

БИФУРКАЦИОНА СТАБИЛНОСТ УКРУЋЕНИХ ТАНКИХ ПЛОЧА ПРИМЈЕНОМ МЕТОДА СЛОЖЕНИХ КОНАЧНИХ ТРАКА

Александар Панчић¹
Александар Борковић²
Драган Милашиновић³

УДК: 624.073 : 624.046.3

DOI:10.14415/zbornikGFS26.07

Резиме: У раду се разматра бифуркациона стабилност танких плоча ојачаних гредима употребом метода сложених коначних трака. Постављеном формулацијом је могуће увести и тачкасте услове ослањања, што омогућава моделирање утицаја стубова. Према теорији бифуркационе стабилности, критично оптерећење плоча је добијено рјешавањем стандардног проблема својствених вриједности. Сложена трака се добија уношењем крутости греда и стубова у коначну траку равне љуске. Овакав приступ омогућава ефикасан прорачун укрућених плоча без потребе за увођењем додатних степени слободе. Програмски код је написан у софтверском пакету *Wolfram Mathematica*. Верификација модела је извршена кроз поређење са аналитичким резултатима као и онима добијеним комерцијалним софтверским пакетом.

Кључне речи: Бифуркациона стабилност, критично оптерећење, ојачане плоче, метод сложених коначних трака

1. УВОД

Бифуркациона стабилност је област линеарне анализе у којој се изналажење критичног оптерећења за идеалне (савршене, перфектне) системе своди на рјешавање стандардног проблема својствених вриједности, [1]. Најнижа својствена вриједност одређује ниво оптерећења до којег је систем стабилан, а одговарајући својствени вектор нову равнотежну форму система. Разматрања у овом раду су ограничена на танке плоче чија се анализа обично спроводи усвајањем *Kirchoff-Love* хипотезе. Разматра се линеарно еластичан материјал. Иако је метод коначних елемената (МКЕ) највише у употреби при рјешавању проблема стабилности, код плоча се пријена метода коначних трака (МКТ) намеће као знатно ефикаснија [1]. У раду [2] је првобитно постављен концепт метода сложених коначних трака (МСКТ), који је потом проширен на многа подручја линеарне анализе

¹Александар Панчић, дипл.инж. грађ.,тел: +38765893405, е – mail: pancic2707@hotmail.com

²др Александар Борковић, дипл.инж. грађ., Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет Бања Лука, Војводе Степе Степановића 77/3, тел: +38765917366, е – mail: aborkovic@agfbl.org

³проф. др Драган Д. Милашиновић, дипл.инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, е – mail: ddmil@gf.uns.ac.rs

конструкција, [3-5]. Основна идеја метода се састоји у увођењу крутосних и масених карактеристика линијских елемената у средњу раван плоче.

Прво се даје кратак осврт на усвојено апроксимативно поље помјерања да би се потом приказала нумеричка анализа којом је верификован усвојени модел.

2. КОНАЧНЕ ТРАКЕ И АПРОКСИМАТИВНЕ ФУНКЦИЈЕ

За апроксимацију поља помјерања, према МКТ, у подужном правцу се користе редови а у попречном правцу полиноми, [1]. У овом раду је моделирано савијање плоча коначном траком са четири степена слободе. За дио функције у попречном правцу је усвојен полином трећег степена, који задовољава C^1 континуитет. За подужни дио функције је усвојено рјешење диференцијалне једначине слободних вибрација штапа коначне дужине [1]. Тако се функција угиба претпоставља у форми бесконачног реда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) Y_m(y) \quad (1)$$

Увођење утицаја линијских елемената у траку се врши тако што се поље помјерања ових елемената описује на основу помјерања спојне линије или тачке који леже у средњој равни траке. На тај начин је остварена пуна компатибилност помјерања између површинских и линијских елемената. Такође слиједи да нема потребе за увођењем додатних степени слободе јер се помјерања и греда и стубова описује на основу поља помјерања траке.

