

КОНТАКТНИ НАПОНИ ИСПОД ТЕМЕЉА ОПТЕРЕЂЕНОГ СИЛОМ ИЗВАН ЈЕЗГРА ПРЕСЕКА

Илија Самарџија¹Петар Сантрач²

УДК: 624.151:624.042

DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.137

Резиме: Високи објекти као што су фабрички димњааци, антенски стубови, ветро турбине и слично, имају релативно малу тежину у односу на хоризонталне силе које потичу од ветра и сеизмике. При фундаирању оваквих објеката, резултујућа сила која делује на темељ, добијена на основу неповољних комбинација оптерећења, делује изван језгра пресека темељне спојнице, услед чега се појављују затезући напони који су физички немогући. У раду је приказан итеративни поступак за искључење контактних напона затезања, који даје физички коректан дијаграм контактних напона на основу којих се могу израчунати пресечне силе и слегање темеља.

Кључне речи: Ексцентрично оптеречен темељ, језгро пресека, контактни напон

1. UVOD

Usled opterećenja temelja silom izvan jezgra preseka temeljne spojnice, pojavljuju se negativni kontaktни напони – напони затезања, који су физички немогући. Ако се сила налази у језгру пресека, уз упрошћену претпоставку да је дијаграм контактних напона линеарно променљив, интензитет у произвољној таčki се може одредити на основу израза:

$$\sigma_i = P/BL (1 \pm 6e_x/B \pm 6e_y/L) \quad i = 1,2,3,4. \quad (1)$$

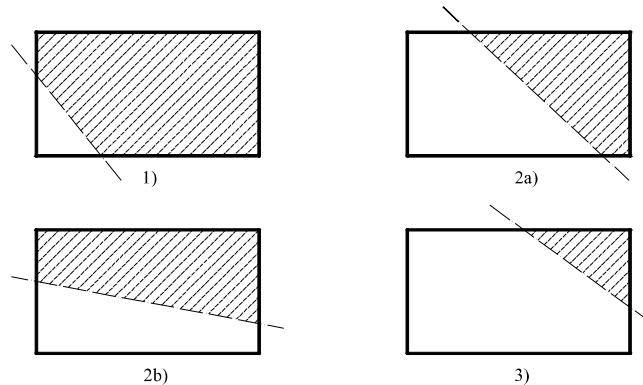
Kada je sila izvan jezgra preseka, jednačina (1) ne daje fizički korektan rezultat. Za ovakav slučaj, u literaturi se mogu naći približni analitički i grafički (Hülsdünker 1964) postupci za proračun maksimalnog ugaonog napona. U radu je prikazana iterativna metoda za proračun kontaktnih napona ispod pravougaonog temelja opterećenog silom izvan jezgra preseka, pri čemu je pretpostavljeno da je promena napona linearna. Napadna tačka sile, kako je kasnije pokazano, može se naći u jednoj od tri karakteristične zone, od koje zavisi položaj neutralne linije (Slika 1). Zone su sledeće:

- 1) Neutralna linija seče dve susedne stranice (tri ugla su pritisnuta)

¹ Илија Самарџија, Студент, Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, email: iljasamardzija91@gmail.com

² Проф др Петар Сантрач, дипл.грађ.инж., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: +381 24 554 300, email: santrac@gf.uns.ac.rs

- 2) Neutralna linija seče dve naspramne stranice (dva ugla su pritisnuta)
 3) Neutralna linija seče dve susedne stranice (jedan ugao je pritisnut).



Slika 1. Karakteristični slučajevi pritisnutih zona (šrafirano)

2. POSTAVKA I REŠENJE PROBLEMA

Rezultujuća sila koja deluje na temelj mora biti u ravnoteži sa reaktivnim opterećenjem tla, odnosno mora zadovoljiti tri uslova ravnoteže ($\Sigma Z=0$, $\Sigma M_x=0$ i $\Sigma M_y=0$). Jednačine koje slede iz ova tri uslova glase:

$$\iint_S p(x, y) dx dy = P \quad (2a)$$

$$\iint_S p(x, y) x dx dy = P e_x \quad (2b)$$

$$\iint_S p(x, y) y dx dy = P e_y \quad (2c)$$

Integracija se vrši po površini pritisnutog dela (S) temeljne spojnice. Predpostavljajući da linearnu promenu kontaktnog napona $p(x,y)$ u pritisnutoj zoni, važi sledeća jednačina:

$$p(x, y) = a x + b y + C \quad (3)$$

Nepoznata oblast integracije (S) je funkcija dimenzija temelja (L, B) i koordinata neutralne linije (m, n). Uvođenjem dodatna dva uslova za položaj neutralne ose dobija se sistem od tri integralne i dve algebarske jednačine sa pet nepoznatih (a, b, C, n, m):

$$\iint_S a x + b y + C dx dy = P \quad (4a)$$

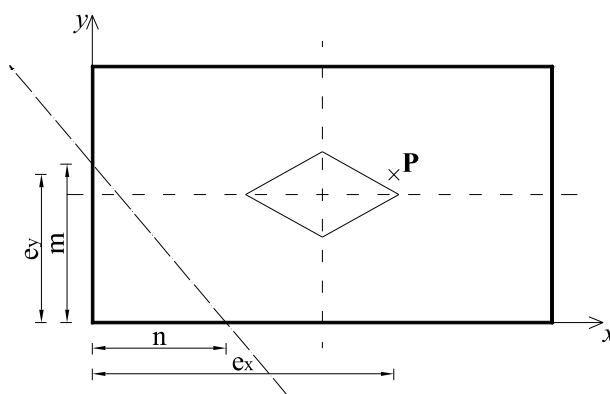
$$\iint_S (a x + b y + C) x dx dy = P e_x \quad (4b)$$

$$\iint_S (a x + b y + C) y \, dx \, dy = P e_y \quad (4c)$$

$$a n + C = 0 \quad b m + C = 0 \quad (4d,e)$$

Наčin решавања једначина, зависи од карактеристичног случаја притиснуте зоне односно положаја оптерећења. За случај 1) решење је итеративно, док је за случај 2) и 3) може добити експлицитно решење. У наставку је укратко приказан алгоритам прорачуна за сва три случаја.

