

## ПРИНЦИП МОДЕЛИСАЊА ТРАНСПОРТА ЗАГАЂИВАЧА У ПРИРОДНИМ ВОДОТОЦИМА

Золтан Хорват<sup>1</sup>  
Мирјана Хорват<sup>2</sup>  
Лајош Ховањ<sup>3</sup>

УДК: 532.5:519.87

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.075

**Резиме:** У оквиру овог рада је приказан принцип раванског моделисања транспорта загађивача у природним водотоцима. Модел обухвата процесе струјања воде, оба облика кретања наноса (суспендовани и вучени), као и процесе транспорта неконзервативне загађујуће материје која је у интеракцији са наносом преко процеса адсорпције/десорпције. Формулисање једначине транспорта загађивача обухватају његову појаву у раствореном и адсорбованом облику. Размена између два вида појаве загађивача (растворени и адсорбовани) је описан преко кинетичких процеса првог реда, при чему је моделисање коефицијената размене уско повезано са доступном површином за адсорпцију.

**Кључне речи:** Равански нумерички модел, струјање, нанос, транспорт неконзервативног загађивача

### 1. УВОД

Развој нумеричких модела је блиско повезан са развојем рачунарске технике. Због почетних ограничења у развоју рачунара прво су се појавили линијски модели. Даље усавршавање рачунара је омогућило развој раванских, а затим и просторних модела. Тренутно постоји низ раванских модела који симулирају струјање воде, транспорт наноса и загађења у њима. Међутим, концепт активног слоја и активног стратума са поделом мешавине наноса на неограничен број гранулометријских интервала, примењен на раванске хидроморфолошке моделе који обухватају и транспорт загађујуће материје уз њихову интеракцију, захтева додатно истраживање. Развијање раванског модела заснованог на овом приступу би уз анализу кретања загађења у алувијалним водотоцима омогућило стицање увида у сложену интеракцију загађујуће материје и наноса.

<sup>1</sup> Др. Золтан Хорват, дипл.инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, е – mail: [horvath.czoczek.zoltan@gmail.com](mailto:horvath.czoczek.zoltan@gmail.com)

<sup>2</sup> Др. Мирјана Хорват, дипл.инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, е – mail: [isic.mirjana@gmail.com](mailto:isic.mirjana@gmail.com)

<sup>3</sup> Др. Лајош Ховањ, дипл.инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, e-mail: [hovanyl@gf.uns.ac.rs](mailto:hovanyl@gf.uns.ac.rs)

Комбинација комплексне геометрије водотока са променљивим доменом струјања, утиче на формирање изузетно сложене струјне слике која је основни покретач наноса. Кретање наноса се одвија у виду транспорта наноса ношеног брзином воде (суспендовани нанос) и/или кретањем наноса на и при дну (вучени нанос). У зависности од покретачких механизма долази до ерозије или депоновања наноса који тиме мења морфологију корита и на тај начин повратно утиче на струјну слику водотока. Поред овога, зрна различитих величина различито реагују на исте хидрауличке услове, што додатно отежава њихово математичко моделисање. Са друге стране, загађујућа материја се може кретати слободно (растворено) у води или везана за честице наноса услед чега се све потешкоће моделисања транспорта наноса преносе и на моделисање транспорта загађивача. Дакле, циљ овог рада је приказ раванског математичког модела, који би омогућио симулирање сложене међузависности струјања воде, транспорта наноса и загађивача у природним водотоцима.

## 2. МОДЕЛ ТЕЧЕЊА ВОДЕ

Нумерички модел подразумева решавање једначина струјања воде (једначина одржања масе и једначина одржања количине кретања), осредњених по дубини тока у ортогоналном криволинијском координатном систему [1,2,3]. Предметне једначине су решаване применом методе етапног решавања (разломљених корака), па се оне растављају на три сукцесивна корака: адвективни, дифузиони и пропагациони. Пошто адвективни корак има изразито хиперболички карактер, он се решава методом карактеристика [4]. У случају дифузионог и пропагационог корака се користи метода коначних разлика у комбинацији са АДИ методом [1] и Томасовим алгоритмом. Детаљан опис овде поменутог модела течења воде у природним водотоцима је дат у [3].

## 3. МОДЕЛ ПОНАШАЊА НАНОСА

Транспорт суспендованог наноса се описује једначином адвекције-дифузије са додатним чланом који узима у обзир тоњење зрна наноса. За процесе који се одвијају на дну и при дну речног корита се примењује метода активног слоја и активног стратума [2,3]. Овај приступ подразумева да се активни слој састоји од зрна наноса које се крећу у виду вученог наноса, као и зрна која су на самој површини корита или непосредно испод површине корита, а која су под непосредним утицајем струје. Овај концепт моделисања је развијен за природну мешавину наноса која се представља произвољним бројем гранулометријских интервала означених индексом  $k=1, \dots, K$ .