Након дефинисања поља помјерања, формира се укупна енергија коначне траке при чему се укупна енергија деформације сложене коначне траке добија као збир енергија деформације свих уведених елемената укрућења. Поставка проблема бифуркационе стабилности као и поступак извођења основне и геометријске матрице крутости су детаљније дати у [1] и [4].

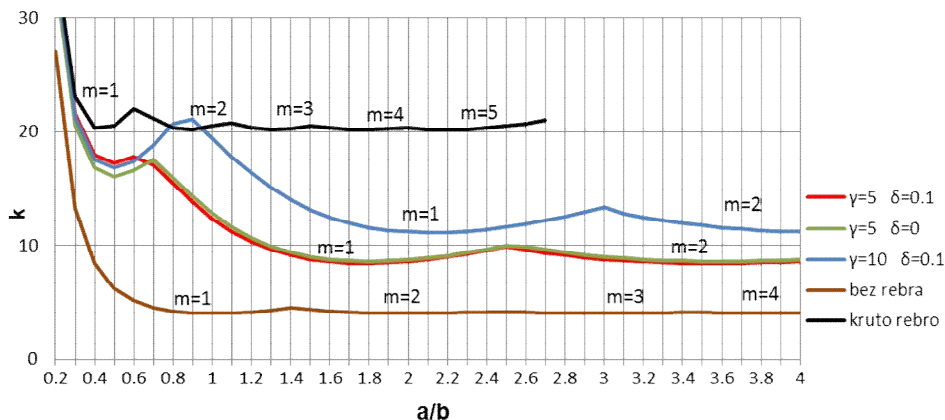
3. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕРИ И ДИСКУСИЈА

У циљу провјере терижских поставки, формиран је програмски код назван БИСТА (бифуркациона стабилност) у софтверском пакету *Wolfram Mathematica*.

У свим примјерима је кориштена слједећа конвенција за означавање плоча у зависности од услова ослањања. Наиме, прво се наводи ослањање у y -правцу, тј. за $x=0$ и $x=a$, а потом у x -правцу, за $y=0$ и $y=b$. Тако се, на примјер, конзолна плоча обиљежава са $VCCC$. Такође је назначен и степен дискретизације коначним тракама. Тако је ознака за модел са n коначних трака и m чланова реда - $nTmЧР$.

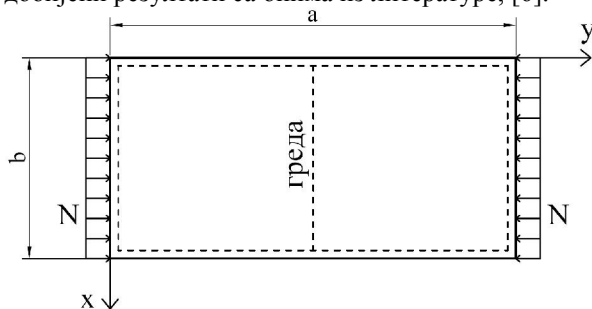
У примјерима 1 и 2 је извршено поређење резултата добијених примјеном МСКТ и оних изведених из аналитичких израза, [6]. У примјерима 3 и 4 је извршено поређење резултата добијених програмом БИСТА и комерцијалним МКЕ програмом *Abaqus*, при чему је кориштен STRI3 коначни елемент. У питању је коначни елемент танке равне љуске који *Kirchoff*-ове претпоставке намеће аналитички, [7].

Примјер 1: Посматра се ОООО плоча укрућена са једном подужном гредом по средини. Плоча је оптерећена у правцу пружања греде. На слици 1 су приказани добијени резултати зависност коефицијента k од односа плоче a/b . Коефицијент k зависи од геометријских и материјалних карактеристика плоче и укрућења како је дато у [6], док је m број полуталаса у који се плоча дијели при избочавању. Поређењем добијених дијаграма са онима датим у [6] уочава се одређена разлика која је последица приступа МСКТ гдје је оптерећење нанесено само на плочу док је у [6] оптерећена и греда.



