

ГРАНИЧНО ОПТЕРЕЂЕЊЕ ПРАВОУГАОНЕ ПЛОЧЕ

Жарко Лазић¹

Кристина Костадиновић²

Зоран Конески³

Јовица Станојевић⁴

УДК: 624.042.073

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.039

Резиме: Прорачун пресјечних сила армирано-бетонских плоча, у пракси најчешће се врши према Теорији еластичности(ТЕ). У случајевима када се димензионисање пресека треба урадити према теорији граничне носивости онда се рјешења статичких утицаја, у тренутку непосредно пред лом, требају наћи из нееластичних рјешења. Методе за прорачун армирано-бетонских конструкција у тренутку појаве лома, развијане до данас базиране су на рјешењима Теорије пластичности(ТП). С тим у вези, код армирано-бетонских плоча, у раду је описан конкретан случај, а тиче се формирања линија пластичних зглобова, познат као Теорија линија лома(ТЛ). У оквиру (ТЛ) описане су кинематичка и статичка теорема. На примјерима слободно ослоњене и укљештене армирано-бетонске плоче дефинисане су горња и доња гранична вриједност оптерећења. У програмском пакету Софистик анализирани су примјери армирано-бетонских плоча у форми дефинисања облика линија лома у поређењу са стварним облицима линија лома.

Кључне речи: Теорија еластичности, Теорија пластичности, линије пластичних зглобова, Теорија линија лома, кинематичка и статичка теорема, Софистик

1. УВОД

Новији прописи у многим земљама прелазе са теорије допуштених напона на теорију граничних стања. Примјена принципа (ТП) није ограничена само на гредне носаче, већ је могуће проширити њену примену на дводимензионалне и тродимензионалне носаче. Проблем плоче оптерећене на савијање је од примарног значаја за праксу у грађевинарству. Примјеном принципа (ТП) могуће је употребити три различите методе за решавање овог проблема:

¹Жарко Лазић, дипл. инж. грађ., студент докторских студија, Грађевински факултет Универзитета у Београду, e-mail: zarkolazic87@live.com

²Кристина Костадиновић, дипл. инж. грађ., студент докторских студија, Грађевински факултет Универзитета у Београду, e-mail: kostadinovic.kristina@yahoo.com

³Зоран Конески, дипл. инж. грађ., студент докторских студија, Грађевински факултет Универзитета у Београду, e-mail: koneskizoran@gmail.com

⁴Јовица Станојевић, дипл. инж. грађ., e-mail: stanojevic.j@gmail.com

- I. Методу инкременталне пластификације,
- II. Методу која се заснива на налажењу доње границе оптерећења (принцип виртуелних радова),
- III. Методу која се заснива на налажењу горње границе оптерећења (анализира плочу која је дошла у стање механизма).

Ове методе дају различиту тачност резултата и захтјевају различите начине прорачуна. Метода инкременталне пластификације захтјева у општем случају, употребу компјутерских програма. Овај прорачун је сувише комплексан за рачуницу без помоћи компјутера. Мануелна употреба доње границе је такође доста комплексна, али врло корисна. Горња граница оптерећења, која се одређује помоћу (ТЛ) се може одредити без помоћи компјутера.

Код армирано бетонских плоча, прорачун пресјечних сила се најчешће врши према претпоставкама (ТЕ). Ако се димензионисање пресјека треба да изврши према теорији граничне носивости онда би рјешења статичких утицаја у тренутку непосредно пред лом требало наћи из нееластичних рјешења. Димензионисање пресјека према линеарно повећаним утицајима из еластичног рјешења не одговара у потпуности, због прерасподијеле статичких утицаја, која може у тренутку непосредно пред лом бити знатна, као последица формирања већих прслина на плочи и редуције појединих дијелова плоче. [1]

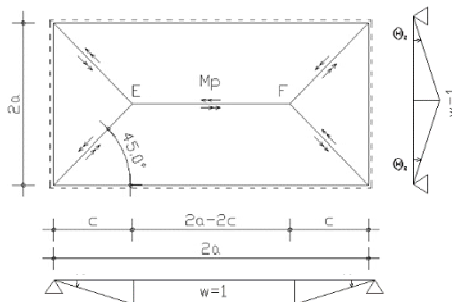
2. ПРИМЈЕРИ

2.1. Слободно ослоњена плоча

2.1.1. Горња гранична вриједност оптерећења

Посматра се слободно ослоњена правоугаона плоча димензија $2ax2b$, оптерећена равномјерно расподијелим оптерећењем управно на средњу раван плоче, замјењујућег резултујућег интензитета F .