Начелно, модел понашања наноса подразумева једначину одржања масе суспендованог наноса (посебно за све гранулометријске интервале), једначине одржања масе наноса у активном слоју (посебно за све гранулометријске интервале) и глобалне једначине одржања масе наноса на дну. У сагласности са генералном стратегијом нумеричког решавања, и на једначине понашања наноса

се примењује метода разломљених корака. У адвективном кораку су обухваћени адвективни делови једначине одржања масе суспендованог наноса, једначина одржања масе наноса у активном слоју и глобална једначина одржања масе наноса на дну. Наведене једначине се решавају за све гранулометријске интервале, симултано. Након овога се решава дифузиони корак, који подразумева дифузионе делове једначине одржања масе суспендованог наноса. За једначине које имају хиперболички карактер се примењује метода карактеристика, а за једначине које имају параболички карактер метода коначних разлика у комбинацији са АДИ методом и Томасовим алгоритмом. Детаљнији опис модела понашања наноса се може наћи у [2,3].

#### 4. МОДЕЛ ПОНАШАЊА ЗАГАЂИВАЧА

У овом раду се разматра понашање неконзервативне загађујуће материје која има одређену тенденцију да се везује за зрна наноса. Дакле, неопходно је посматрати загађивач који се јавља у два облика: у раствороном и адсорбованом. Међутим, битно је приметити да се адсорбовани загађивач може јавити на суспендованом наносу, наносу у активном слоју или на наносу који се налази у дубљим стратумима. Размена између раствороног и адсорбованог загађивача се може моделисати преко кинетичких коефицијената првог реда [5,6]. Коефицијент  $\mu_1$  регулише прелаз из раствороног у адсорбовани облик (адсорпција), док коефицијент  $\mu_2$  регулише инверзни процес (десорпција). Међутим, неконзервативне загађујуће материје имају тенденцију да се адсорбују на мања зрна наноса [7], тако да модел мора предвидети и ситуацију да само неки гранулометријски интервали наноса учествују у интеракцији са загађујућом материјом. Ови гранулометријски интервали се називају активни гранулометријски интервали и означавају се индексом  $k=1, \dots, K_a$ .

Применом методе етапног решавања добија се адвективни корак, који обухвата адвективне делове једначине одржања масе раствороног загађивача и загађивача адсорбованог на суспендовани нанос. Наведеним члановима се придружују они делови једначина који описују интеракцију између разних видова појаве загађивача. У наставку се наводе адвективни кораци означени горњим индексом  $a$

$$\left(\frac{\partial C^\dagger}{\partial t}\right)^a + \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial C^\dagger}{\partial \xi} + \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial C^\dagger}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho \cdot d} \sum_{k=1}^{K_a} S_k^\dagger - \sum_{k=1}^{K_a} (\mu_1)_k C^\dagger + \sum_{k=1}^{K_a} (\mu_2)_k C_k C_k^{\dagger\dagger}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial (C_k C_k^{\dagger\dagger})}{\partial t}\right)^a + \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial (C_k C_k^{\dagger\dagger})}{\partial \xi} + \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial (C_k C_k^{\dagger\dagger})}{\partial \eta} = \frac{S_k^{\dagger\dagger}}{\rho \cdot d} + (\mu_1)_k C^\dagger - (\mu_2)_k C_k C_k^{\dagger\dagger}, \quad (2)$$

којима се прикључује једначина одржања масе адсорбованог загађивача у активном слоју

$$\begin{aligned} \rho_s (1-p) \frac{\partial}{\partial t} (\beta_k B_k^{\dagger\dagger} E_a) + \frac{1}{h_\xi \cdot h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ h_\eta (\varepsilon_\xi)_k \right] + \\ + \frac{1}{h_\xi \cdot h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ h_\xi (\varepsilon_\eta)_k \right] = -S_k^\dagger - S_k^{\dagger\dagger} + (S_f^{\dagger\dagger})_k. \end{aligned} \quad (3)$$

