Међународна конференција
Савремена достигнућа у грађевинарству 24.-25. април 2014. Суботица, СРБИЈА

ПРОРАЧУН ЛИНИЈСКИХ НОСАЧА СА ПОЛУ-КРУТИМ ВЕЗАМА ПО ТЕОРИЈИ ДРУГОГ РЕДА

Срђан Живковић[1]
Марко Милошевић[2]
Тодор Вацев[3]

УДК: 624.078
DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.055

Резиме: *У овом раду приказан је поступак прорачуна линијских носача са полу-крутим везама у функцији ротационе крутости везе као реалног параметра за одређивање поља напона и поља деформација. За уведене ротационе крутости веза изведени су изрази за одређивање условних једначина деформацијски неодређених величина као и момената савијања на крајевима штапова у методи деформације при статичком оптерећењу по линеаризованој Теорији другог реда.*

Кључне речи: *Метода деформације, полу-круте везе, ротациона крутост везе*

1. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ПОЛУ-КРУТЕ ВЕЗЕ

У општем случају, деформабилна веза између два штапа омогућује известан степен додатне релативне померљивости у равни споја у правцима свих генералисаних померања што за линијски елемент у равни значи: релативно хоризонтално и вертикално померање и обртање пресека на месту споја.

Како су за већину оквирних конструкција вертикална, па и хоризонтална померања (проклизавања) веза, занемарљиво мала у односу на релативно обртање пресека на месту везе, [1], [2], утицај деформабилних веза може се моделирати помоћу еластичне опруге чија је ротациона крутост $S_{i(k)}$, [3].

Овим коефицијентом обухвата се утицај ротационе крутости везе на промену статичких и деформацијских величина у конструкцији.

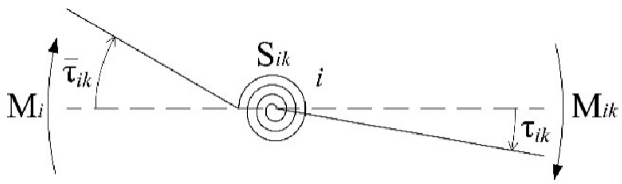
Бројна вредност ротационе крутости везе штапа „*ik*“ на крају *i,* односно *k*, одређена је изразом:

$$S_{i(k)} = \frac{M_{i(k)}}{\Phi_{i(k)}} \tag{1}$$

[1] Срђан Живковић, Мр, дипл.инж.грађ., асистент, Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет, Александра Медведева 14, Ниш, e-mail: srle.26@open.telekom.rs
[2] Марко Милошевић, PhD студент, дипл.инж.грађ., Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет, Александра Медведева 14, Ниш, e-mail: marko.milosevic.mat@gmail.com
[3] Тодор Вацев, Др, дипл.инж.грађ., доцент, Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет, Александра Медведева 14, Ниш, e-mail: todor.vacev@gaf.ni.ac.rs

где су:
$M_{i(k)}$ – момент савијања на месту везе у чвору *i*, односно *k* и
$\Phi_{i(k)}$ – релативно обртање везе у чвору *i*, односно *k*.

Ротациона крутост везе, у геометријском смислу, представља вредност тангенса угла кога тангента на кривој момент-ротација везе гради са апсцисом, односно нагиб криве *M-Φ* везе [4].



Слика 1. Математички модел полу-круте везе

2. ПРОРАЧУН ПО ТЕОРИЈИ ДРУГОГ РЕДА

2.1. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ МЕТОДЕ ДЕФОРМАЦИЈА

Стање деформација правог штапа са деформабилним везама на крајевима штапа, пре и после деформације (слика 2.), може се описати једначинама:

