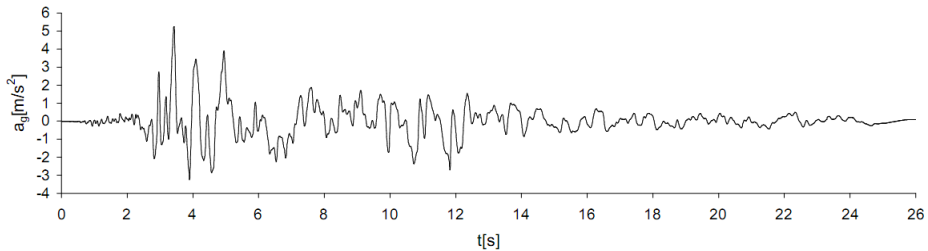


Слика 3 – Упрошћени дијаграм тока програма МКТСВ

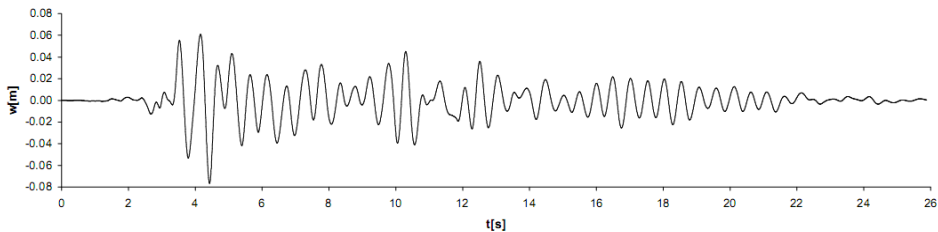
Провјера тачности представљеног алгоритма је извршена поређењем резултата програма МКТСВ и комерцијалног програма ABAQUS, заснованог на МКЕ. Анализирана је слободно ослоњена правоугаона бетонска плоча сљедећих карактеристика:

$$L = 15m, \quad B = 10m, \quad t = 0.12m, \quad E = 31500000kN / m^2, \quad \nu = 0.0.$$

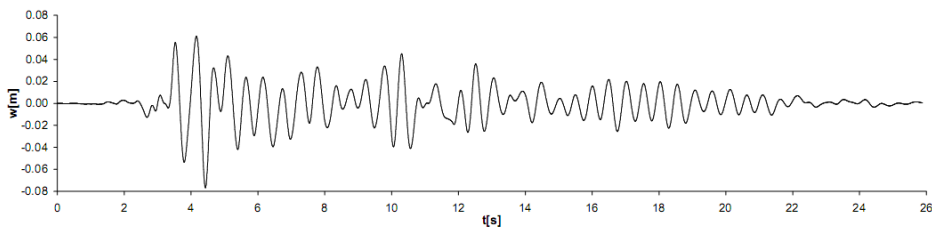
Коефицијент пригушења по свим степенима слободе је 0.05. Посматрано је вертикално помјерање средње тачке плоче. За оптерећење је усвојен запис земљотреса који је погодио Турску област Düzce 21.11.1999. године (сл. 4) магнитуде 7.2 [3].



Слика 4 – акцелерограм земљотреса Düzce



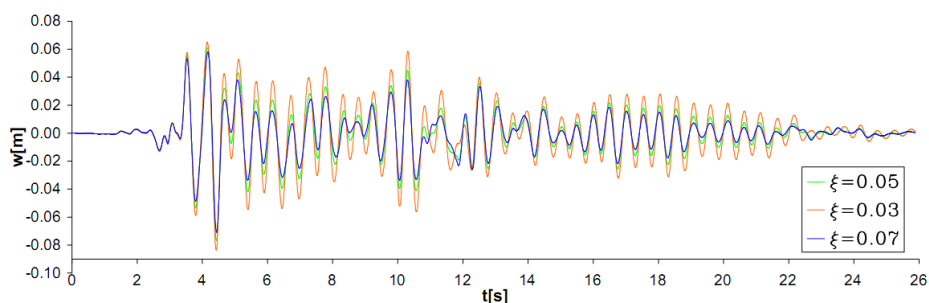
Слика 5 – Помјерање средње тачке плоче према ABAQUS-у



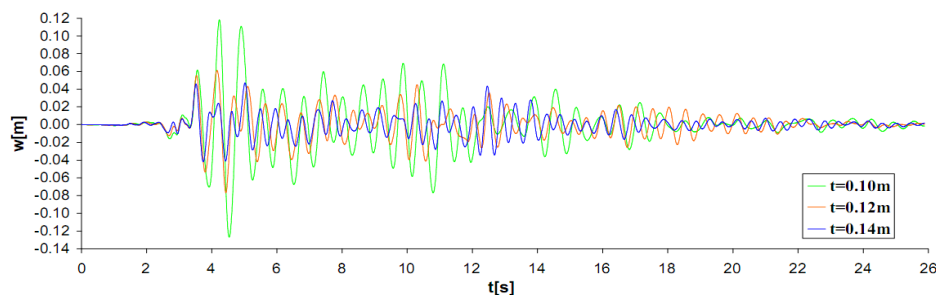
Слика 6 – Помјерање средње тачке плоче према МКТСВ-у

Поређење показује да МКТ и МКЕ дају идентичне резултате. Оно у чему је МКТ у великој предности јесте да, за површинске конструкције и равномерно подијелено оптерећење, даје тачне резултате са малим степеном дискретизације. Тако је МКТСВ-у било потребно само двије траке и два члана реда (први и трећи) да би достигао тачну вриједност екстремног помјерања средње тачке плоче ($w_{min} = -7.69cm$) док је ABAQUS-у за то требала веома густа мрежа од преко 300 коначних елемената.

У наставку је анализиран утицај коефицијента пригушења и дебљине плоче на помјерање средње тачке плоче, (сл. 7 и 8).



Слика 7 – Зависност помјерања средње тачке од коефицијента пригушења, $t = 0.12m$



Слика 8 – Зависност помјерања средње тачке од дебљине плоче, $\xi = 0.05$

5. ЗАКЉУЧАК

Обзиром на начин дискретизације континуума методом коначних трака, усвајањем облика слободних осциловања штапа коначне дужине као функције помјерања у подужном правцу, динамички одзив површинске конструкције се може добити са малим утрошком рачунарског времена уз висок степен тачности са само неколико чланова реда.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Finite strip method in computational engineering* / Милашиновић Д. Д. // Faculties of civil engineering: Subotica, Belgrade and Budapest, 1997, Суботица
- [2] *Static and Dynamic Analysis of Structures* /E.L.Wilson// Computers & Structures, 2002.
- [3] <http://peer.berkeley.edu/>

STOCHASTIC VIBRATION OF PLATES BASED ON A FINITE – STRIP METHOD

Summary: *This paper presents modelling of plate structures bending response due to arbitrary dynamic loading. Equations of motion are solved by transformation to normal coordinates and the “step by step” method is used to obtain the solution of modal equations. Total structure response is obtained with modal superposition. Algorithm described here was implemented in Mathematica and FORTRAN and the result is program MKTSV. Code verification is done by comparing the results from commercial FEM software ABAQUS.*

Key words: *Finite strip method, earthquake, dynamic analysis.*