У једначинама (1), (2) и (3)  $u$  и  $v$  означавају две компоненте брзине у координатним правцима  $\xi$  и  $\eta$ , елементи метричког тензора су обележени са  $h_\xi$  и  $h_\eta$ . Бездимензионална концентрација суспендованог наноса је  $C_k$ , фракциони удео гранулометријског интервала  $k$  у мешавини наноса активног скоја је  $\beta_k$ , док  $E_a$  означава дебљину активног слоја. Густина мешавине воде и наноса је  $\rho$ , порозност наносног материјала у активном слоју је означена као  $p$ , при чему је густина зрна наноса  $\rho_s$ . У предметним једначинама  $C^\dagger$  означава бездимензионалну концентрацију раствореног загађивача,  $C_k^{\dagger\dagger}$  је бездимензионална концентрација загађивача адсорбованог на суспендовани нанос,  $\beta_k^{\dagger\dagger}$  представља бездимензионалну концентрацију загађивача адсорбованог на нанос који се налази у активном слоју, члан  $S_k^\dagger$  означава члан извора раствореног загађивача који обухвата процес адсорпције/десорпције са/на зрна наноса у активном слоју,  $S_k^{\dagger\dagger}$  је члан извора загађивача адсорбованог на зрна наноса услед процеса депоновања наноса из суспензије и увлачења наноса у суспензију,  $\varepsilon_k$  представља флуks загађивача адсорбованог на зрна вученог наноса, док  $(S_f^{\dagger\dagger})_k$  означава размену адсорбованог загађивача између активног слоја и активног стратума. Битно је приметити да су бездимензионалне концентрације адсорбованог загађивача везане за присуство одговарајућег наноса на који су адсорбовани, тј. ове величине се везују за концентрацију суспендованог наноса, односно фракциони удео одређеног гранулометријског интервала.

Једначине дифузионог корака обухватају преостале чланове једначина одржања масе раствореног загађивача и загађивача адсорбованог на зрна суспендованог наноса. У наставку се наводе дифузиони кораци означени горњим индексом  $a+d$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial C^\dagger}{\partial t} \right)^{a+d} - \left( \frac{\partial C^\dagger}{\partial t} \right)^a = \frac{1}{h_\xi \cdot h_\eta \cdot d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi} v_\xi \frac{\partial C^\dagger}{\partial \xi} d \right) + \\ + \frac{1}{h_\xi \cdot h_\eta \cdot d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta} v_\eta \frac{\partial C^\dagger}{\partial \eta} d \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} (C_k C_k^{\dagger\dagger}) \right)^{a+d} - \left( \frac{\partial}{\partial t} (C_k C_k^{\dagger\dagger}) \right)^a = \frac{1}{h_\xi \cdot h_\eta \cdot d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi} v_\xi \frac{\partial (C_k C_k^{\dagger\dagger})}{\partial \xi} d \right) + \\ + \frac{1}{h_\xi \cdot h_\eta \cdot d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta} v_\eta \frac{\partial (C_k C_k^{\dagger\dagger})}{\partial \eta} d \right) \end{aligned} \quad (5)$$

У једначинама (4) и (5)  $\nu_\xi$  и  $\nu_\eta$  означавају коефицијенте турбулентне вискозности у два координатна правца [8].

#### 4.1. Адвективни корак

Адвективни корак модела понашања загађивача се решава методом карактеристика, која трансформише једначине (1) и (2) у

$$\frac{DC^\dagger}{Dt} = \frac{1}{\rho \cdot d} \sum_{k=1}^{K_a} S_k^\dagger - \sum_{k=1}^{K_a} (\mu_1)_k C^\dagger + \sum_{k=1}^{K_a} (\mu_2)_k C_k C_k^{\dagger\dagger}, \quad (6)$$

$$\frac{D}{Dt} (C_k C_k^{\dagger\dagger}) = \frac{S_k^{\dagger\dagger}}{\rho \cdot d} + (\mu_1)_k C^\dagger - (\mu_2)_k C_k C_k^{\dagger\dagger}, \quad (7)$$

дуж карактеристичних линија дефинисаних са

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{u}{h_\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{v}{h_\eta}. \quad (8)$$

Интеграљење једначина (6) и (7) дуж карактеристичних линија захтева познавање њихових координата истих, што је детаљно објашњено у [3]. Само интеграљење једначина (6) и (7) се може извршити применом уопшеног трапезног правила или неке друге погодне нумеричке методе.