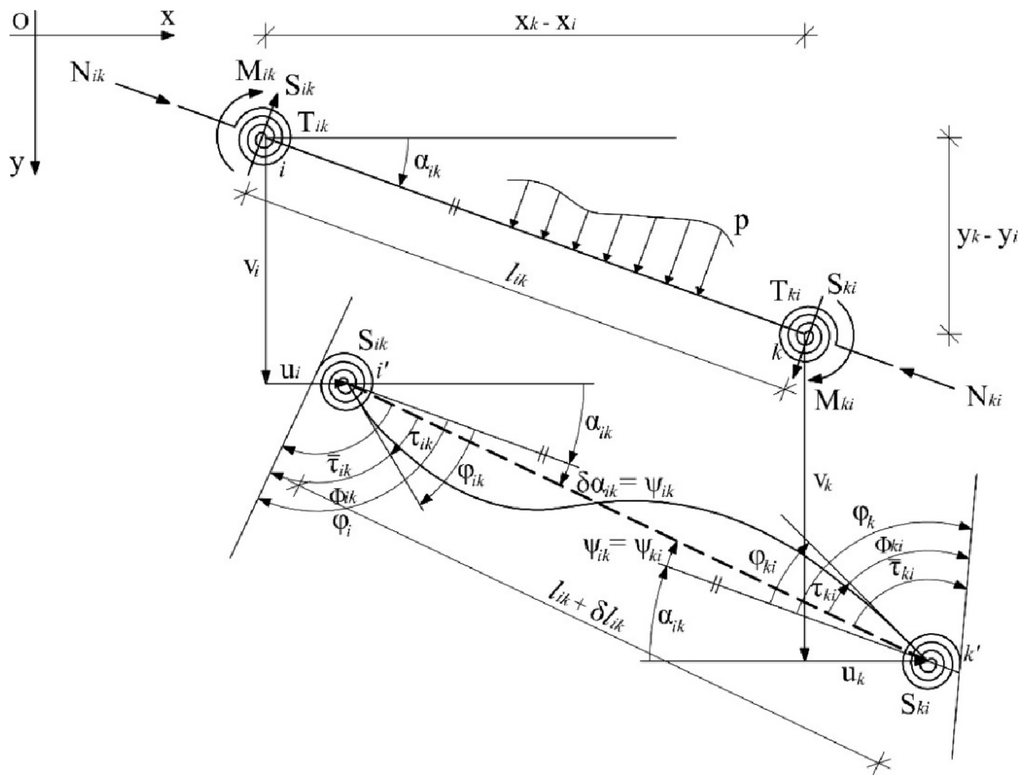
$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{ik} &= \tau_{ik} + \Phi_{ik} = \varphi_i - \psi_{ik}\\ \bar{\tau}_{ki} &= \tau_{ki} + \Phi_{ki} = \varphi_k - \psi_{ik}\end{aligned} \tag{2}$$

На основу принципа суперпозиције једначине (2) могу се написати у облику:

$$\begin{aligned}\alpha_{ik}^{(o)} + \alpha_{ik}^{(\Delta t)} + M_{ik}\cdot\alpha_{ik} - M_{ki}\cdot\beta_{ik} + \frac{M_{ik}}{S_{ik}} &= \varphi_i - \psi_{ik}\\ -\alpha_{ki}^{(o)} - \alpha_{ki}^{(\Delta t)} - M_{ik}\cdot\beta_{ki} + M_{ki}\cdot\alpha_{ki} + \frac{M_{ki}}{S_{ki}} &= \varphi_k - \psi_{ik}\end{aligned} \tag{3}$$

где су:

- $\alpha_{ik}^{(o)}$ и $\alpha_{ki}^{(o)}$ углови обртања тангенти на крајевима *i* и *k* једне *просте греде* услед задатог оптерећења *p*, $\alpha_{ik}^{(\Delta t)}$ и $\alpha_{ki}^{(\Delta t)}$ исти углови услед температурних разлика Δt°, а
- α_{ik} и β_{ik} односно α_{ki} и β_{ki} углови обртања услед јединичних момената савијања $M_{ik} = 1$ и $M_{ki} = 1$.



Слика 2. Прав штап са деформабилним везама на крајевима i и k, пре и после деформације

Све ове вредности су одређене према Теорији другог реда за исту вредност нормалне силе притиска „N_{ik}" односно величине „$\bar{\omega}$" познатом методом почетних параметара [5], [6].
Ако уведемо обележавање:

$$\bar{\omega} = l_{ik} \cdot \sqrt{\frac{N_{ik}}{EI_{ik}}} \tag{4}$$

тада су:

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} = \alpha_{ki} &= \frac{l_{ik}}{EI_{ik}} \cdot \bar{\alpha} = \frac{l_{ik}}{EI_{ik}} \cdot \frac{\sin\bar{\omega} - \bar{\omega}\cos\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 \sin\bar{\omega}} \\ \beta_{ik} = \beta_{ki} &= \frac{l_{ik}}{EI_{ik}} \cdot \bar{\beta} = \frac{l_{ik}}{EI_{ik}} \cdot \frac{\bar{\omega} - \sin\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 \sin\bar{\omega}} \end{aligned} \tag{5}$$

