Међународна конференција
Савремена достигнућа у грађевинарству 24.-25. април 2014. Суботица, СРБИЈА

АНАЛИЗА ТАНКОЗИДНИХ КОМПОЗИТНИХ НОСАЧА ПРОИЗВОЉНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

Мартина Војнић Пурчар[1]

UDK: 624.072.2:519.653
DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.052

Резиме: *Циљ овог рада је да се представи јединствена анализа танкозидних композитних штапова отвореног и затвореног попречног пресека. Изведене су диференцијалне једначине танкозидног композитног штапа произвољног попречног пресека применом принципа виртуалних померања, а полазећи од функције депланације коју је предложио Прокић. Претпоставка о занемарењу клизања у средњој површи штапа није неопходна, па се смичући напони могу одредити директно из одговарајућих деформација, а расподела нормалних напона изазваних депланацијом није више одређена секторском координатом, већ параметрима померања чворних тачака.*

Кључне речи: *Такозидни штапови, диференцијалне једначине, композити*

1. УВОД

Танкозидни композитни носачи имају широку примену у разним пољима авио и аутомобилске индустрије, а у задњих неколико деценија се раширила и њихова употреба у грађевинарству. Овај материјал има низ предности, као што су мала сопствена тежина насупрот великим чврстоћама које постиже, корозиона отпорност, добре механичке карактеристике као и могућност лаког обликовања.
Посебно треба истаћи примену танкозидних елемената у композитним конструкцијама, које се састоје од ламината комбинованих од танких плоча (ламина, слојева).
Примена композитних материјала у конструкцији танкозидних носача постаје све већа па се даје све већи значај начину прорачуна ових конструкција. Проблем прорачуна је много комплекснији у односу на хомогене танкозидне носаче, па се јавља потреба за подробнијим испитивањем овог проблема. Основ испитивања представља теорија Власова [1] која је због своје једноставности пронашла широку примену у прорачуну танкозидних носача. Недостатак ове теорије је увођење претпоставке о занемарењу клизања у средњој површи штапа, која представља основу класичне теорије танкозидних носача. На тај начин се практично прописује расподела нормалних напона у попречном пресеку. Такође примена ове теорије захтева одвојено посматрање носача отвореног односно затвореног попречног пресека.

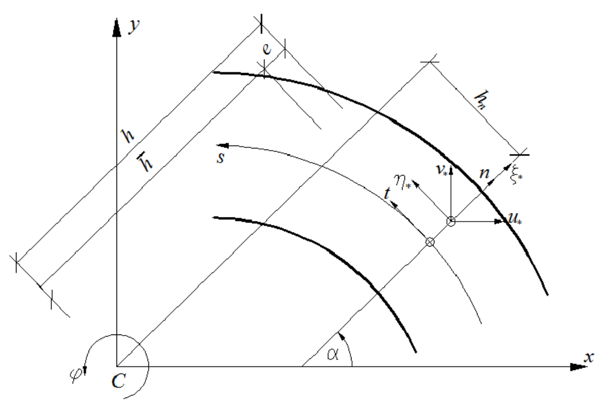
[1] Мартина Војнић Пурчар, дипл.инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, е – mail: vojnicm@gf.uns.ac.rs

Циљ истраживања овог рада је да се кроз теоријску анализу, полазећи од базних хипотеза, изведу једначине равнотеже за произвољан танкозидни композитни штап. Уводи се нова функција депланације, коју је, у својим радовима, предложио Прокић [2,3,4]. Она омогућује јединствену анализу танкозидних носача отвореног и затвореног попречног пресека, не захтева занемарење деформације клизања у средњој површи штапа, па се смичући напони могу директно одредити из ових деформација.

2. ДЕФОРМАЦИЈА ШТАПА

Полазећи од претпоставке да је пресек апсолутно крут у својој равни померања произвољне тачке можемо описати помоћу три параметра, померања тежишне тачке пресека u и v у правцима оса x и y и обртања пресека φ око тежишне тачке:

$$u_* = u - \varphi y \qquad v_* = v + \varphi x \tag{1}$$



Слика 1

Веза између компонената померања ξ_* и η_* произвољне тачке пресека, у правцима нормале и тангенте на средњу линију, и компонената u_* и v_* је следећа:

$$\xi_* = v_* \sin\alpha + u_* \cos\alpha \qquad \eta_* = v_* \cos\alpha - u_* \sin\alpha \tag{2}$$

Где је α угао између x и n осе.

