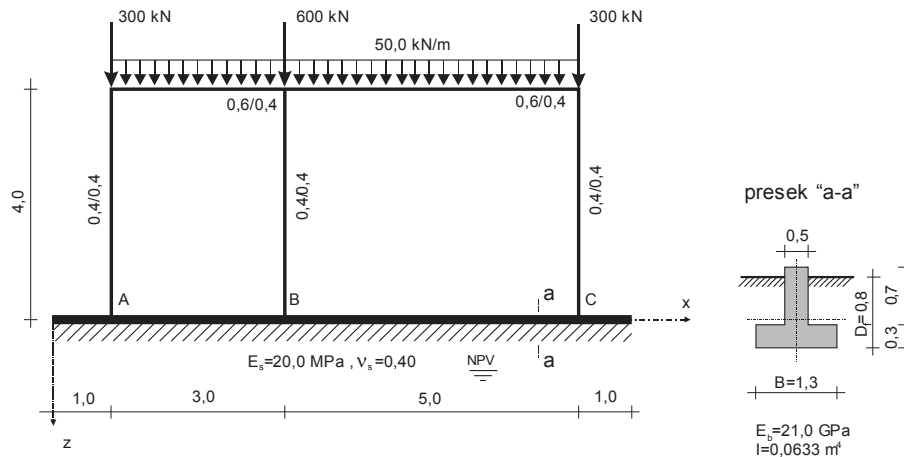


1.1 BROJNI PRIMER – 6

Na slici 7.1 je prikazan statički sistem konstrukcije sa opterećenjem, koja je oslonjena na temeljni nosač na linearno elastičnoj podlozi. Matrica krutosti oslonačkih tačaka konstrukcije je prikazana matricom $[K_k]$, a reakcije nepomerljivih oslonaca vektorom $\{R_0\}$. Zbog velike aksijalne krutosti temeljnog nosača, zanemariti uticaj horizontalne komponente reakcije oslonca na deformaciju (promenu rastojanja oslonaca). Matrica krutosti konstrukcije je određena u odnosu na pozitivna pomeranja nosača!



Slika 7.1 Ram kruto vezan za temeljni nosač koji leži na elastičnoj podlozi

Matrica je dimenzija 6×6 , i obuhvata vertikalne reakcije oslonca: R_1 u tački A, R_3 u tački B i R_5 u tački C i reakcije uklještenja: R_2 u tački A, R_4 u tački B i R_6 u tački C, usled jediničnih pomeranja oslonačkih veza ($U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$). Elementi matrice krutosti su dati u jedinicama kN, m i rad .

$$[K_k] = \begin{bmatrix} -1.615E+4 & 2.544E+3 & 2.418E+4 & -1.896E+3 & -8.026E+3 & -8.983E+3 \\ 2.544E+3 & -4.977E+4 & -7.311E+3 & 1.569E+4 & 4.767E+3 & 1.487E+4 \\ 2.418E+4 & -7.311E+3 & -3.794E+4 & 5.187E+1 & 1.367E+4 & 1.100E+4 \\ -1.896E+3 & 1.569E+4 & 5.187E+1 & -4.558E+4 & 1.844E+3 & 1.498E+4 \\ -8.026E+3 & 4.767E+3 & 1.367E+4 & 1.844E+3 & -5.734E+3 & -2.020E+3 \\ -8.983E+3 & 1.100E+4 & 1.100E+4 & 1.498E+4 & -2.020E+3 & -4.670E+4 \end{bmatrix} \quad \{R_0\} = \begin{bmatrix} 354.42 \\ -8.21 \\ 832.26 \\ -11.18 \\ 413.32 \\ 16.03 \end{bmatrix}$$

Potrebno je direktnom metodom proračuna interakcije :

- Izračunati reakcije oslonaca i sleganja oslonačkih tačaka gornje konstrukcije usled interakcije gornje konstrukcije, temeljnog nosača i elastične podloge.
- Izračunati i nacrtati dijagram sleganja i presečnih sila duž temeljnog nosača, sa i bez interakcije gornje konstrukcije, temeljnog nosača i podloge.
- Ponoviti proračun pod tačkama a) i b), za uvećanu krutost temeljnog nosača na savijanje koji iznosi $EI_b=1329.03 \text{ MNm}^2$. Dati komentar za rezultate.