Рад унутрашњих сила једнак је:



$$D = M_p(2\theta_2 2a + 2\theta_1 2b) = M_p \left(2 \frac{1}{b} 2a + 2 \frac{1}{c} 2b \right) = 4 \cdot M_p \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) \quad (1)$$

Рад спољашњих сила једнак је производу интензитета оптерећења и запремине тијела које настаје при лому плоче, а чија је висина $w_0=1$:

$$W = q_u \cdot \left(\frac{1}{2} 2b(2a - 2c) + \frac{1}{2} 2bc \right) = \frac{F}{2ab} \left(a - \frac{c}{2} \right) \quad (2)$$

Из услова да је $D=W$ имамо $\rightarrow F = 8aM_p \frac{\frac{a+b}{b}-\frac{a}{c}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{c}}$ (3)

Потражићемо минимум функције оптерећења F ,

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 8aM_p \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\frac{a+b}{b}-\frac{a}{c}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{c}} \right) = 0, \quad c_{1,2} = \frac{b}{a} (-b \pm \sqrt{b^2 + 3a^2}) \quad (4,5)$$

Узимајући у обзир физичко значење параметра c , логично је задржати само позитивно рјешење,

$$c = \frac{b}{a} (\sqrt{b^2 + 3a^2} - b) \quad (6)$$

Однос параметара a и c можемо написати на следећи начин,

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} \left(\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3} - \frac{b}{a} \right), \quad \text{за } s=b/a \rightarrow \frac{c}{a} = s(\sqrt{s^2 + 3} - s) \quad (7,8)$$

Сада се може написати горња граница резултујућег оптерећења F^U као:

$$F^U = \frac{8M_p}{3k} (\sqrt{s^2 + 3} + s)^2, \quad \text{за } (a=b), s=1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1(\sqrt{1^2 + 3} - 1) = 1 \rightarrow c = a \quad (9,10)$$

Слиједи $\rightarrow F^U = \frac{8M_p}{3 \cdot 1} (\sqrt{1^2 + 3} + 1)^2 = \frac{8M_p}{3} 3^2 = 24M_p. [2] \quad (11)$

2.1.2. Доња гранична вриједност оптерећења (метода граничних коефицијената *Manolacos-Mamalis* [3])

Посматраће се иста плоча, за коју се претпоставља да је танка плоча. Тада једначина равнотеже у свим тачкама плоче, оптерећене до границе пластичности, има следећи облик:

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + q(x, y) = -\frac{F}{4abM_p} \quad (12)$$

Функције m_x , m_y и m_{xy} имају облик $m_x=1+Ax+Bx^2$, $m_y=1+Cy+Dy^2$, $m_{xy}=Exy$,

(A, B, C, D и E непознати коефицијенти интеграције). Постављајући граничне услове одређујемо коефицијенте интеграције. Ако претпоставимо да се почетак координатног система налази у средини плоче имамо следеће вриједности граничних коефицијената:

$x=a \rightarrow m_x=0$; $y=b \rightarrow m_y=0$; $x=-a \rightarrow m_x=0$; $y=-b \rightarrow m_y=0$, па имамо да су $A=0$, $B=-1/a^2$, $C=0$, $D=-1/b^2$. Бездимензионални моменти сада имају облик:

$$\begin{aligned} m_x &= 1 - x^2/a^2 \rightarrow \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\frac{2}{a^2} \\ m_y &= 1 - x^2/b^2 \rightarrow \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\frac{2}{b^2} \end{aligned} \quad (13,14)$$

Када уврстимо горње изразе у услов равнотеже добијемо

$$2 \frac{\partial^2 (Exy)}{\partial x \partial y} = -\frac{F}{4abM_p} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \quad (15)$$

Слиједи

$$m_{xy} = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \right) xy \quad (16)$$

Услов равнотеже гласи

$$\pm \left(2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) - \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2} \right) + \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \right) xy = 1 \quad (17)$$

Усредини и на ивицама плоче услов је испуњен. Када се све четири стране пластификују онда настаје лом.

Постављајући услове пластификовања у угловима плоче (убацујемо координате чворова углава редом) добијамо једначину

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \right) = 1 \quad (18)$$

Одакле имамо

$$F_{1,z}^L = 8M_p \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + 1 \right) \quad (19)$$

Доња граница оптерећења

$$\max(F_1^L, F_2^L) \rightarrow F^L = 8M_p \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + 1 \right), \text{ за квадратну плочу } F^L = 24M_p. \quad (20,21)$$

2.2. Укљештена плоча

2.2.1. Горња гранична вриједност оптерећења

Формираће се иста линија лома као и у случају слободно ослоњене плоче.

