Међународна конференција
Савремена достигнућа у грађевинарству 24.-25. април 2014. Суботица, СРБИЈА

БИФУРКАЦИОНА СТАБИЛНОСТ ТАНКИХ ПЛОЧА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

Наташа Мрђа[1]
Драган Д. Милашиновић[2]

UDK: 624.073:624.046.3
DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.042

Резиме: *У раду је представљена примјена метода коначних елемената при анализи танких плоча. Примјењен је ортотропан коначни елемент са дванаест степени слободе и интерполационе функције континуитета . Предмет рада је извођење матрице крутости и геометријске матрице крутости, те дефинисање проблема бифуркационе стабилности. Рјешавање проблема бифуркационе стабилности представља одређивање критичних сила. Проблем бифуркационе стабилности је разматран на танким плочама са различитим граничним условима. Примјеном теоријских разматрања, у софтверском пакету Mathematica је настао програм МКЕБС, с циљем добијања критичних сила код плоча дискретизованих са различитим бројем коначних елемената. Као коначан резултат рада, кроз примјере су приказани резултати добијени примјеном програма МКЕБС.*

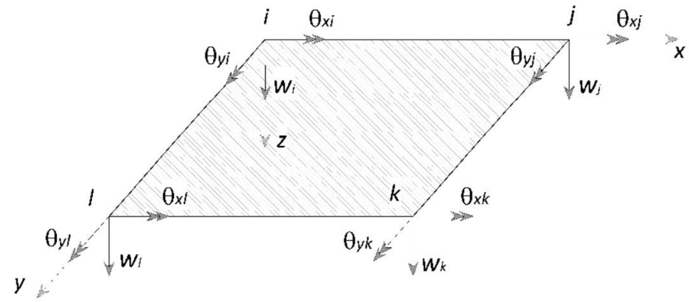
Кључне речи: *Бифуркациона стабилност, метод коначних елемената, Wolfram Mathematica*

1. УВОД

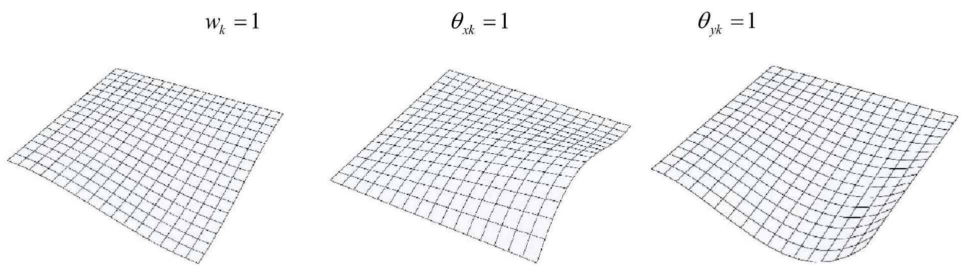
Предмет рада је анализа бифуркационе стабилности танких плоча која се спроводи усвајањем Кирхоф – Лов (Kirchoff-Love) хипотезе. Бифуркациона стабилност је област линеарне анализе у којој се критично отерећење добија рјешавањем одговарајућег проблема својствених вриједности. За дискретизацију у методу коначних елемената је кориштен правоугани коначни елемент са 12 степени слободе приказан на слици 1. Овај елемент, иако неконформан са степеном континуитета C^0, даје рјешења која конвергирају ка тачним [1]. Интерполационе функције овог елемента приказане су за чвор k на слици 2. Проблем бифуркационе стабилности система коначних елемената дефинисан је изразом (14)

[1] Наташа Мрђа, дипл.инж. грађ., Универзитет у Бањалуци, Архитектонско – грађевинско – геодетски факултет, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука, Босна и Херцеговина, тел: +387 66 860 858, e – mail: mnatasa@agfbl.org
[2] Проф. др Драган Д. Милашиновић, дипл.инж. грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: +381 24 554 300, e – mail: ddmil@gf.uns.ac.rs

, при чему је λ фактор пропорционалности између напона и оптерећења, $\mathbf{K}_0$ основна матрица крутости, и $\mathbf{K}_g$ геометријска матрица крутости елемената.



Слика 1. *Правоугаони елемент плоче са 12 степени слободе*



Слика 2. *Интерполационе функције за чвор* k

$$\left| \mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_g \right| = 0 \tag{14}$$

2. МАТРИЦА КРУТОСТИ ЕЛЕМЕНАТА $\mathbf{K}_0$

Вектор генералисаних помјерања $\mathbf{u}$ у тачкама елемента се дефинише преко вектора параметара помјерања $\mathbf{q}$ у чворовима елемента

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_q \mathbf{q} \tag{15}$$

$\mathbf{A}_q$ је матрица која успоставља везу између поменута два вектора, а чији су елементи интерполационе функције, те се по њима и ова матрица назива матрица интерполационих функција. Једначином (15) дефинисано је поље помјерања у елементу у зависности од помјерања у чворовима. Када је познато поље помјерања може се одредити и поље деформација. Компоненте деформација у зависности од компонената помјерања добијају се диференцирањем израза (15) односно примјеном одговарајуће матрице оператора над матрицом интерполационих функција. На овај начин, за вектор деформација, се добија:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_q \mathbf{q} \tag{16}$$

$\mathbf{B}_q$ је матрица трансформације деформације.

