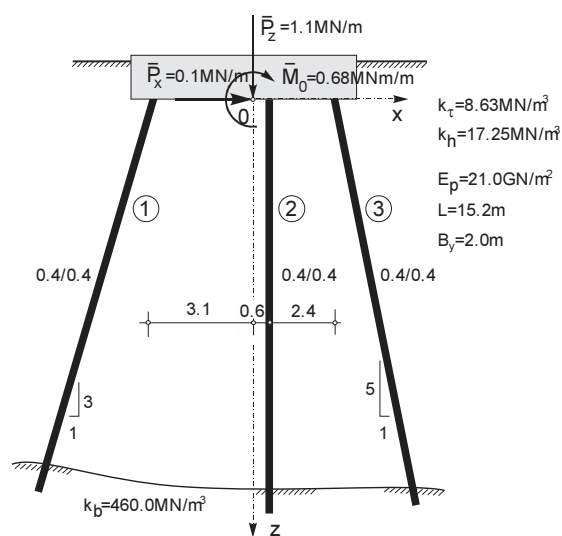


BROJNI PRIMER - 9

Na slici 9.12 je poprečni presek trakastog temelja obalnog zida. Temelj zida je kruta naglavnicu na šipovima. Opterećenje potpornog zida je redukovano u težište naglavnicu. Podužno rastojanje šipova (upravno na ravan crteža) iznosi $B_y = 2.0\text{m}$. U poprečnom preseku, naglavnicu je oslonjena na tri AB šipa dimenzija $0.4/0.4/15.2\text{m}$. Međusobno rastojanje šipova je takvo da se može zanemariti njihovo međusobno dejstvo na nosivost i pomeranja. Šipovi su uklješteni u naglavnicu. Tlo oko naglavnicu je homogeno po dubini. Prosečan horizontalni i smičući modul reakcije tla iznosi $k_h = 17.25 \text{ MN/m}^3$ i $k_r = 8.63 \text{ MN/m}^3$, a modul reakcije tla u bazi šipa $k_b = 460 \text{ MN/m}^3$. Potrebno je izračunati:

- 1) Pomeranje krute naglavnicu u, w, θ .
- 2) Sile i pomeranja glave šipa Q, T, M i s, t, θ .
- 3) Izračunati približne sile u šipovima zanemarujući uticaj tla uz omotač šipa i uklještenje šipa u naglavnicu. Komentarisati rezultate pod 2) i 3).



Slika 9.12 Dispozicija opterećenja grupe šipova preko krute naglavnicu

1)

šip	koordinate glave šipa		koordinate baze šipa		podaci o nagibu šipova	
	$x \text{ (m)}$	$z \text{ (m)}$	$x \text{ (m)}$	$z \text{ (m)}$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	-3.10	0.00	-7.91	14.42	-0.3164	0.9487
2	0.60	0.00	0.60	15.20	0.0000	1.0000
3	3.00	0.00	5.98	14.91	0.1961	0.9806

Rešenje:

Opterećenje naglavnicu u koju je uključena i sopstvena težina, data je po m^1 u pravcu ose y , odnosno upravno na ravan crteža. Šipovi su u pravcu ose y na međusobnom rastojanju od $B_y = 2.0\text{m}$. Da bi se dobilo opterećenje grupe šipova u ravni crteža, potrebno je opterećenje po m^1 naglavnicu pomnožiti sa rastojanjem šipova B_y .

- Proračun karakterističnih parametara šipova

$$E_p I = E_p \frac{d^4}{12} = 21000 \frac{0.4^4}{12} = 44.8 \text{ MNm}^2$$

$$E_p A = 21000 \cdot 0.4^2 = 3360.0 \text{ MN} \quad , \quad S = 4d = 4 \cdot 0.4 = 1.6 \text{ m}$$

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{k_r S}{E_p A}} = \sqrt{\frac{8.6 \cdot 1.6}{3360.0}} = 0.0641 \text{ m}^{-1} \quad , \quad \lambda_r L = 0.0641 \cdot 15.2 = 0.974$$

$$\lambda_h = \sqrt[4]{\frac{k_h d}{4E_p I}} = \sqrt[4]{\frac{17.2 \cdot 0.4}{4 \cdot 44.8}} = 0.443 \text{ m}^{-1}, \quad \lambda_h L = 0.443 \cdot 15.2 = 6.733$$