Слика 1. Зависност коефицијента k од односа a/b

Примјер 2: На слици 2 је дата шема ОООО плоче ојачане са једном попречном гредом на средини. Дебљина плоче је 0.1 m док су димензије попречног пресека греде 0.12x0.40 m. Материјалне карактеристике су $E=30$ GPa и $\nu=0$. У табелама 1 и 2 су упоређени добијени резултати са онима из литературе, [6].



Слика 2. Плоча са попречном гредом у средини

Табела 1. Поређење критичних сила за $a/b = 1$

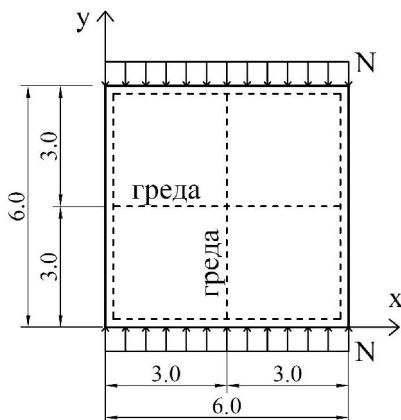
	$b=4$	$b=5$	$b=6$
[6] стр. 402	29825.30	16059.30	9750.05
БИСТА 20Т1ЧР	29855.60	16075.60	9759.95
Рел. разлика (%)	0.10	0.10	0.10

Табела 2. Поређење критичних сила за $a/b = 2$

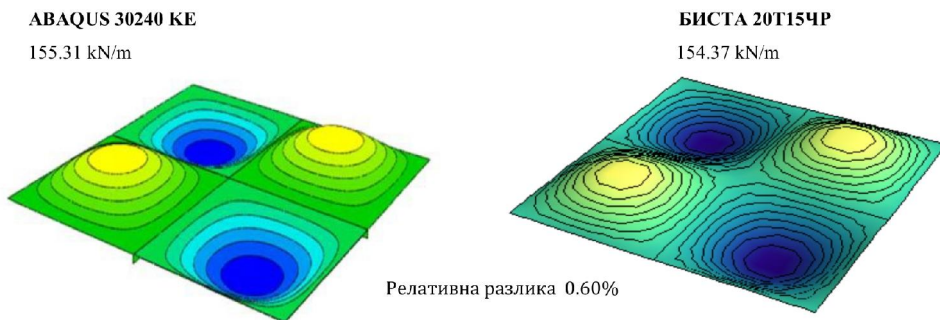
	b=4	b=5	b=6
[6] стр. 402	56954.60	30393.20	18301.90
БИСТА 20Т1ЧР	57012.40	30424.10	18320.5
Рел. разлика (%)	0.10	0.10	0.10

Анализа примјеном МСКТ је рађена само са првим чланом реда због поређења са изразом у литератури, [6] стр. 402, који је изведен за $m=1$. Добијени резултати су готово идентични.

Примјер 3: Разматра се ОООО плоча (6x6 m, $t=0.012$ m, $E=210$ GPa, $\nu=0.3$) укрућена са двије укрштене греде, слика 3. Попречни пресјек обе греде је 0.15x0.015 m. На слици 4 је дато поређење критичних сила и облика избочавања. Добијени резултати се одлично поклапају.