Nakon proračuna oslonačkih sila direktnom metodom, odrediti oslonačke reakcije i iterativnom metodom i dati grafički prikaz reakcija oslonaca tokom iteracije.

Rešenje:

Temeljni nosač je podeljen na $n=10$ jednakih delova, i čvorne tačke temeljnog nosača se poklapaju sa oslonačkim tačkama konstrukcije. Elementi matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla, određiće se na osnovu pomeranja koja su izazvana jediničnim generalisanim silama na mestu i i u pravcu oslonaca. U pravcu tačkastog oslonca se postavlja jedinična sila, a u pravcu uklještenja jedinični spreg sila.

Oslonačke reakcije i pomeranja su numerisana na sledeći način: u tački A reakcije su R_1 i R_2 a pomeranja U_1 i U_2 , u tački B reakcije su R_3 i R_4 a pomeranja U_3 i U_4 , a u tački C reakcije su R_5 i R_6 a pomeranja U_5 i U_6 . Neparni indeksi označavaju silu i pomeranje a parni indeksi moment savijanja i obrtanje.

Tokom proračuna se koristi sledeća konvencija za **pozitivan predznak pomeranja** na temeljnom nosaču i na gornjoj konstrukciji:

- + smer vertikalnog pomeranja je u smeru +z ose,
- + smer obrtanja/nagiba je u smeru kretanja kazaljke na satu,

Koristi se sledeća konvencija za **pozitivan predznak sila na temeljnom nosaču**:

- + smer vertikalne reakcije je u smeru +z ose,
- + smer momenta uklještenja je u smeru kretanja kazaljke na satu,

Prema principu akcije i reakcije, **pozitivan predznak sila na gornjoj konstrukciji** je:

- + smer vertikalne reakcije je u smeru -z ose,
- + moment uklještenja je u smeru suprotno od kretanja kazaljke na satu,

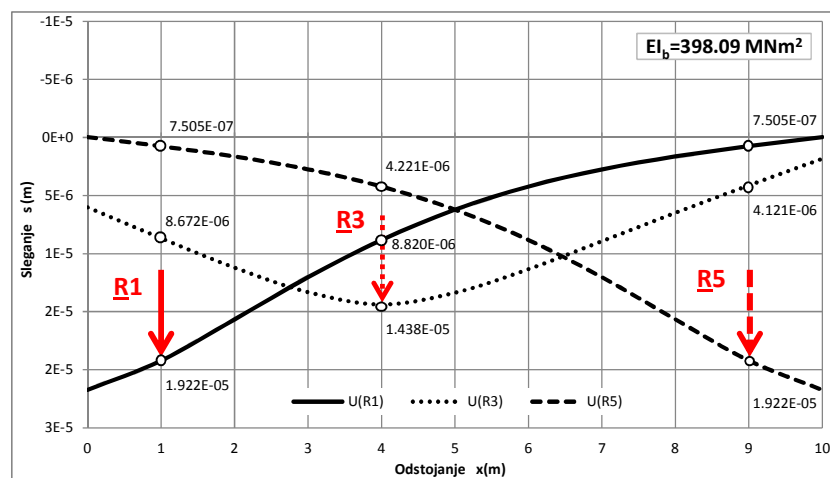
Da bi odredili elemente u prvoj koloni matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla (podloge), temeljni nosač treba opteretiti jediničnom vertikalnom silom $R_1=1$ u tački A , u pravcu oslonca 1. Vertikalna pomeranja i obrtanja u oslonačkim tačkama A , B i C usled nanetog opterećenja, predstavljaju elemente 1 - kolone matrice fleksibilnosti.

Da bi odredili elemente u drugoj koloni matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla (podloge), temeljni nosač treba opteretiti jediničnim momentom $\underline{R}_2=1$ u tački A, u pravcu oslonca 2. Vertikalna pomeranja i obrtanja u oslončkim tačkama A, B i C usled nanetog opterećenja, predstavljaju elemente 2 - kolone matrice fleksibilnosti.