- Proračun elemenata matrice krutosti šipa i tla u lokalnom koordinatnom sistemu:

$$Q_b/Q = 0.21$$

$$f = 1.15 \Rightarrow K_{Q_s} = \frac{\lambda_r E_p A}{f} = \frac{\lambda_r L E_p A}{L} = 0.847 \cdot 221.05 = 187.25 \text{ MN/m}$$

$$A(\lambda_h L) = 1.0 \Rightarrow K_{Tt} = K_{Tt\infty} = k_h d / \lambda_h = 17.2 \cdot 0.4 / 0.443 = 15.58 \text{ MN/m}$$

$$B(\lambda_h L) = 1.0 \Rightarrow K_{Mt} = K_{Mt\infty} = k_h d / 2\lambda_h^2 = 17.2 \cdot 0.4 / (2 \cdot 0.443^2) = 17.58 \text{ MN/m}$$

$$K_{T\theta} = K_{T\theta\infty} = k_h d / 2\lambda_h^2 = 17.2 \cdot 0.4 / (2 \cdot 0.443^2) = 17.58 \text{ MNm/r}$$

$$C(\lambda_h L) = 1.0 \Rightarrow K_{M\theta} = K_{M\theta\infty} = k_h d / 2\lambda_h^3 = 17.2 \cdot 0.4 / (2 \cdot 0.443^3) = 39.69 \text{ MNm/r}$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} K_{Q_s} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Tt} & K_{T\theta} \\ 0 & K_{Mt} & K_{M\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix}$$

- Matrica [K] krutosti sistema naglavnica–šipovi–tlo

$$\Delta K = K_{Q_s} - K_{Tt} \\ = 187.25 - 15.58 = 171.68 \text{ MN/m}$$

$$k_{11} = \sum \Delta K \cos^2 \alpha + K_{Tt} \\ = 171.68(0.3162^2 + 0.1961^2) + 3.0 \cdot 15.58 = 70.502 \text{ MN/m}$$

$$k_{12} = \sum \Delta K \cos \alpha \sin \alpha \\ = 171.68(-0.162 \cdot 0.9487 + 0.1961 \cdot 0.9806) = -18.491 \text{ MN/m}$$

$$k_{13} = \sum \Delta K \cos \alpha (z \cos \alpha - x \sin \alpha) + K_{Tt} z + K_{T\theta} \sin \alpha \\ = 171.680[-0.3162(3.10 \cdot 0.9487) + 0.1961(-3.0 \cdot 0.9806)] + \\ + 17.58(0.9487 + 1.0 + 0.9806) = -207.213 \text{ MN/r}$$

$$k_{22} = \sum \Delta K \sin^2 \alpha + K_{Tt} \\ = 171.68(0.9487^2 + 1.0^2 + 0.9806^2) + 3 \cdot 15.8 = 537.989 \text{ MN/m}$$

$$k_{23} = \sum \Delta K \sin \alpha (z \cos \alpha - x \sin \alpha) - K_{Tt} x - K_{T\theta} \cos \alpha \\ = 171.68[0.9489 \cdot 3.10 \cdot 0.9487 - 1.0 \cdot 0.6 \cdot 1.0 - 0.9806 \cdot 3.0 \cdot 0.9806] \\ - 15.58(-3.1 + 0.6 + 3.0) - 17.58(-0.3162 + 0.1961) = -124.933 \text{ MN/r}$$

$$k_{33} = \sum \Delta K (x \sin \alpha - z \cos \alpha)^2 + K_{Tt} (x^2 + z^2) + (K_{T\theta} + K_{Mt})(z \sin \alpha + x \cos \alpha) + K_{M\theta} \\ = 171.68[(-3.1 \cdot 0.9487)^2 + (0.6 \cdot 1.0)^2 + (3.0 \cdot 0.9806)^2] + \\ = 15.58(3 \cdot 1^2 + 0.6^2 + 3 \cdot 0^2) + (17.58 + 17.58)(3.1 \cdot 0.3162 + 3.0 \cdot 0.1961) + 3 \cdot 39.69 \\ = 3502.014 \text{ MNm/r}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.502 & -18.491 & -207.213 \\ -18.491 & 537.989 & -124.933 \\ -207.213 & -124.925 & 3502.014 \end{bmatrix}$$

