

## ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНО ИЗВИЈАЊА ТАНКОЗИДНИХ ГРЕДА

Дијана Мајсторовић<sup>1</sup>  
Милорад Дошеновић<sup>2</sup>  
Драган Д. Милашиновић<sup>3</sup>

УДК: 624.072.2

DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.043

**Резиме:** Овај рад презентује примјену генерализоване теорије греде (*generalised beam theory, GBT*) за проблем извијања танкозидних елемената од алуминијума и нехрђајућег челика. Ова теорија се показала као врло ефикасна за анализу локалне и глобалне стабилности танкозидних хладнообликаних челичних (изотропних) и композитних (ортотропних) носача. У овом раду посебна пажња је посвећена дефинисању проблема стабилности примјеном једноставне континуалне реолошко-динамичке функције модула. Потврђивање *GBT*, њене јединствене карактеристике и могућности илустровани су на примјеру равномјерно притиснуте правоугаоне плоче од нехрђајућег челика.

**Кључне речи:** *GBT*, пластична бифуркација, реолошко-динамичка функција модула, критични напон, напон лома

### 1. УВОД

Последњих година елементи од нехрђајућег челика имају све већу употребу због низа предности у односу на друге материјале. Финансијска ефикасност и естетски захтјеви често воде до избора витких танкозидних носача, што их чини веома осјетљивим на локална и/или глобална извијања. С тим у вези сигурна и економски исплатива рјешења се могу постићи само ако су познати и разумљиви сви феномени нестабилности, те тачно предвиђени. Еласто-пластично понашање нехрђајућег челика одликује: (1) недостатак добро дефинисаног напона течења и (2) изразито нелинеарна једноаксијална крива напон-деформација (и прије напона течења при деформацији од 0.2%), која често укључује и значајну количину деформацијског ојачања. Тиме се подразумјева да феномен извијања (бифуркације), било локалног или глобалног, често се јавља у нелинеарном (еласто-пластичном) домену. То значи да се морају ријешити проблеми који

<sup>1</sup> Дијана Мајсторовић, дипл. инж. грађ., Универзитет у Бањалуци, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, Војводе Степе Степановића 77/3, Бања Лука, Босна и Херцеговина, tel: +387 65 481 867, e-mail: [dijanam@agfbl.org](mailto:dijanam@agfbl.org)

<sup>2</sup> Милорад Дошеновић, дипл. инж. грађ., Интеграл Инжењеринг а.д., Трг републике Српске 8/XII Бања Лука, Босна и Херцеговина, tel: +387 65 754 785, e-mail: [dosenovicm@yahoo.com](mailto:dosenovicm@yahoo.com)

<sup>3</sup> Проф. др Драган Д. Милашиновић, дипл. инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, tel: +381 24 554 300, e-mail: [ddmil@gf.uns.ac.rs](mailto:ddmil@gf.uns.ac.rs)

укључују пластичну бифуркацију еласто-пластичног материјала. Она је: (1) дефинисана тренутним модулима еластичности, и (2) у равномјерно притиснутим елементима се увијек одвија након границе еластичности при прирасту оптерећења. Дакле, бифуркационо оптерећење еласто-пластичних дијелова може се одредити дефинисањем проблема стабилности њених „нелинеарно-еластичних дијелова“. Мембранске силе у плочама и љускама, које дјелују у средњој равни, могу довести до извијања које се дешава када конструкција претвара мембранску енергију у енергију деформације савијања. Танкозидни носачи са малом крутости на савијање, али са великом мембранском, могу бити критични јер се у случају великих деформација савијања акумулирана енергија изненада отпушта извијањем. Како би се тачно анализирано и локално (пресјек) и глобало (греда) понашање при извијању танкозидних носача од нехрђајућег челика, практично све анализе нелинеарности морају се извршити путем анализе методом коначних елемента (МКЕ) или методом коначних трака (МКТ). У вези са наведеним, важно је споменути „парадокс извијања плоча“ како га је објаснио Хатчинсон (Hutchinson) [1]: „Откривено је да бифуркациона оптерећења израчуната најједноставнијом пластичном теоријом, теоријом течења, прецјењују оптерећења при извијању плоча и љуски добијених експерименталним путем. Рачунање на основу мање поштоване пластичне теорије деформације дало је боље слагање са резултатима експеримената“. Такође, како ће бити показано у овом раду, реолошко-динамичка аналогија (RDA), коју је развио Милашиновоћ [2] нумерички потврђује ову тврдњу. GBT је развијена од стране Шрадта (Schradt) средином 1980их и касније допуњена од стране Дејвиса (Davies) и сарадника, углавном за анализу линеарне стабилности хладно обликованих челичних елемената. Анализа се састоји од прорачуна деформације попречног пресјека и елемената, и показала се као врло ефикасна за анализу локалне и глобалне стабилности танкозидних хладнообликованих челичних (изотропних) и композитних (ортотропних) носача. GBT се показала као прилично погодна аналитичко средство за процјењивање локалног и глобалног понашања при савијању танкозидних призматичних носача. Треба нагласити да је GBT усвојена као важећа и често повољна алтернатива од потпуно нумеричке МКЕ и нумеричко-аналитичке МКТ анализе. Циљ овог рада је да прикаже кратак преглед формулације GBT која се може примјенити за анализу понашања при извијању отворених и затворених танкозидних носача који су направљени од нелинеарно еласто-пластичних материјала као што су алуминијум или нехрђајући челик. Даље, пажња је посвећена процјени тренутних модула еластичности према теорији течења, теорији деформације и реолошко-динамичкој аналогији. Коначно на крају, презентовани су и дискутовани неки нумерички резултати, како би се тестирала и илустровала примјена и способност предложене GBT. Ови резултати баве се равномјерно притиснутом правоугаоном плочом од нехрђајућег челика.