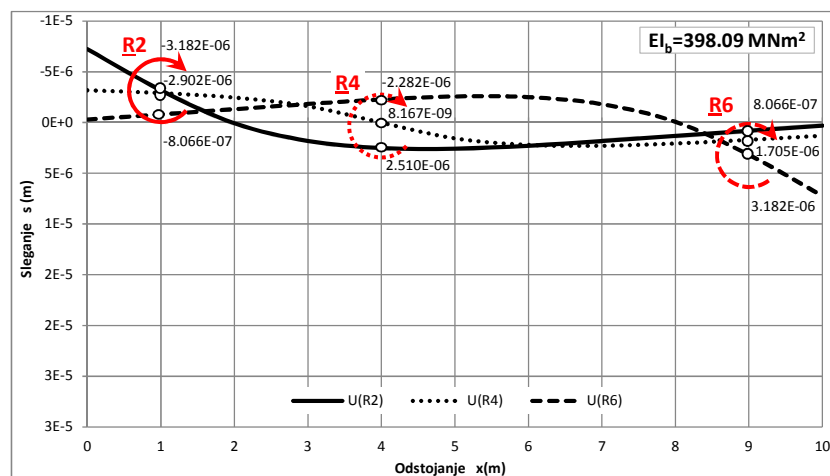
Na sličan način se određuju elementi matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i tla (podloge) u 3, 4, 5 i 6 - koloni.

Na slici 7.2a su prikazana sleganja oslonaca usled jediničnih sila, a na 7.2b sleganja oslonaca usled jediničnih momenata u osloncima. Na dijagramima su date i veličine sleganja u jedinicama m/kN i m/kNm.

Treba napomenuti, da usled greške pri diskretizaciji opterećenja, koja je neophodna, elementi matrice fleksibilnosti nisu potpuno simetrični. Npr. (Slika 7.2a), sleganje oslonca 3 usled jedinične sile u osloncu 1, iznosi $\underline{U}_{31}=8.820 \cdot 10^{-6}$ m, i trebalo bi prema Maxwell-ovom stavu biti jednako sleganju oslonca 1 usled jedinične sile na osloncu 3, koje iznosi $\underline{U}_{13}=8.672 \cdot 10^{-6}$ m. Međutim to nije slučaj, a relativna greška je oko 1.7%.