Pomeranje naglavnice će se odrediti za koordinatni početak O , na osnovu matrice krutosti $[K]$ i opterećenja $\{P\}$ na dužini koja odgovara rastojanju šipova upravno na ravan crteža, odnosno od dužini $B_y=2.0m$.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \{P\} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 17.545 & 0.853 & 1.071 \\ 0.853 & 1.919 & 0.119 \\ 1.071 & 0.119 & 0.354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.20 \\ 2.20 \\ -1.36 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ r \end{matrix}$$

2) Rešenje:

- Pomeranja glave šipa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & -x \sin \alpha + z \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & x \cos \alpha + z \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \{U_L\} = [T] \{U\}$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -0.3162 & 0.9487 & 2.9409 \\ 0.9487 & 0.3162 & 0.9803 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.75 \cdot 10^{-3} \\ 5.07 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} (m, rad)$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & -0.6000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.23 \cdot 10^{-3} \\ 3.94 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} (m, rad)$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0.1961 & 0.9806 & -2.9417 \\ 0.9806 & -0.1961 & 0.5883 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.94 \cdot 10^{-3} \\ 4.23 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.94 \cdot 10^{-3} \\ 3.03 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} (m, rad)$$

- Sile na glavi šipa u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Qs} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Tt} & K_{T\theta} \\ 0 & K_{Mt} & K_{M\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ t \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \{R_L\} = [K_L] \{U_L\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.75 \cdot 10^{-3} \\ 5.07 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.515 \\ 0.079 \\ 0.089 \end{Bmatrix} (MN, MNm)$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.23 \cdot 10^{-3} \\ 3.94 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.791 \\ 0.061 \\ 0.069 \end{Bmatrix} (MN, MNm)$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ T \\ M \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 187.25 & 0 & 0 \\ 0 & 15.58 & 17.58 \\ 0 & 17.58 & 39.69 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.94 \cdot 10^{-3} \\ 3.03 \cdot 10^{-3} \\ -5.25 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.923 \\ 0.047 \\ 0.053 \end{Bmatrix} \quad (MN, MNm)$$

- Kontrola globalne ravnoteže prema jednačini (9.12)

$$\sum X = \sum (Q \cos \alpha + T \sin \alpha)_i - P_x = 0$$

$$0.515 \cdot (-0.3162) + 0.079 \cdot 0.949 + 0.061 + 0.923 \cdot 0.1961 + 0.047 \cdot 0.981 - 0.2 = 0.0$$

$$\sum Z = \sum (Q \cos \alpha - T \sin \alpha)_i - P_z = 0$$

$$0.515 \cdot 0.9487 + 0.079 \cdot 0.3162 + 0.791 + 0.923 \cdot 0.9806 + 0.047 \cdot (-0.981) - 2.2 = 0.0$$

$$\sum M = \sum [M_i + (Q \cos \alpha + T \sin \alpha)_i z_i - (Q \cos \alpha - T \sin \alpha)_i x_i] - M_0 = 0$$

$$0.089 + 0.069 + 0.053 - (0.515 \cdot 0.9487 + 0.079 \cdot 0.3162)(-3.1) - (0.791)0.6 - (0.923 \cdot 0.9806 + 0.047 \cdot (-0.981))3.1 + (-1.36) = 0.0$$

3) Rešenje:

U približnoj analizi se zanemaruje tlo duž omotača šipa i uklještenje šipova u naglavnicu. Pretpostavlja se da su šipovi zglobno vezani za naglavnicu i zglobno oslonjeni u bazi. Na taj način se šipovi svode na proste štapove koji prenose samo aksijalne sile. Kontrola statičke određenosti sistema za $n=6$ stepeni slobode (n =broj tačaka), za broj štapova $Z_s=5$, broj krutih uglova $Z_k=1$, broj oslonaca $Z_o=6$ i broj uklještenja $Z_u=0$, glasi:

$$Z_s + Z_k + Z_o + Z_u = 2n \quad \Rightarrow \quad 5 + 1 + 6 + 0 = 2n \quad 12 = 2 \cdot 6$$