Померање тачака у правцу осе штапа може се разложити у два дела.

$$w_* = w_r + w_d \tag{3}$$

Први део, изазван аксијалним напрезањем и савијањем штапа, представља померање пресека као равног:

$$w_r = w + y\psi_x - x\psi_y \tag{4}$$

Где параметар w означава транслаторно померање, а параметри ψ_x и ψ_y обртање пресека око x и y осе.

Други део аксијалног померања, који потиче од депланације пресека, је изражен преко функције депланације коју је у својој докторској дисертацији предложио Прокић. Она представља основу даљег излагања и пружа могућност јединственог приказа теорије танкозидних носача отвореног и затвореног попречног пресека.

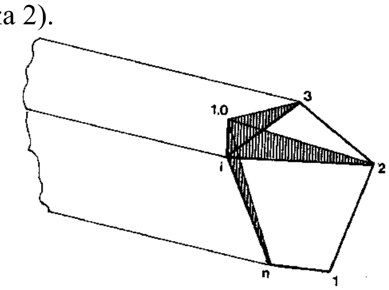
$$w_d = w_d^s + w_d^e \tag{5}$$

Где је

$$w_d^s = \sum_i \Omega^i\left(x, y\right) w_i\left(z\right) \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{6}$$

депланација дуж средње линије пресека. За непознате параметре померања w_i можемо бирати померања произвољних тачака на средњој линији пресека. Како су то најчешће чворне тачке, тако је и укупан број непознатих w_i једнак броју чворова.

Функција Ω^i зависна је од начина промене померања између чворова пресека. Претпостављена је линеарна расподела па функција Ω^i добија једноставно геометријско значење (Слика 2).



Слика 2

Функција Ω^i различита је од нуле само на деловима контуре који се сустичу у чвору i, линеарно се мењајући од вредности један у чвору i, до вредности нула у суседним чворовима.

За попречну депланацију, тј. за релативна померања у односу на средњу линију попречног пресека, усвојена је функција:

$$w_d^e = -\omega(x,y)\varphi'(z) \tag{7}$$

Интензитет депланације је одређен параметром φ' а за функцију ω се усваја функција Saint-Venant-ове слободне торзије:

$$\omega = h_n e \tag{8}$$

Узимајући у обзир изразе (6), (8) и (9) укупно аксијално померање се добија на основу израза:

$$w_* = w + y\psi_x - x\psi_y + \sum_i \Omega^i w_i - \omega\varphi' \tag{9}$$

3. ДЕФОРМАЦИЈСКЕ И НАПОНСКЕ ВЕЛИЧИНЕ

Деформацијске величине које су различите од нуле су дилатација ε_z и клизање γ_{zs} и γ_{zn}.

Имајући у виду изразе (3) и (11) за дилатацију и клизање добијамо:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{\partial w_*}{\partial z} = w' + y\psi_x' - x\psi_y' + \sum_i \Omega^i w_i' - \omega\varphi'' \\
\gamma_{zs} &= \frac{\partial \eta_*}{\partial z} + \frac{\partial w_*}{\partial s} = (v' + \psi_x)\cos\alpha - (u' - \psi_y)\sin\alpha + \sum_i \Omega_{,s}{}^i w_i + \varphi'(\overline{h} + 2e) \\
\gamma_{zn} &= \frac{\partial \xi_*}{\partial z} + \frac{\partial w_*}{\partial e} = (v' + \psi_x)\sin\alpha + (u' - \psi_y)\cos\alpha
\end{aligned} \tag{10}$$

Како се ради о анизотропном материјалу везе између напона и деформација су дате матричном једначином

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \\ \tau_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Q}}_{11} & \overline{\overline{Q}}_{16} & \\ \overline{\overline{Q}}_{16} & \overline{\overline{Q}}_{66} & \\ & & \overline{\overline{Q}}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \\ \gamma_{zn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

4. УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ

Услови равнотеже су изведени применом принципа виртуалних померања. Посматра се диференцијални елемент штапа дужине dz. У произвољној тачки пресека делује вектор напона σ.