## 2. НЕЛИНЕАРНО ЕЛАСТИЧАН МАТЕРИЈАЛ

### 2.1 GBT ФУНДАМЕНТАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

У случају нелинеарно-еластичног материјала потребно је спровести обе (геометријску и материјалну) анализе, углавном због потребе да се утврди

тренутни модул еластичности. *Бифуркациона анализа* подразумева проналажење „сусједног стања равнотеже“.

Оваква конфигурација се налази у непосредној близини основног напрегнутог стања и такође задовољава неутрални услов равнотеже изражен у форми принципа виртуалног рада  $\delta\dot{W} = \delta\dot{W}_E + \delta\dot{W}_I = 0$ , гдје су  $\delta\dot{W}_E$  и  $\delta\dot{W}_I$  мјера спољашњег и унутрашњег виртуелног рада. У случају када је елемент изложен равномјерном притиску  $\sigma_{xx} = -P/\Omega$  (линијско оптерећење притиска  $P$  и површина попречног пресека  $\Omega$ ), спољашњи и унутрашњи виртуални рад су дефинисани са

$$\begin{aligned} \delta\dot{W}_E &= \int_V \sigma_{xx} \delta\dot{u}_{,x} dV = -\int_V \frac{P}{\Omega} \delta\dot{u}_{,x} dV, \\ \delta\dot{W}_I &= -\int_V (\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}) \delta\dot{\epsilon}_{ij} dV = -\int_V \left( -\frac{P}{\Omega} \delta\dot{\epsilon}_{xx}^M + \dot{\sigma}_{ij} \delta\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV, \end{aligned} \quad (35)$$

при томе зарез означава диференцијацију,  $\sigma_{ij}$  су компоненте основног тензора напона ( $\sigma_{xx} = -P/\Omega$  је једина различита од нуле),  $\dot{\sigma}_{ij}$  компонента тензора напона повезана са тензором деформације  $\dot{\epsilon}_{ij}$  преко тренутног модула еластичности,  $\delta\dot{\epsilon}_{ij}$  је варијација тензора деформације, и варијација мембранске деформације је дефинисана са

$$\delta\dot{\epsilon}_{xx}^M = \delta\dot{u}_{,x} + \delta(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)/2 \quad (36)$$

Након замјене (1) и (2) у формулу за виртуални рад добија се израз

$$\begin{aligned} \delta\dot{W} &= -\int_V \frac{P}{\Omega} \delta\dot{u}_{,x} dV - \int_V \left( -\frac{P}{\Omega} \delta\dot{\epsilon}_{xx}^M + \dot{\sigma}_{ij} \delta\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV \\ &= \int_V \left( \frac{P}{\Omega} \frac{\delta(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)}{2} - \dot{\sigma}_{ij} \delta\dot{\epsilon}_{ij} \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

из којег се дефинише стање равнотеже нелинеарно-еластичног елемента.

## 2.2 КОНСТИТУТИВНЕ ВЕЗЕ

Инкрементална веза напон-деформација, у случају елемента оптерећеног једнооксијалним притиском, дата је са:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx}^B \\ \dot{\sigma}_{yy}^B \\ \dot{\sigma}_{xy}^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & 0 \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx}^B \\ \dot{\epsilon}_{yy}^B \\ \dot{\epsilon}_{xy}^B \end{Bmatrix}, \quad \dot{\sigma}_{xx}^M = E_T \dot{\epsilon}_{xx}^M \quad (38)$$

гдје су  $\dot{C}_{ij}$  и  $E_T$  тренутни модули еластичности и уздужни (једнооксијални) тангентни модул, респективно, а  $^B$  и  $^M$  означавају савијање и мембранско напрезање и деформацију.