Укупна потенцијална енергија Π деформисане танке плоче једнака је збиру енергије деформације и потенцијала сила, односно рада спољашњих сила:

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{F}^T \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS \tag{17}$$

Смјеном (15) и (16) у (17) добија се

$$\Pi = \int_V \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_q \mathbf{q}\right)^T \mathbf{D}\left(\mathbf{B}_q \mathbf{q}\right) - \mathbf{F}^T \left(\mathbf{A}_q \mathbf{q}\right) \right] dV - \int_S \mathbf{p}^T \left(\mathbf{A}_q \mathbf{q}\right) dS \tag{18}$$

Након множења и сређивања чланова под знаком интеграла имамо

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{q}\right) - \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_q \tag{19}$$

гдје је

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_q^T \mathbf{D} \mathbf{B}_q dV \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}_q = \int_V \mathbf{A}_q^T \mathbf{F} dV + \int_S \mathbf{A}_q^T \mathbf{p} dS \tag{20}$$

Даље изразе (20) можемо написати у облику

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_q = \int_V \mathbf{N}^T F dV + \int_S \mathbf{N}^T p dS \tag{21}$$

При чему $\mathbf{K}_0$ представља матрицу крутости елемента, а $\mathbf{Q}$ вектор еквивалентног чворног оптерећења.

3. ГЕОМЕТРИЈСКА МАТРИЦА КРУТОСТИ ЕЛЕМЕНАТА $\mathbf{K}_g$

Полазећи од општег израза за енергију деформације у геометријски нелинеарној анализи

$$A = \frac{1}{2}\int_V D_{ijkl}\left(e_{ij}e_{kl} + e_{ij}\eta_{kl} + e_{kl}\eta_{ij} + \eta_{ij}\eta_{kl}\right) dV \tag{22}$$

те уводећи одређена поједностављења израз (22) сводимо на

$$A = \frac{1}{2}\int_V \left(D_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \sigma_{ij}\eta_{ij}\right) dV \tag{23}$$

Односно у матричном облику

$$A = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \left(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g\right)\mathbf{q} \tag{24}$$

При чему је

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{q} = \int_V D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV \tag{25}$$

Односно

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \mathbf{q} = \int_V \sigma_{ij}\eta_{ij} dV \tag{26}$$

Ако сада примјенимо матрицу оператор

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T \tag{27}$$

на вектор генералисаних помјерања у тачкама елемената који ћемо означити са w, добијамо

$$\mathbf{Lw} = \mathbf{LN}^T\mathbf{q} = \mathbf{B}_{NL}\mathbf{q} \tag{28}$$

Односно

$$\mathbf{Lw} = \begin{bmatrix} w,_x \\ w,_y \end{bmatrix} \tag{29}$$

Из (28) и (29) добијамо да је

$$\begin{bmatrix} w,_x \\ w,_y \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{NL}\mathbf{q} \tag{30}$$

А стога и да је

$$\begin{bmatrix} w,_x & w,_y \end{bmatrix} = \mathbf{q}^T\mathbf{B}_{NL}^T \tag{31}$$

Уносећи добијене матрице под интеграл и имајући у виду да је

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j} \tag{32}$$

добијамо

$$\int_V \sigma_{ij}\eta_{ij}dV = \int_F \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} w,_x & w,_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w,_x \\ w,_y \end{bmatrix} dzdF = \mathbf{q}^T \left(\int_F \mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{N}_{PN}\mathbf{B}_{NL}dF \right)\mathbf{q} \tag{33}$$

Из (26) и (33) слиједи да је

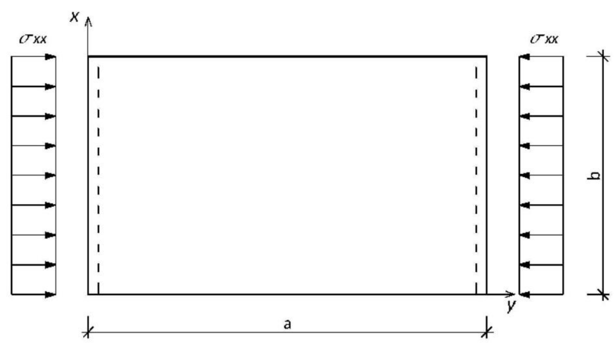
$$\mathbf{K}_g = \int_F \mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{N}_{PN}\mathbf{B}_{NL}dF \tag{34}$$

гдје је $\mathbf{B}_{NL}$ матрица трансформације нелинеарне деформације, а $\mathbf{N}_{PN}$ матрица почетних напона, односно матрица почетних сила.