2.2. МАТРИЦА КРУТОСТИ ШТАПА СА ДЕФОРМАБИЛНИМ ВЕЗАМА

До матрице крутости штапа са деформабилним везама на крајевима штапа по Теорији другог реда може се доћи полазећи од базне матрице крутости. Веза између базне матрице крутости и матрице крутости може се написати на следећи начин:

$$[K] = [C]^T[K_0][C] \tag{6}$$

где су:
$[K_0]$ – базна матрица крутости и
$[C]$ – матрица која дефинише везу основних деформацијских величина штапа и генералисаних померања.

Базна матрица крутости једнака је инверзној матрици флексибилности - $[D_0]$:

$$[K_0] = [D_0]^{-1} = \frac{1}{\det[D_0]} \cdot adj[D_0] \tag{7}$$

а матрица флексибилности представља везу између основних деформацијских и статички независних величина штапа:

$$\{\delta\} = [D_0]\{X\} \tag{8}$$

где су:
$\{\delta\}$ – вектор чисто деформацијских величина штапа,
$[D_0]$ – матрица флексибилности, а
$\{X\}$ – вектор статички независних величина штапа.

Једначине (3) могу се написати у матричној форми:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{ik} \\ \bar{\tau}_{ki} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ik(\varpi)} + 1/S_{ik} & \beta_{ik(\varpi)} \\ \beta_{ik(\varpi)} & \alpha_{ki(\varpi)} + 1/S_{ki} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{ik} \\ M_{ki} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

у којима је:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{ik} \\ \bar{\tau}_{ki} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$[D_0] = \begin{bmatrix} \alpha_{ik(\varpi)} + 1/S_{ik} & \beta_{ik(\varpi)} \\ \beta_{ik(\varpi)} & \alpha_{ki(\varpi)} + 1/S_{ki} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} M_{ik} \\ M_{ki} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

За штап са $EI = const$, углови обртања тангенти на крајевима штапа услед дејства јединичног момента савијања и константне вредности аксијалне силе притиска у штапу су дефинисани једначином (5).
Уводећи бездимензионалне параметре крутости везе у чворовима „*i*“ и „*k*“:

$$\Psi_{ik} = \frac{EI}{l \cdot S_{ik}} \quad \text{и} \quad \Psi_{ki} = \frac{EI}{l \cdot S_{ki}} \tag{13}$$

матрица флексибилности прелази у следећи облик:

$$[D_0] = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\alpha} + \Psi_{ik} & -\bar{\beta} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} + \Psi_{ki} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\det[D_0] = \left(\frac{1}{EI}\right)^2 \cdot \left(\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} \cdot (\Psi_{ik} + \Psi_{ki}) + \Psi_{ik}\Psi_{ki} - \bar{\beta}^2\right) \tag{15}$$

Па из једначине (7) базна матрица крутости:

$$[K_0] = [D_0]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{a}}_{ik} & \bar{\bar{b}}_{ki} \\ \bar{\bar{b}}_{ik} & \bar{\bar{a}}_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{\varpi} \cdot \frac{EI}{l} \cdot \eta_1 & b_{\varpi} \cdot \frac{EI}{l} \cdot \eta_2 \\ b_{\varpi} \cdot \frac{EI}{l} \cdot \eta_2 & \alpha_{\varpi} \cdot \frac{EI}{l} \cdot \eta_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Коначно, матрица крутости штапа са деформабилним везама на крајевима штапа добијена из израза (6) након елементарних трансформација:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{(\bar{\bar{c}}_{ik} + \bar{\bar{c}}_{ki})}{l^2} & \frac{\bar{\bar{c}}_{ik}}{l} & -\frac{(\bar{\bar{c}}_{ik} + \bar{\bar{c}}_{ki})}{l^2} & \frac{\bar{\bar{c}}_{ki}}{l} \\ \frac{\bar{\bar{c}}_{ik}}{l} & \bar{\bar{a}}_{ik} & -\frac{\bar{\bar{c}}_{ik}}{l} & \bar{\bar{b}}_{ik} \\ -\frac{(\bar{\bar{c}}_{ik} + \bar{\bar{c}}_{ki})}{l^2} & -\frac{\bar{\bar{c}}_{ik}}{l} & \frac{(\bar{\bar{c}}_{ik} + \bar{\bar{c}}_{ki})}{l^2} & -\frac{\bar{\bar{c}}_{ki}}{l} \\ \frac{\bar{\bar{c}}_{ik}}{l} & \bar{\bar{b}}_{ik} & -\frac{\bar{\bar{c}}_{ki}}{l} & \bar{\bar{a}}_{ki} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Као што је приказано у [2], утицај деформабилних веза уводи се преко параметара η_i $(i = 1,2,3)$. Са оваквим значењем коефицијената, матрица крутости штапа са деформабилним везама има општи карактер, то јест, може се применити како за прорачун по Теорији првог, тако и за прорачун по Теорији другог реда.