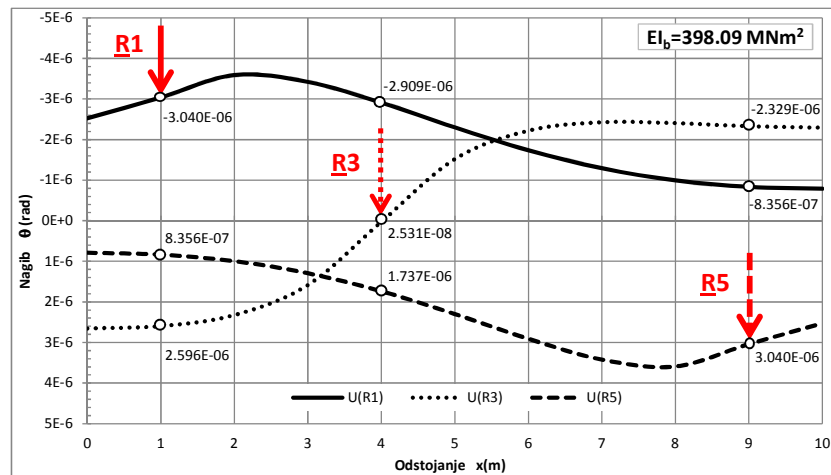


Slika 7.2a Vertikalna pomeranja oslonaca usled jediničnih vertikalnih sila

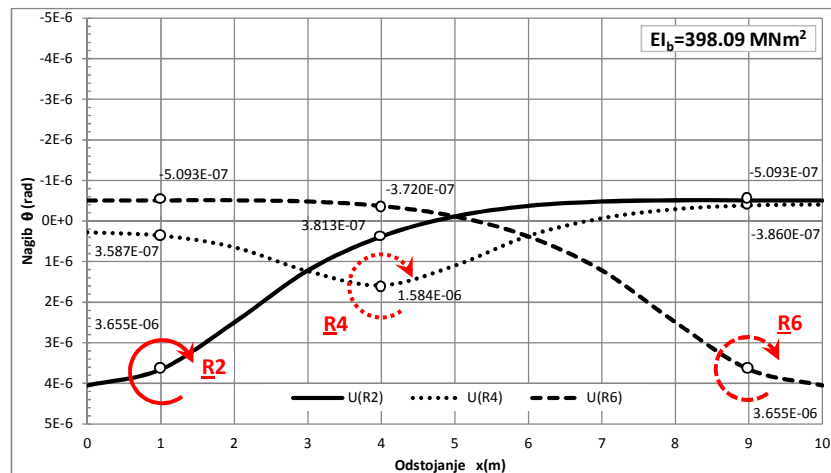


Slika 7.2b Vertikalna pomeranja oslonaca usled jediničnih momenata

Na slici 7.2c su prikazana obrtanja oslonaca usled jediničnih sila, a na 7.2d obrtanja oslonaca usled jediničnih momenata u osloncima. Na dijagramima su date i veličine obrtanja u jedinicama rad/kN i rad/kNm.



Slika 7.2c Obrtanja oslonaca usled jediničnih vertikalnih sila



Slika 7.2d Obrtanja oslonaca usled jediničnih momenata

Kao i kod pomeranja, usled greške pri diskretizaciji opterećenja, elementi matrice fleksibilnosti nisu potpuno simetrični.

Na osnovu pomeranja i obrtanja oslonaca usled jediničnih sila (slika 7.2a-d), formirana je matrica fleksibilnosti temeljnog nosača i podloge, koja glasi:

$$[E_t] = \begin{bmatrix} 1.922E-5 & -3.182E-6 & 8.672E-6 & -2.902E-6 & 7.505E-7 & -8.066E-7 \\ -3.040E-6 & 3.655E-6 & 2.596E-6 & 3.587E-7 & 8.356E-7 & -5.093E-7 \\ 8.820E-6 & 2.510E-6 & 1.438E-5 & 8.167E-9 & 4.221E-6 & -2.282E-6 \\ -2.909E-6 & 3.813E-7 & 2.531E-8 & 1.584E-6 & 1.737E-6 & -3.720E-7 \\ 7.505E-7 & 8.066E-7 & 4.121E-6 & 1.705E-6 & 1.922E-5 & 3.182E-6 \\ -8.356E-7 & -5.093E-7 & -2.329E-6 & -3.860E-7 & 3.040E-6 & 3.655E-6 \end{bmatrix}$$

Inverzijom matrice fleksibilnosti temeljnog nosača i podloge-tla, dobija se matrica krutosti čiji članovi, u jedinicama kN, m, kNm i rad, glase:

$$[K_t] = \begin{bmatrix} 3.032E+5 & 3.864E+5 & -2.355E+5 & 5.171E+5 & -3.228E+4 & 5.449E+4 \\ 3.834E+5 & 8.104E+5 & -3.600E+5 & 5.692E+5 & -3.184E+4 & 5.845E+4 \\ -2.351E+5 & -3.602E+5 & 2.952E+5 & -3.081E+5 & -2.342E+4 & 7.124E+4 \\ 5.164E+5 & 5.692E+5 & -3.081E+5 & 1.736E+6 & -1.881E+5 & 3.414E+5 \\ -3.232E+4 & -3.205E+4 & -2.344E+4 & -1.885E+5 & 9.750E+4 & -1.303E+5 \\ 5.432E+4 & 5.848E+4 & 7.109E+4 & 3.412E+5 & -1.277E+5 & 4.840E+5 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti $[K]$ gornje konstrukcije, temeljnog nosača i podloge je zbir matrice krutosti $[K_k]$ gornje konstrukcije i matrice krutosti $[K_t]$ temeljnog nosača i podloge.