Укљештене ивице плоче постају линије лома по достизању момената пластичности у укљештењима. Може се доказати да је укупан рад унутрашњих сила на ивичним линијама лома једнак укупном раду на унутрашњим линијама лома, из чега се може закључити да је горња граница граничног оптерећења укљештене плоче два пута већа од горње границе граничног оптерећења слободно ослоњене плоче.

2.2.2. Доња гранична вриједност оптерећења

Методом граничних коефицијената[3], постављањем граничних услова, добијамо: $x = a \rightarrow m_x = -1$; $x = -a \rightarrow m_x = 1$; $y = b \rightarrow m_y = -1$; $y = -b \rightarrow m_y = 1$, па из услова равнотеже имамо да су $A=0$, $B=-1/a^2$, $C=0$, $D=-1/b^2$,

$$E = 2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \quad (22)$$

Преко координата чворова имамо услов:

$$\pm 2 + \left(2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \right)^2 = 2 \quad (23)$$

односно

$$\left[\left(2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \right)^2 = 4 \right] \vee \left[\left(2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} \right)^2 = 0 \right] \quad (24)$$

одакле имамо

$$\left[2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} = 2 \right] \vee \left[2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} = -2 \right] \vee \left[2 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{F}{8abM_p} = 0 \right] \quad (25)$$

па је

$$F_1^L = 16M_p \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - 1 \right); F_2^L = 16M_p \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + 1 \right); F_3^L = 16M_p \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \quad (26,27,28)$$

За доњу границу имамо да је

$$\max(F_1^L, F_2^L, F_3^L) \rightarrow F^L = 16M_p \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + 1 \right) \quad (29)$$

За квадратну плочу

$$F^L = 48M_p \quad (30)$$

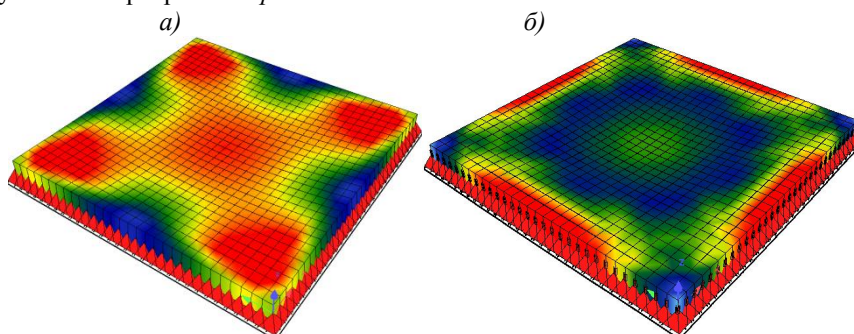
3. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕР

У програмском пакету *Софистик* [4] анализирани су квадратне аб плоче $3.00 \times 3.00m$, слободно ослоњена и укљештена по контури. Карактеристике материјала:

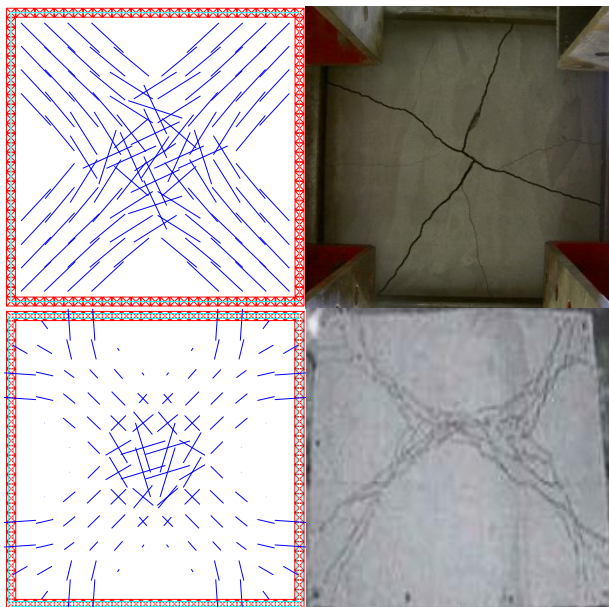
Material C25/30 (EN 1992)