Pošto je sistem statički određen, sile u šipovima se mogu odrediti iz uslova ravnoteže:

$$\sum Q_i \cos \alpha_i = P_x \quad \Rightarrow \quad Q_1(-0.3162) + Q_2 \cdot 0 + Q_3 \cdot 0.1961 = 0.20$$

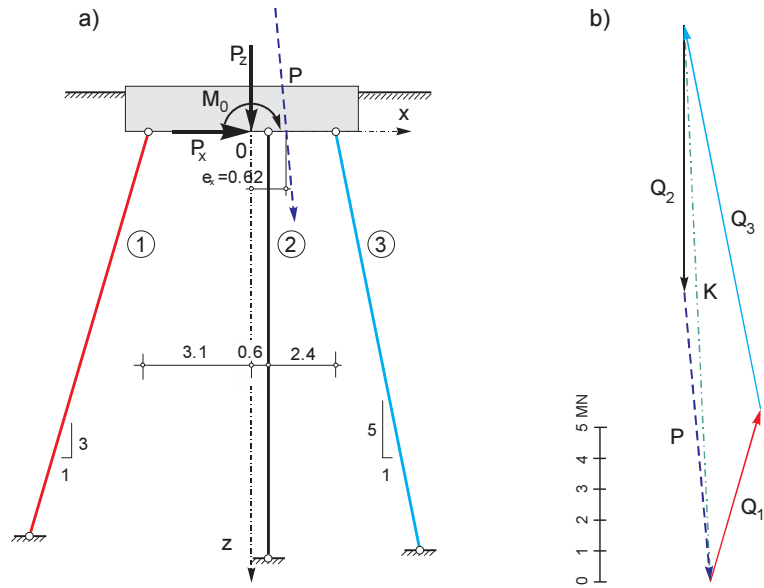
$$\sum Q_i \sin \alpha_i = P_z \quad \Rightarrow \quad Q_1 \cdot 0.9487 + Q_2 \cdot 1 + Q_3 \cdot 0.9806 = 2.20$$

$$\sum Q_i \sin \alpha_i x_i = M_0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 \cdot 0.9487(-3.1) + Q_2 \cdot 0.6 + Q_3 \cdot 0.9806 \cdot 3.0 = -(-1.36)$$

$$\begin{bmatrix} -0.3162 & 0 & 0.1961 \\ 0.9489 & 1 & 0.9806 \\ -2.9416 & 0.6 & 2.9418 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.20 \\ 2.20 \\ 1.36 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.49 \\ 22.61 \\ -12.64 \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0.515 \\ 0.791 \\ 0.923 \end{Bmatrix} (MN)$$

Ako se sile dobijene prema uprošćenom postupku, uporede sa silama dobijenim na osnovu Vinkler-ove metode, mogu se konstatovati neprihvatljivo velike razlike, koje u konkretnom slučaju ne opravdavaju primenu uprošćene metode.

Na slici 9.13a je prikazana dispozicija šipova za uprošćen postupak proračuna. Zadato opterećenje vertikalnom i horizontalnom silo i spregom sila, može se svesti na ekscentričnu i kosu silu P (prikazano isprekidanom linijom).



Slika 9.13 a) Dispozicija šipova za uprošćenu metodu proračuna b) Poligon sila (Cullman)

Na slici 9.13b je prikazan poligon sila sa rezultatom grafičkog postupka prema Cullman-u. Zbog ograničene veličine crteža, postupak nije prikazan na planu položaja sila (Slika 9.13a).

U udžbenicima iz fundiranja, može se naći velik broj praktičnih primera fundiranja na manjoj grupi šipova povezanih krutom naglavnicom (vidi Osnovi Fundiranja), gde se sile određuju na osnovu uprošćene metode.

Kada omotač šipa prolazi kroz slabo nosive slojeve, odnosno kada je nosivosti omotača šipa zanemarljiva, šipovi su u statičkom smislu stojeći jer prenose opterećenje isključivo bazom. U tom slučaju, sile u šipovima se mogu relativno tačno odrediti na osnovu uprošćene metode.