Такође се може запазити да матрица крутости штапа са идеално крутим везама представља посебан случај матрице крутости штапа са деформабилним везама. Наиме, може се показати да, када крутост везе тежи бесконачности сви параметри теже јединици, односно:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{s_i \to \infty} \Psi_i &= 0 \\ \lim_{s_k \to \infty} \Psi_k &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{\Psi_i \to 0 \\ \Psi_k \to 0}} \{\eta_i,\ i = 1,2,\ldots,6\} = 1 \tag{18}$$

па матрица крутости (17) прелази у матрицу крутости штапа са идеално крутим везама по Теорији другог реда. Код система са великим бројем штапова, односно чворово, прорачун по Теорији другог реда уз коришћење матрице крутости (17), може да буде веома компликован и спор, чак и уз примену персоналних рачунара. За анализу сложенијих система примењује се варијациони поступак, код којег се полази од приближног решења диференцијалне једначине у облику полиномне функције. На овај начин, варијационим поступком, полазећи од израза за деформациону енергију штапа, може се добити матрица крутости која представља збир матрице крутости по Теорији првог реда и геометријске матрице крутости, па основна једначина штапа по Теорији другог реда има облик:

$$\left([K] + [K_g]\right) \cdot \{q\} = \{Q\} \tag{20}$$

где су:
$[K]$ – матрица крутости штапа са деформабилним везама по Теорији првог реда, а
$[K_g]$ – геометријска матрица крутости.

Овакав приближан прорачун помоћу геометријске матрице крутости примењује се веома често, јер је јако повољан са становишта рада рачунара, а резултати су у највећем броју случајева задовољавајући. Ово се посебно односи на проблем одређивања критичне силе, који се у овом случају своди на проблем својствених вредности, **Chan i Chui (2000.)** [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Живковић, С., Милошевић, М., Вацев, Т.: Functional dependence between the degree of restraint and rotational stiffness of semi-rigid connections. *The 15th International Symposium of MASE*, Struga, Ohrid Lake, Macedonia, **2013.**, CT-7

[2] Живковић, С.: Анализа понашања реалних веза у оквирним челичним конструкцијама. *Наука+Пракса*, Ниш, **2009.**, бр. 12 (2).

[3] Chen, W.F., Kishi, N.: Semi rigid steel beam-to-column connections, data base and modeling. *J. Struct. Div.*, **1989.**, бр. 115(1), стр. 105-119.

[4] Живковић, С., Мијалковић, М.: Класификација М-Ф карактерисика полукрутих веза у оквирним челичним конструкцијама. *Зборник радова Грађевинско-архитектонског факултета*, Ниш, **2008.**, бр. 23, стр. 65-75.

[5] Ђурић, М.: Стабилност и динамика конструкција. *Грађевински факултет*, Београд, **1977.**

[6] Чаушевић, М., Здравковић. С.: Статика и стабилност конструкција по теорији другог реда. *Свјетлост,* Сарајево, **1992.**

[7] Chan, S. L., Chui, P. P. T.: Non/linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections. *Elsevier Science Ltd, Oxford, UK*, **2000.**

THE CALCULATION OF LINE BEARINGS WITH SEMI-RIGID JOINTS ACCORDING SECOND ORDER THEORY

Summary: *This paper gives detailed procedure of the calculation of linear bearings with semi-rigid member joints, serving the purpose of rotation joint rigidness, being the realistic parameter for defining stress area and deformation stress in both the joint itself, as well as the construction itself as a whole. For the introduced rotation rigidness of the realistic joints, the expressions got are those defining non-defined deformation parameters using the deformation method at the static loads according to the linearized Second Order Theory.*

Keywords: *Deformation method, semi-rigid joints, rotation joint rigidness.*