Дискретизација једначине (3) се врши на смакнутој рачунској мрежи, што коначно даје следећи облик једначине одржања масе загађивача адсорбованог на зрна наноса активног слоја

$$\begin{aligned} \rho_s (1-p) \frac{(\beta_k \beta_k^{\dagger\dagger} E_a)_{i,j}^{n+1} - (\beta_k \beta_k^{\dagger\dagger} E_a)_{i,j}^n}{\Delta t} + \text{div}(\varepsilon_k) = \\ = -\theta (S_k^\dagger + S_k^{\dagger\dagger})_{i,j}^{n+1} - (1-\theta) (S_k^\dagger + S_k^{\dagger\dagger})_{i,j}^n + [(S_f^{\dagger\dagger})_k]_{i,j}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\text{div}(\varepsilon_k)$  означава дискретизовани члан дивергенције флуksа загађивача адсорбованог на зрна вученог наноса,  $\Delta t$  је временски корак, горњи индекси  $n+1$  и  $n$  редом означавају наредни и текући временски тренутак, а доњи индекси  $i,j$  представљају рачунску тачку.

Да би се овде представљени систем једначина „затворио“ потребне су и тзв. помоћне зависности. Пошто десорпција не зависи од доступности површине зрна наноса, него само од кинетике процеса, сматра се да је

$$(\mu_2)_k = \mu_2 = \text{const}. \quad (10)$$

Међутим, адсорпција се моделише помоћу кинетичког коефицијента који је уско везан за површину наноса доступну за овај процес, па се тврди да је

$$(\mu_1)_k = \chi_k^{ss} \cdot \omega_k^{ss} \quad (11)$$

где  $\chi_k^{ss}$  означава „брзину“ адсорпције загађивача на зрна суспендованог наноса и има димензију брзине, док  $\omega_k^{ss}$  представља површину зрна суспендованог наноса доступну за процес адсорпције по јединици запремине воде која садржи тај нанос,

tj. површину наноса. Брзина адсорпције загађивача на срна наносе се користи као калибрациони параметар модела. Флуks загађивача адсорбованог на вучени нанос је, по својој природи, дефинисан самим флуksом вученог наноса. Дакле, предметна величина се моделише помоћу једначине

$$(\varepsilon_{\xi})_k = (q_{\xi})_k \cdot \beta_k^{\dagger\dagger}, \quad (\varepsilon_{\eta})_k = (q_{\eta})_k \cdot \beta_k^{\dagger\dagger}, \quad (12)$$

где  $q_{\xi}$  и  $q_{\eta}$  означавају флуks вученог наноса (сматра се да је флуks вученог наноса познат из раније спроведеног прорачуна наноса). Члан извора раствореног загађивача услед процеса адсорпције/десорпције са/на зрна наноса у активном слоју се, конзистенције ради, раставља на своје чиниоце, па је

$$S_k^{\dagger} = (S_k^{\dagger})^{des} - (S_k^{\dagger})^{ads}. \quad (13)$$

Слично претходном резонувању, члан извора адсорбоване загађујуће материје из активног слоја се везује за одговарајуће наносне процесе, па је

$$S_k^{\dagger\dagger} = E_k^{sed} \cdot \beta_k^{\dagger\dagger} - D_k^{sed} \cdot \beta_k^{\dagger\dagger}. \quad (14)$$

У последњој једначини  $E_k^{sed}$  и  $D_k^{sed}$  редом означавају увлачење наноса у суспензију из активног слоја и депновање наноса из суспензије у активни слој. На крају се наводи и једначина којом се описује чан размене адсорбованог загађивача између активног слоја и активног стратума

$$(S_f^{\dagger\dagger})_k = -\rho_s (1-p) \frac{\partial}{\partial t} [(z_b - E_a) \beta_k \beta_k^{\dagger\dagger}], \quad (15)$$

при чему  $z_b$  означава коду дна.

## 4.2. Дифузиони корак

Једначине дифузионог корака се дискретизују помоћу Кранк-Николсонове шеме [9], након чега се раздвајају на два ортогонална правца помоћу АДИ методе. Једначине за  $\xi$  координатни правец су

$$\begin{aligned} L_i^{\dagger} (C^{\dagger})_{i-1,j}^d + M_i^{\dagger} (C^{\dagger})_{i,j}^d + N_i^{\dagger} (C^{\dagger})_{i+1,j}^d &= O_i^{\dagger}, \\ L_i^{\dagger\dagger} (C_k^{\dagger\dagger})_{i-1,j}^d + M_i^{\dagger\dagger} (C_k^{\dagger\dagger})_{i,j}^d + N_i^{\dagger\dagger} (C_k^{\dagger\dagger})_{i+1,j}^d &= O_i^{\dagger\dagger}. \end{aligned} \quad (16)$$