Изрази за  $\dot{C}_{ij}$  по теоријама течења и деформације су дати према [3]

$$\begin{aligned}\dot{C}_{11} &= \frac{(\Lambda_T + 3)E_0}{(5-4\nu)\Lambda_T - (1-2\nu)^2}, \quad \dot{C}_{22} = \frac{4\Lambda_T E_0}{(5-4\nu)\Lambda_T - (1-2\nu)^2}, \\ \dot{C}_{12} = \dot{C}_{21} &= \frac{(4\nu + 2\Lambda_T - 2)E_0}{(5-4\nu)\Lambda_T - (1-2\nu)^2}, \quad \dot{C}_{33} = 2G = \frac{E_0}{1+\nu}\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\dot{C}_{11} &= \frac{(\Lambda_T + 3\Lambda_S)E_0}{(2+3\Lambda_S - 4\nu)\Lambda_T - (1-2\nu)^2}, \quad \dot{C}_{22} = \frac{4\Lambda_T E_0}{(2+3\Lambda_S - 4\nu)\Lambda_T - (1-2\nu)^2}, \\ \dot{C}_{12} = \dot{C}_{21} &= \frac{(4\nu + 2\Lambda_T - 2)E_0}{(2+3\Lambda_S - 4\nu)\Lambda_T - (1-2\nu)^2}, \quad \dot{C}_{33} = \frac{2E_0}{2\nu - 1 + 3\Lambda_S}\end{aligned}\quad (40)$$

гдје су  $\Lambda_T = E_0/E_T$  и  $\Lambda_S = E_0/E_S$ .

Вриједност тангентног и секантног модула,  $E_T$  и  $E_S$ , зависе од вриједности напона којим је плоча притиснута и добијају се са одговарајуће напон-деформација криве која описује понашање материјала. У овом раду је кориштена Рамберг-Осгудова (Ramberg-Osgood) крива према [4]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0.002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^n \quad (41)$$

гдје је  $\sigma_{0.2}$  напон пластичног течења за деформацију 0.2%, док је  $n$  параметар деформацијског ојачања материјала.

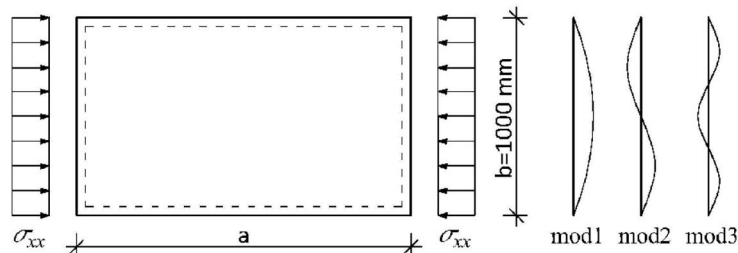
Конститутивна RDA матрица у случају равнoг стања напона, има следећи облик према [2]

$$C_t = \begin{bmatrix} \frac{E_R}{1-\nu^2} & \frac{\nu E_R}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E_R}{1-\nu^2} & \frac{E_0}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_0}{1+\nu} \end{bmatrix}, \quad E_R = \frac{3E_0}{(5-4\nu) + 2(1+\nu)\varphi^*} \quad (42)$$

при чему су:  $E_R$  реолошко-динамички модул еластичности, а  $\varphi^*$  реолошко-динамички параметар материјала. Примјеном RDA матрице у првој итерацији се добија напон течења, док се у некој од наредних, када текући напон више не мјења реолошко-динамички модул, добија напон лома.

### 3. ИЛУСТРАТИВНИ ПРИМЈЕР

Анализира се еласто-пластична правоугаона плоча слободно ослоњена дуж свих ивица, дужине  $a$  и ширине  $b$ , притиснуту равномјерним притиском у подужном правцу (Слика 1). С обзиром да су помјерања у  $y$  правцу на бочним странама ( $y=0$  и  $y=b$ ) спријечена, у плочи се јављају и попречни мембрански напони  $\sigma_{yy}^M$ .