Да би одредили геометријску матрицу крутости потребно је да познајемо десну страну једначине (26). С обзиром да нам напони нису познати, у теорији бифуркационе стабилности предпостављамо да је позната квалитативна расподјела напона у плочи. Знајући квалитативну расподјелу напона у плочи можемо ријешити нелинеаран проблем користећи једначине линеарне теорије. Овај поступак се назива линеаризација једначина, а теорија која се бави проучавањем истих, линеаризована теорија.

4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕР

Програм МКЕБС (Метод Коначних Елемената Бифуркациона Стабилност) је настао у програмском пакету Mathematica. Mathematica садржи велики број уграђених функција које кориснику омогућавају, између осталог, креирање сопственог софтвера и квалитетан графички приказ резултата. У наредним примјерима извршена је верификација програма МКЕБС. Извршено је поређење добијених резултата са резултатима добијеним аналитичким изразима према [3] и резултатима добијеним употребом софтверског пакета ABAQUS 6.7 према [5]. Анализиране су плоче дебљине $h = 12cm$ за Поасонов (Poisson) коефицијент $\nu = 0$ и Јангов (Young) модул еластичности $E = 30GPa$. Резултати из програма МКЕБС су добијени дискретизацијом са 100 елемената. Посматрамо плочу слободно ослоњену на двије супротне стране, а слободну на преостале двије (слика 3). Плоча је оптерећена у y правцу. Разлика у резултатима дата је у табели 1.

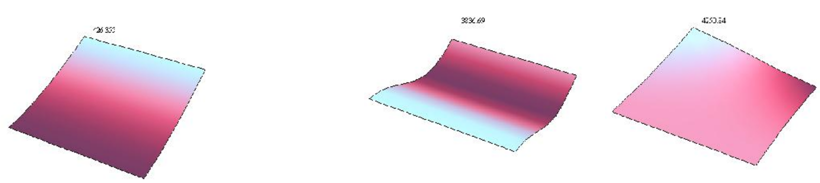


Slika 3. *Плоча слободно ослоњена за* y = 0 и y = a *и слободна за* x = 0 и x = b

Табела 1. *Критичне силе, N[kN]* $x = 0$ и $x = b$

	b = 4m		b = 5m		b = 6m	
	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=1$	$a/b=2$
[3] стр. 343	2664.79	666.19	1705.46	426.36	1184.35	296.08
ABAQUS	2704,40	668.61	1731.00	427.98	1202.60	297.23
МКЕБС	2664.65	666.20	1705.38	426.37	1184.29	296.09
Разлика(%)([3])	0.00525	0.00150	0.00469	0.00235	0.00507	0.00338
Разлика(%)(ABAQUS)	1.49175	0.36175	1.50230	0.37761	1.54607	0.38502

На слици 4 су дати облици извијања којима се показује могућност програма.



Slika 4. *Прва 3 облика извијања конзолне плоче*

5. ЗАКЉУЧАК

Видимо у примјерима да су резултати добијени програмом МКЕБС скоро једнаки резултатима добијеним аналитичким изразима, и програмским пакетом ABAQUS 6.7. Програм МКЕБС је један од низа програма израђених у циљу стварња сопственог софтвера. Израда малих софтвера, је корак ка изради свеобухватнијег софтвера, којим би се могла избјећи куповина скупих иностраних софтвера. Програм МКЕБС тренутно даје критичне силе и својствене облике плоча.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sekulović, M.: *Metod konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd, **1988**.
[2] Milašinović, D.D.: *The Finite Strip Method in Computational Mechanics*, Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade: Subotica, Budapest, Belgrade, **1997**.
[3] Timoshenko S., Gere J.: *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, **1963**.
[4] Umanski, A.A.: *Konstrukterski priručnik*, Građevinska knjiga, **1980**.
[5] Abaqus. Theory manual. Version 6.11, Dassault systems, **2007**.

BIFURCATION STABILITY OF THIN PLATES IN FINITE ELEMENT METHOD APPLICATION PROGRAMMING

Summary: *This paper presents the finite element method adapted to the analysis of stability problem of thin plates. Orthotropic finite element with twelve degrees of freedom is developed and the interpolation shape functions are evaluated. The main subject of the paper is to perform the stiffness matrix and geometric stiffness matrix, and to define the problem of bifurcation stability. Solving the problem of bifurcation stability presents the determination of critical load. The problem of bifurcation stability is discussed on thin plates with different boundary conditions. Based on theoretical explanations, MKEBS computer program is made in Mathematica software, in order to obtain critical load of plates discretized with various number of finite elements. The results of MKEBS are shown through examples as the final results of the work.*

Keywords: *Bifurcation stability, finite element method, Wolfram Mathematica*