$$\sigma = \tau_{zn}\cos\alpha\, i_x - \tau_{zs}\sin\alpha\, i_x + \tau_{zn}\sin\alpha\, i_y + \tau_{zs}\cos\alpha\, i_y + \sigma_z i_z \tag{13}$$

Принцип виртуалних померања гласи:

$$\delta R_s + \delta R_u = 0 \tag{14}$$

Рад спољашних сила, редукован на јединицу дужине осе штапа, износи:

$$\delta R_s = \iint_F \left(\sigma_{,z}\delta u + \sigma\delta u_{,z}\right)dF + \int_s \overline{p}\delta u\, ds \tag{15}$$

Рад унутрашњих сила једнак је негативном раду компоненталних напона при задатим виртуалним деформацијама. Редукован на јединицу дужине штапа он износи:

$$\delta R_u = -\iint_F \left(\tau_{zn}\delta\gamma_{zn} + \tau_{zs}\delta\gamma_{zs} + \sigma_z\delta\varepsilon_z\right)dF \tag{16}$$

Уврштавањем једначина (15) и (16) у (14) и њиховог сређивања добијају се једначине које представљају услове равнотеже танкозидног композитног штапа произвољног попречног пресека, изражене преко напонских величина.

$$\begin{aligned}
&\iint_F \sigma_z' dF + \int_s \overline{p}_z ds = 0\\
&\iint_F \left(\tau_{zn}'\cos\alpha - \tau_{zs}'\sin\alpha\right)dF + \int_s \overline{p}_x ds = 0\\
&\iint_F \left(\tau_{zn}'\sin\alpha + \tau_{zs}'\cos\alpha\right)dF + \int_s \overline{p}_y ds = 0\\
&\iint_F \left(\sigma_z' y - \tau_{zn}\sin\alpha - \tau_{zs}\cos\alpha\right)dF + \int_s \overline{p}_z y ds = 0\\
&\iint_F \left(-\sigma_z' x + \tau_{zn}\cos\alpha - \tau_{zs}\sin\alpha\right)dF - \int_s \overline{p}_z x ds = 0\\
&\iint_F \left(-\tau_{zn}' y\cos\alpha + \tau_{zs}' y\sin\alpha + \tau_{zn}' x\sin\alpha + \tau_{zs}' x\cos\alpha\right)dF + \int_s \left(\overline{p}_y x - \overline{p}_x y\right)ds = 0\\
&\iint_F \left(\sigma_z'\Omega^i - \tau_{zs}\Omega^i_{,s}\right)dF + \int_s \overline{p}_z\Omega^i ds = 0\\
&\iint_F \left(-\sigma_z'\omega - \tau_{zn} y\cos\alpha + \tau_{zs} y\sin\alpha + \tau_{zn} x\sin\alpha + \tau_{zs} x\cos\alpha\right)dF - \int_s \overline{p}_z\omega ds = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

5. ЗАКЉУЧАК

Увођењем нове секторске координате омогућено је јединствено посматрање танкозидних композитних штапова затворено-отвореног попречног пресека, што у великој мери поједностављује њихову анализу. Такође, велика предност је што није неопходна претпоставка о занемарењу клизања, па се смичући напони могу директо одредити из одговарајућих деформација.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Прокић, А.: Докторска дисертација-Танкозидни носачи отворено-затвореног попречног пресека, Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд **1990**
[2] Прокић, А.: New warping function for thin-walled beams. I: Theory. J Struct Eng (ASCE) ,**1996**;122(12):1437–42.
[3] Прокић, А.: New warping function for thin-walled beams. II: Finite element method and applications. J Struct Eng (ASCE) **1996**;122(12):1443–52.
[4] Прокић, А.: New finite element for analysis of shear lag. Computers and Structures 80 ,**2002**, 1011-1024

ANALYSIS OF THIN-WALLED COMPOSITE BEAMS OF ARBITRARY CROSS-SECTION

Summary: *The purpose of this paper is to present the unique analysis of thin-walled composite beams of open and close cross section. Governing differential equations of thin-walled composite beams of arbitrary cross-section are derived using the principle of virtual displacement, based on the warping function proposed by Prokić. Assumptions of neglecting shear strains in the middle surface is not required, therefore stresses can be calculated directly from the strains, and distributions of normal stresses resulting from warping is not determined by warping function, but by the displacement parameters at selected nodes.*

Keywords: *Thin-walled beams, differential equations, composite*