$$[K] = \begin{bmatrix} 2.870E+5 & 3.890E+5 & -2.113E+5 & 5.152E+5 & -4.031E+4 & 4.551E+4 \\ 3.859E+5 & 7.606E+5 & -3.673E+5 & 5.849E+5 & -2.707E+4 & 7.332E+4 \\ -2.109E+5 & -3.675E+5 & 2.573E+5 & -3.081E+5 & -9.746E+3 & 8.225E+4 \\ 5.145E+5 & 5.849E+5 & -3.080E+5 & 1.690E+6 & -1.863E+5 & 3.563E+5 \\ -4.035E+4 & -2.728E+4 & -9.771E+3 & -1.866E+5 & 9.176E+4 & -1.323E+5 \\ 4.533E+4 & 6.948E+4 & 8.209E+4 & 3.562E+5 & -1.297E+5 & 4.373E+5 \end{bmatrix}$$

Temeljni nosač i podloga imaju znatno veću krutost od gornje konstrukcije. Kao mera krutosti, izračunaće se norma matrica, prema sledećem:

$$\|K_k\| = \sqrt{\sum K_{k,ij}^2} = 96344.5, \quad \|K_t\| = \sqrt{\sum K_{t,ij}^2} = 2548593.7, \quad \frac{\|K_t\|}{\|K_k\|} = 26.5$$

Na osnovu normi matrica krutosti, može se zaključiti da je krutost gornje konstrukcije znatno manja, tačnije 26.5 puta manja od krutosti temeljnog nosača i podloge.

Na osnovu krutosti konstrukcije, temeljnog nosača i podloge i reakcija nepomerljivih oslonaca konstrukcije, mogu se odrediti pomeranja i reakcije oslonaca:

$$\{\underline{U}\} = [\underline{K}]^{-1} \{\underline{R}_0\}$$

$$\{\underline{R}\} = ([I] + [\underline{K}_t][\underline{F}_t])^{-1} \{\underline{R}_0\}$$

$$\{\underline{U}\} = \begin{Bmatrix} 11.31 \\ 5.47 \\ 22.82 \\ 0.68 \\ 8.82 \\ -4.23 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m, rad)} , \quad \{\underline{R}\} = \begin{Bmatrix} 5.601 \\ 412.031 \\ 1390.343 \\ 1.343 \\ 206.905 \\ -383.293 \end{Bmatrix} \text{ (kN, kNm)}$$

Zbir vertikalnih reakcija oslonaca iznosi 1602.849, što je relativna greška od 0.18%.

Ako se povećaju dimenzije temeljnog nosača, tako da mu krutost na savijanje bude $EI_b=1329.3 \text{ MNm}^2$, promeniće se sleganja i reakcije oslonaca gornje konstrukcije pri interakciji. Matrica krutosti temeljnog nosača i podloge usled povećanja krutosti temeljnog nosača, daje se bez izvođenja:

$$[\underline{K}_t] = \begin{bmatrix} 9.317E+5 & 1.305E+6 & -7.894E+5 & 1.723E+6 & -1.066E+5 & 1.866E+5 \\ 1.302E+6 & 2.535E+6 & -1.199E+6 & 1.856E+6 & -1.111E+5 & 1.994E+5 \\ -7.890E+5 & -1.199E+6 & 9.007E+5 & -1.048E+6 & -7.467E+4 & 2.451E+5 \\ 1.723E+6 & 1.856E+6 & -1.048E+6 & 5.569E+6 & -6.535E+5 & 1.169E+6 \\ -1.066E+5 & -1.113E+5 & -7.469E+4 & -6.539E+5 & 2.236E+5 & -4.366E+5 \\ 1.864E+5 & 1.994E+5 & 2.450E+5 & 1.169E+6 & -4.340E+5 & 1.442E+6 \end{bmatrix}$$