Young's modulus	E	31476	[N/mm ²]	Safety factor	1.50	[-]
Poisson ratio	μ	0.20	[-]	Strenght	fc	25.00 [MPa]
Shear modulus	G	13115	[N/mm ²]	Nominal strength	fck	25.00 [MPa]
Compression modulus	K	17487	[N/mm ²]	Tensile strength	fctm	2.56 [MPa]
Weight	γ	25.0	[kN/m ³]	Tensile strength	fctk,05	1.80 [MPa]
Density	ρ	2350.00	[kg/m ³]	Tensile strength	fctk,95	3.33 [MPa]
Elongation coefficient	α	1.00E-05	[1/K]	Bond strength	fbd	2.69 [MPa]
				Service strength	fcm	33.00 [MPa]
				Fatigue strength	fcd,fat	15.00 [MPa]
				Tensile strength	fctd	1.20 [MPa]

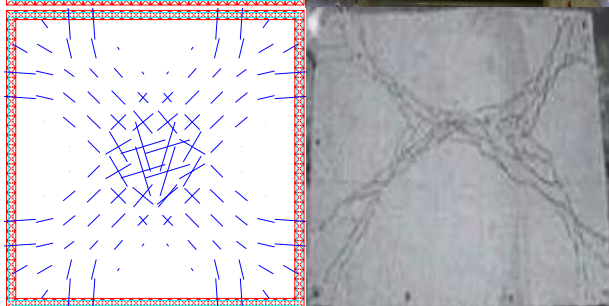
Резултати из програма *Софистик*:



Слика 2. Концентрација максималних напона код а) слободано ослоњене и б) укљештене аб плоче



Слика 3. Развој прелина код слободно ослоњене плоче
а) Sofistik
б) Експериментално



Слика 4. Развој прелина код укљештене плоче
а) Sofistik
б) Експериментално

4. ЗАКЉУЧАК

У изложеном раду су, кроз примјере, описани поступци за одређивање горњег и доњег лимита граничног оптерећења слободно ослоњене и укљештене правоугаоне плоче. Методе граничних коефицијената и методе линија лома су веома једноставне и захвалне у смислу њихове лаке и брзе примјене за анализу понашања плоче под дејством критичног оптерећења, без употребе програмских пакета. Сам начин одређивања горње границе базира се на *теорему горње граничне вриједности* или *кинематичког теорема*, према коме облик линија лома мора бити такав да однос радова унутрашњих и спољашњих сила достиже најмању вриједност. Код одређивања доње границе, базира се на *теорему доње граничне вриједности* или *статичком теорему*, користећи методу граничних коефицијената коју су дали *Manolakis* и *Mamalis*. Из примјера се може закључити да, и у случају горњег граничног оптерећења и у случају доњег граничног оптерећења, укљештена правоугаона плоча има двоструко већу вриједност у односу на исту плочу слободно ослоњену. Употребом програмског пакета *Софистик* приказане су графички концентрације напона у плочи као и сам развој прелина, чији облик је приближно исти као облик стварних линија лома добијених експериментално.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bajić D., Radosavljević Ž.: *Armirani Beton 3*, Građevinska knjiga, 1988.

- [2] Lubliner J.: *Plasticity Theory*, University of California at Berkeley, 2006.
- [3] Manolacos D. E., Mamalis A. G.: *Upper and Lower Bounds for Rectangular Plates Transversely Loaded*, Department of MEng., University of Athens, Greece, 1986.
- [4] Софистик АГ, *Manuals*, Ver. 2014.3, Oberschleissheim, Germany, 2013.

ULTIMATE LOAD OF RECTANGULAR PLATE

Summary: *Calculation of cross section forces reinforced concrete slab, in practice often is done according to the Theory of elasticity (TE). In cases where the dimensioning section should be done according to the theory of critical load then the solution static actions, at the moment just before the break, should be found from the inelastic solutions. Methods for the calculation of reinforced concrete structures at the time of failure, developed to date are based on the solutions of Theory of plasticity (TP). In this connection, with a reinforced concrete slab, the paper describes the particular case, which concerns the formation of the plastic hinge line, known as the Yield line theory (YL). Within the (YL) are described kinematic and static theorem. For examples of simply supported and fixed reinforced concrete slabs are defined upper and lower load limit value. In the software package Sofistik there are analyzed examples of reinforced concrete plate in the form of defining the shape line fracture in comparison to the realistic forms of line fracture.*

Keywords: *Theory of Elasticity, Theory of Plasticity, lines of plastic hinges, Yield line theory, kinematic and static theorem, Sofistik*