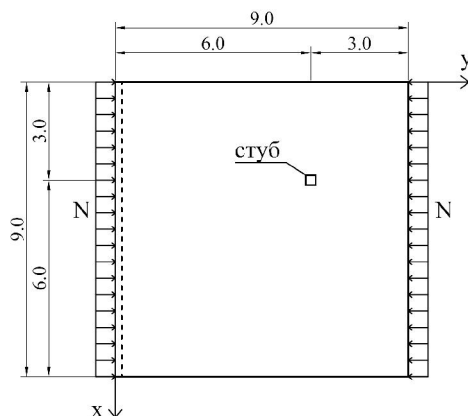


Слика 3. Плоча са двије укрштене греде

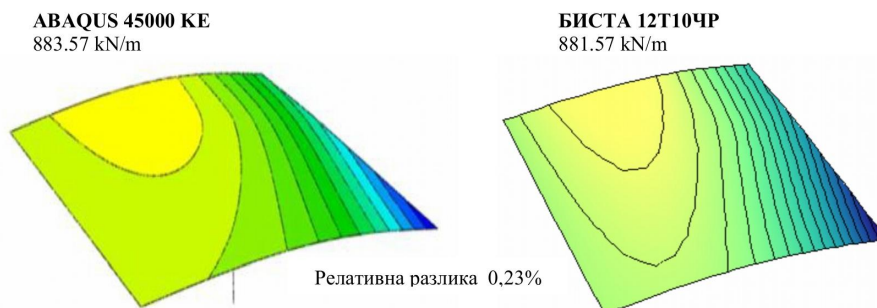


Слика 4. Прва форма избочавања плоче са двије укрштене греде

Примјер 3: Посматра се *OCCC* плоча (9×9 m, $E=30$ GPa, $\nu=0.0$, $t=0.15$ m) ослоњена на стуб, слика 5. Стуб је висине 4 m, попречног пресека 0.3×0.3 m те зглобно везан за плочу. На слици 6 су дате прве форме губитка стабилности као и критичне силе. Добијени резултати показују да се и утицај стуба може адекватно описати помоћу МСКТ.



Слика 5. Плоча са стубом



Слика 6. Прва форма извијања плоче са стубом

4. ЗАКЉУЧАК

Прорачун бифуркационе стабилности танких плоча ојачаних гредама и ослоњених на стубове се може са задовољавајућом тачношћу провести додавањем крутосних карактеристика линијских елемената у виду укрућења директно у средњу раван плоче. Метод сложених коначних трака показује низ предности у односу на конвенционални метод коначних елемената. Најзначајније су мањи број улазних и излазних података те мањи степен дискретизације што доводи до значајне уштеде времена и инжењера и рачунара, као и тачнији резултати прорачуна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Милашиновић Д. : Метод коначних трака у теорији конструкција, Нови Сад, **1994**.
- [2] Puckett, J.A., Lang, J.G., Compound strip method for free vibration analysis of continuous plates, J of Engineering Mechanics, vol. 112, no. 12, p. 1375-1389, **1986**.
- [3] Borković, A., Mrđa, N., Kovačević, S., Dynamical analysis of stiffened plates using the compound strip method, Engineering Structures, vol. 50, p. 56-67, **2013**.
- [4] Borkovic. A.: Buckling Analysis of Stiffened Thin-walled Sections under General Loading Conditions using the Compound Strip Method, Proceedings of the Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland, **2013**. doi:10.4203/ccp.102.100
- [5] Борковић А.: Слободне вибрације ојачаних танкозидних носача примјеном метода коначних трака са подужним и попречним укрућењима, Зборник радова Грађевинског факултета Суботица, **2013**, бр.22, 31-41
- [6] S. Timoshenko & J.Gere: Theory of elastic stability, McGraw-Hill international book company, **1963**.
- [7] Abaqus, Theory manual, version 6.7. Dassault System **2007**.

BIFURCATION STABILITY OF STIFFENED THIN PLATES USING THE COMPOUND FINITE STRIP METHOD

Summary: Paper deals with bifurcation stability of stiffened thin plates using the compound finite strip method. Using this method it is also possible to introduce point supports into plate which allows modeling of columns. Thin plate is obtained by simple addition of column and beam stiffness properties into finite strip via deformation energy. According to bifurcation stability theory, critical load is obtained from the standard eigenvalue problem. This approach allows efficient computation of stiffened plates without the need for additional degrees of freedom. Program code is written in software package Wolfram Mathematica. Verification of the model is done through comparison with the analytical solutions and the one obtained from commercial software packages.

Keywords: Bifurcation stability, critical load, stiffened plates, compound strip method