Након спровођења прорачуна у  $\xi$  правцу, прелази се на прорачун по  $\eta$  координатном правцу користећи једначине

$$\begin{aligned} L_j^{\dagger} (C^{\dagger})_{i,j-1}^d + M_j^{\dagger} (C^{\dagger})_{i,j}^d + N_j^{\dagger} (C^{\dagger})_{i,j+1}^d &= O_j^{\dagger}, \\ L_j^{\dagger\dagger} (C_k^{\dagger\dagger})_{i,j-1}^d + M_j^{\dagger\dagger} (C_k^{\dagger\dagger})_{i,j}^d + N_j^{\dagger\dagger} (C_k^{\dagger\dagger})_{i,j+1}^d &= O_j^{\dagger\dagger}. \end{aligned} \quad (17)$$

Коефицијенти  $L$ ,  $M$  и  $N$  су познати из претходног рачунског корака, а коефицијети  $O$  су сачињени од вредности познатих из претходног временског корака и претходне итерације. Једначине (16) и (17) се решавају Томасовим алгоритмом.

## 5. ЗАКЉУЧАК

Приказан је равански модел са пратећим рачунским процедурама за симулирање интеракције воде, наноса и загађивача у природним водотоцима. За описивање струјања воде је коришћен сет раванских једначина одржања масе и одржања количине кретања, док је за моделисање понашања наноса коришћен концепт активног слоја и активног стратума заснован на подели наносне мешавине на произвољан број гранулометријских интервала (фракција). У оквиру рада је приказан концепт моделисања транспорта неконзервативне загађујуће материје, која није подложна биолошком и/или хемијском настајању и/или нестајању, а ступа у интеракцију са појединим зрнима наносне мешавине преко процеса адсорпције/десорпције. Ово обухвата појаву загађивача у раствореном и адсорбованом облику, при чему се посебно прати маса материје адсорбоване на суспендовани нанос, нанос у активном слоју, односно нанос у стратумима испод њега. Такође су начелно формулисани механизми размене између наведених видова појаве загађујуће материје, који обухватају процесе адсорпције и десорпције, односно процесе транспорта адсорбоване материје везане за зрна свих видова појаве наноса. Имплементирани концепти математичког моделисања су прилагођени условима сложене геометрије природних водотокова.

## ЗАХВАЛНИЦА

Овај рад је финансиран од стране Министарства за образовање, науку и технолошки развој Републике Србије, број пројекта ТР 37009.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hsieh, T.Y., Yang, J.C.: Implicit two-step split-operator approach for modelling two-dimensional open channel flow. *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, **2004.**, Vol. 22, No. 2, pp. 113-139.
- [2] Budinski, L., Spasojević, M.: 2-D Modeling of Flow and Sediment Interaction: Sediment Mixtures. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, **2013.**, Vol. 140, No. 6, pp. 199-209.
- [3] Horvat, Z., Isic, M., Spasojevic, M.: Two dimensional river flow and sediment transport model. *Environmental Fluid Mechanics*, DOI: 10.1007/s10652-014-9375-y.
- [4] Isic, M., Horvat, Z., Spasojevic, M.: Advection step in the split-operator approach applied to river modeling. *Applied Numerical Mathematics*, **2013.**, Vol. 72, pp. 1-18.
- [5] Perianez, R.: Environmental modelling in the Gulf of Cadiz: Heavy metal distribution in water and sediments. *Science of the Total Environment*, **2009.**, Vol. 407, pp. 3392-3406.

- [6] Perianez, R.: Modelling the environmental behaviour of pollutants in Algeciras Bay (south Spain). *Marine Pollution Bulletin*, **2012.**, Vol. 64, pp. 221-232.
- [7] Esima, D.: *Suspended Matter in the Aquatic Environment*, Springer-Verlag, Berlin, **1993.**
- [8] Zhou, G., Wang, H., Shao, X., Jia, D.: Numerical model for sediment transport and bed degradation in the Yangtze Channel Downstream of Three Gorges Reservoir. *Journal of Hydraulic Engineering*, **2009.**, Vol. 135, No. 9, pp. 729-740.
- [9] Crank, J., Nicolson, P.: A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Advances in Computational Mathematics*, **1996.**, Vol. 6, pp.207-226.

## PRINCIPLES OF POLLUTANT TRANSPORT IN NATURAL WATERCOURSES

**Summary:** *This work presents the principles of two-dimensional modeling of pollutant transport in natural watercourses. The model incorporates water flow computation, both aspects of sediment transport (suspended and bed-load), as well as the processes of nonconservative pollutant transport including its interaction with sediment particles by adsorption/desorption. Deriving the governing equations for pollutant transport included the dissolved and adsorbed pollutant. The exchange between the dissolved and adsorbed pollutant was described using a first order kinetic process, while the modeling of the exchange coefficients remained closely related to the sediment surface available for adsorption.*

**Keywords:** *2-D numerical model, flow, sediment, nonconservative pollutant transport*