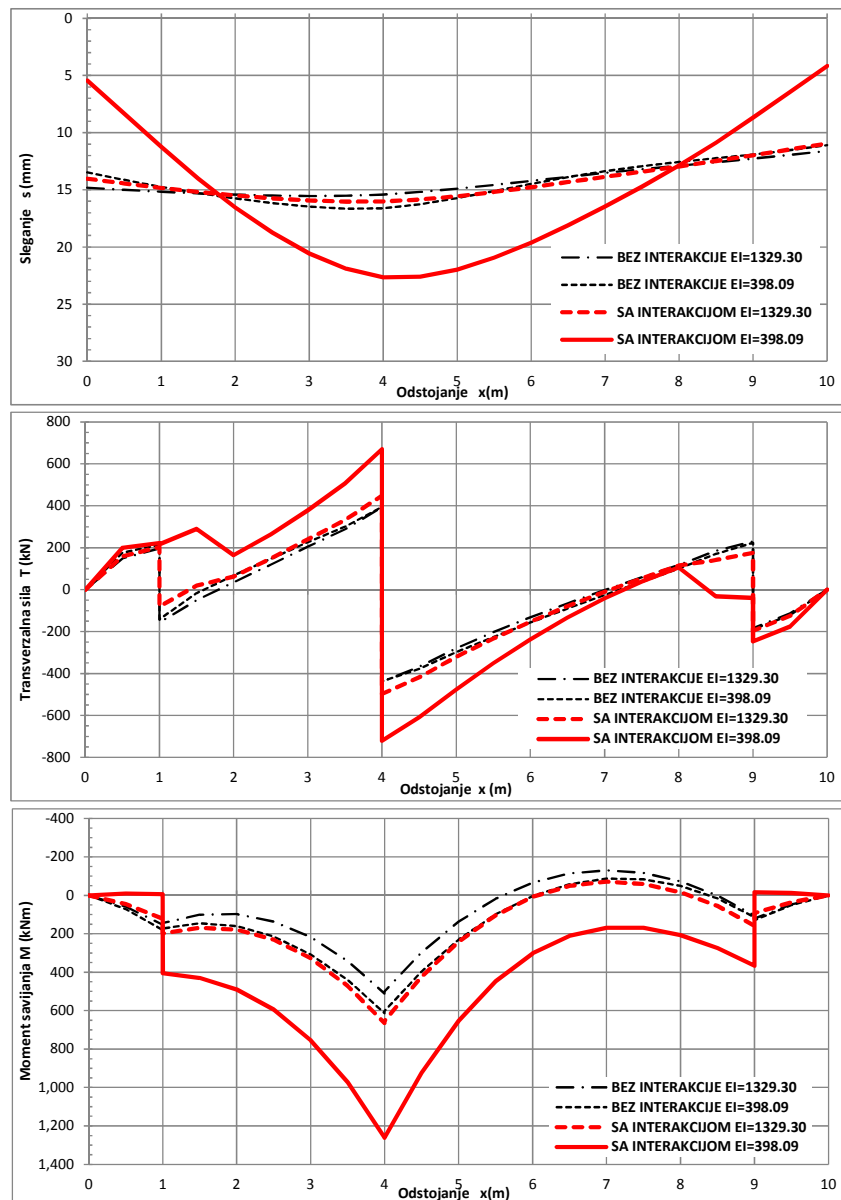
Norma matrice krutosti temeljnog nosača i podloge je $\|\underline{K}_t\|=8251755.1$, što je 85.6 puta veće od norme matrice krutosti gornje konstrukcije. Povećanje matrice krutosti temeljnog nosača i podloge, odgovara povećanju krutosti na savijanje, ili:

$$\frac{\|\underline{K}_t\|_1}{\|\underline{K}_t\|_2} = \frac{(E_b I)_1}{(E_b I)_2} \Rightarrow \frac{8,251,755.1}{2,548,593.7} = 3.24 \approx \frac{1329.30}{398.09} = 3.34$$

Sleganje i reakcije oslonaca za povećanu krutost temeljnog nosača na savijanje od $EI_b=1329.3 \text{ MNm}^2$ iznose:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} 14.45 \\ 0.88 \\ 15.98 \\ -0.15 \\ 11.79 \\ -1.08 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m, rad)} , \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} 283.924 \\ 77.644 \\ 946.178 \\ -10.602 \\ 372.398 \\ -64.069 \end{Bmatrix} \text{ (kN, kNm)}$$

Razlika u pomeranju i reakciji oslonaca usled promene krutosti temeljnog nosača je očigledna. Rezultati proračuna presečnih sila i sleganja duž nosača, dati su na Sl. 7.3.