Слика 1. Геометрија правоугаоне плоче и GBT деформациони модови

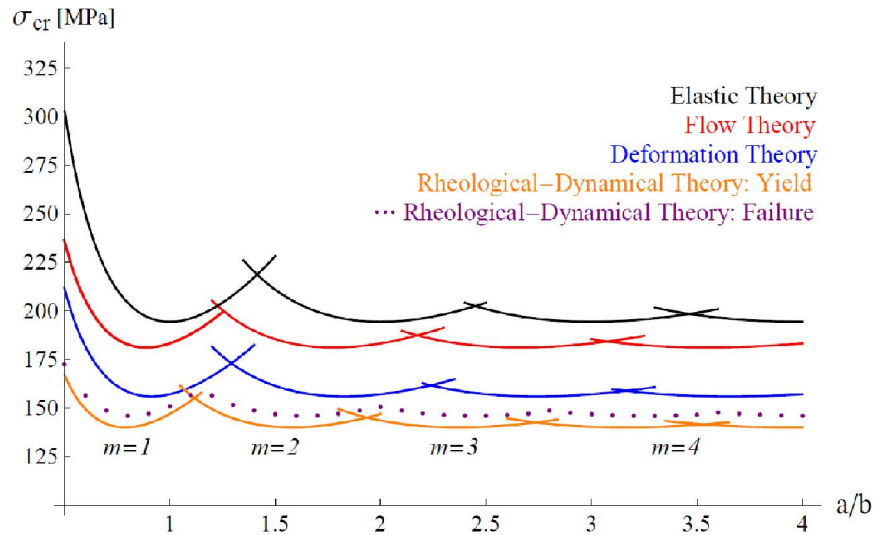
Проблем губитка стабилности поменуте плоче истраживали су Ханделман (Handelman) и Прагер (Prager), те поставили аналитичко рјешење [5]:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 m^2}{t a^2} \left[ K_{22} \left( \frac{a^2}{m^2 b^2} + \frac{K_{12}}{K_{22}} \right)^2 + K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}} \right] \quad (43)$$

$$K_{11} = \frac{t^3}{12} \dot{C}_{11}, \quad K_{22} = \frac{t^3}{12} \dot{C}_{22}, \quad K_{12} = \frac{t^3}{12} [\dot{C}_{12} + \dot{C}_{33}] \quad (44)$$

гдје је  $t$  дебелина плоче и  $m$  број уздужних полу-таласа.

Резултати приказани у примјеру односе се на плочу следећих геометријских и материјалних карактеристика:  $t=16mm$ ,  $b=1000mm$ ,  $E_0=210GPa$ ,  $\sigma_y=311.609MPa$ ,  $\nu=0.3$  и  $n=5$ .



Слика 2. Вриједност критичних напона правоугаоне плоче

На слици 2 приказане су вриједности критичних напона  $\sigma_{cr}$  добијених аналитички по четири теорије: а) линеарно-еластична, б) еласто-пластична теорија деформације, ц) еласто-пластична теорија течења и д) еласто-пластична реолошко-динамичка теорија.

Посматрајући резултате добијене приказаним теоријама можемо уочити да су разлике између вриједности критичних напона веће за краће плоче, тј. за плоче са односом страна  $a/b < 1$ . Разлике које се појављују по примјењеним теоријама оправдавају ову анализу у смислу избора неке од метода у конкретном примјеру.

#### 4. ЗАКЉУЧАК

Имајући у виду Хатчинсонов „парадокс извијања плоча“ [1], у овом раду је показано да бифуркациона оптерећења израчуната најједноставнијом пластичном теоријом, познатом као теорија течења, прецењују оптерећења при извијању плоча приближавајући их еластичном рјешењу. Прорачуни на основу мање поштоване пластичне теорије деформације као и примјеном реолошко-динамичке аналогije (RDA), коју је развио Милашиновић [2], дају рјешења која се боље слажу са резултатима експеримената.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hutchinson J.W.: *Plastic buckling*, In: Yih CS, editor. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 4. New York: Academic Press: 1974., p.p. 67-144.
- [2] Mlašinović, D.D.: *The Finite Strip Method in Computational Mechanics*, Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade: Subotica, Budapest, Belgrade, 1997.
- [3] Camotim, D., Gonçalves, R.: *GBT-based local and global buckling analysis of C-section and RHS stainless steel columns*, 2003., p.p. 461-490.
- [4] Ramberg, W. & Osgood, W.R.: *Description of Stress-strain Curves by Three Parameters*, NACA Technical Note n° 902, 1943.
- [5] Handelman, G.H. & Prager, W.: *Plastic Buckling of a rectangular Plate Under Edge Thrust*, NACA Technical Note n° 1530, 1948.

### ELASTIC-PLASTIC BUCKLING OF THIN-WALLED BEAMS

**Summary:** *This paper seeks to formulate and validate the generalised beam theory (GBT) for the buckling behaviour of aluminium and stainless steel thin-walled members. The analysis consists of calculation cross-section (local) and member (global) deformations and has been shown to be very efficient tool for analyzing local and global stability behaviour of thin-walled cold-formed steel (isotropic) and composite (orthotropic) members. In this work particular attention is paid to the need to define the stability problem in terms of one simple continuous rheological-dynamical modulus function. Verification of GBT, its unique features and capabilities are illustrated by the example of uniformly compressed rectangular plate of stainless steel.*

**Keywords:** *Generalised beam theory, plastic bifurcation, rheological-dynamical modulus function, critical and failure stress*