Slika 7.3 Sleganje i presečne sile duž temeljnog nosača

Na mestima dejstva transverzalne sile i momenta savijanja, u dijagramu je prekid funkcije. Prema MKR, za grubu diskretizaciju se ne mogu dobiti tačne vrednosti, pa je potrebno izvršiti korekciju prema sledećim izrazima:

$$T_l + T_d = T \quad M_l + M_d = 2M_{MKR} \quad M_d - M_l = M_{MKR} \quad T_l - T_d = R$$

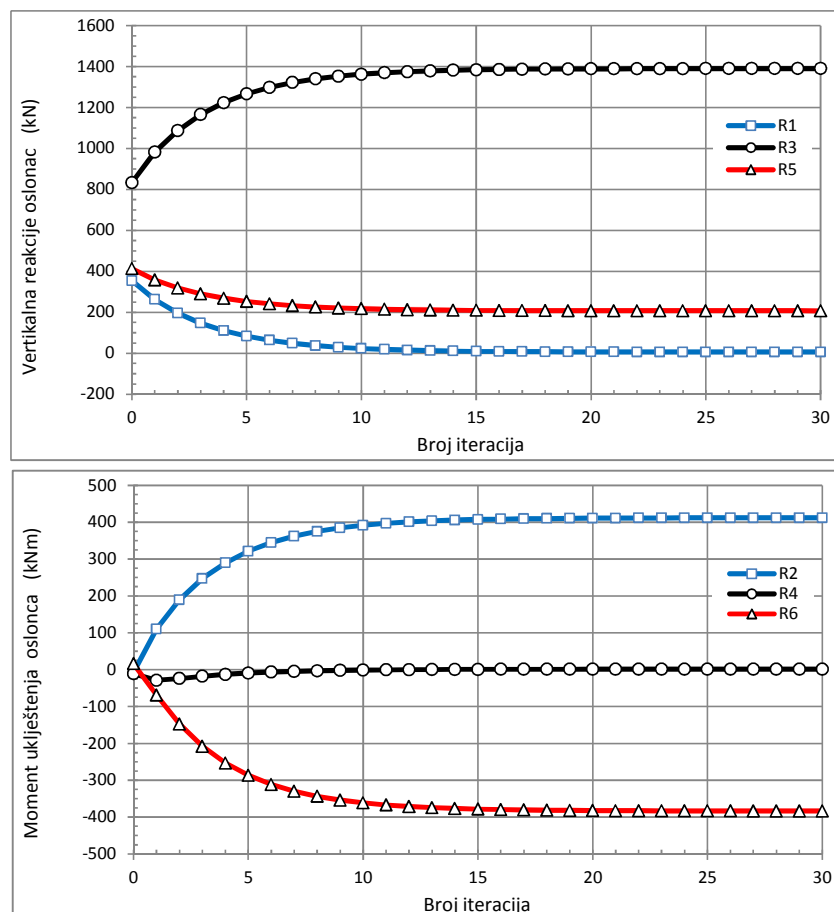
Nakon proračuna pomeranja i reakcija oslonaca direktnom metodom interakcije, izvršen je proračun i iterativnom metodom. Konvergencija je spora, a nakon 10, 20 i 30 iteracija, dobijene su sledeće veličine reakcija oslonaca i razlike normi vektora:

$$\{R\}_{10} = \begin{Bmatrix} 23.153 \\ 391.563 \\ 1362.435 \\ -1.056 \\ 217.241 \\ -361.519 \end{Bmatrix}, \quad \{R\}_{20} = \begin{Bmatrix} 6.492 \\ 410.991 \\ 1389.291 \\ 1.222 \\ 207.430 \\ -382.187 \end{Bmatrix}, \quad \{R\}_{30} = \begin{Bmatrix} 5.646 \\ 411.978 \\ 1390.271 \\ 1.337 \\ 206.932 \\ -383.237 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta\|R_{10}\| = 11.99$$

$$\Delta\|R_{20}\| = 0.62$$

$$\Delta\|R_{30}\| = 0.03$$



Slika 7.4 Reakcije oslonaca u funkciji broja iteracija