1.1. Neutralna linija сеће две суседне стране – случај 1)



Slika 2. Neutralna linija сеће две суседне стране (три угла су притиснута)

Pošto se za dat položaj opterećenja, ne može unapred odrediti slučaj pritisnute zone, polazi se od pretpostavke da je u pitanju slučaj 1), a nakon dobijenog rešenja se proverava da li je uslov ispunjen ili ne. Na osnovu oznaka na slici 2. jednačina neutralne linije glasi:

$$n(x) = m(1 - n/x) \quad (5)$$

Na osnovu jednačine (5), granice integracije i izraz (4a) glasi:

$$\int_0^L \int_0^B a x + b y + C \, dy \, dx - \int_0^n \int_0^{m-\frac{m}{n}x} a x + b y + C \, dy \, dx = P \quad (6)$$

Na sličan način se mogu prikazati izrazi (4b) i (4c). Nakon integracije, dobija se:

$$\frac{B L^2}{2} a + \frac{B L^2}{2} b - \frac{m n}{6} a n - \frac{m n}{6} b m - \frac{m n}{2} C + B L C = P \quad (7a)$$

$$\frac{B L^3}{3} a + \frac{B^2 L^2}{4} b - \frac{m n^2}{12} a n - \frac{m n^2}{24} b m - \frac{m n^2}{6} C + \frac{B L^2}{2} C = P e_x \quad (7b)$$

$$\frac{B^2 L^2}{4} a + \frac{B^3 L}{3} b - \frac{m^2 n}{24} a n - \frac{m^2 n}{12} b m - \frac{m^2 n}{6} C + \frac{B^2 L}{2} C = P e_y \quad (7c)$$

U izrazima (4d) i (4e), nepoznate veličine su povezane sledećim izrazima.

$$a n = -C \quad b m = -C \quad (8a,b)$$

Uvrštavanjem izraza (8) u izraze (7) i sređivanjem dobija se:

$$\frac{B L^2}{2} a + \frac{B^2 L}{2} b - \left(\frac{m n}{6} + B L \right) C = P \quad (9a)$$

$$\frac{B L^3}{3} a + \frac{B^2 L^2}{4} b - \left(\frac{m n^2}{24} + \frac{B L^2}{2} \right) C = P e_x \quad (9b)$$

$$\frac{B^2 L^2}{4} a + \frac{B^3 L}{3} b - \left(\frac{m^2 n}{24} + \frac{B^2 L}{2} \right) C = P e_y \quad (9c)$$

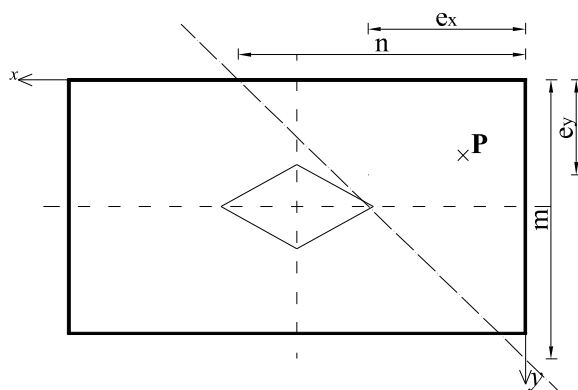
Koeficijenti ispred a i b su određeni dimenzijama temelja. Odsecci n i m se mogu odrediti sledećim iterativnim postupkom:

- 1) Na osnovu izraza (9), izračunaju se koeficijenti ispred nepoznatih a i b ,
- 2) Pretpostave se vrednosti za n i m i izračunaju koeficijenti ispred nepoznate C ,
- 3) Iz izraza (9), koji je poželjno ispisati u matricnom obliku radi lakšeg proračuna, dobijaju se nepoznate a , b i C .
- 4) Na osnovu a , b i C , koristeći izraz (4d) i (4e), odrede se nove vrednosti za n i m ,
- 5) Postupak od koraka 3-4 se ponavlja do željene tačnosti.

Postupak vrlo brzo konvergira. Za početne vrednosti n i m , mogu se uzeti odsecci neutralne linije prema jednačini (1), što iziskuje dodatni proračun, te je bolje pretpostaviti da su odsecci jednaki polovini odgovarajućih strana temelja. Kada su određene nepoznate a , b i C , odnosno m i n , funkcija reaktivnog opterećenja je jednoznačno definisana..

1.2. Neutralna linija seče dve naspramne stranice – slučaj 2a)

Postupak je sličan prethodno opisanom, odnosno polazi se od pretpostavke da je u pitanju slučaj 1), a nakon dobijenog rešenja se proverava da li je uslov ispunjen ili ne.



Slika 3. Neutralna linija seče dve naspramne stranice (dva ugla su pritismuta)

Na osnovu oznaka na slici 3. jednačina neutralne linije glasi:

$$n(y) = n(1 - y/m) \quad (10)$$

Na osnovu jednačine (10), granice integracije i izraz (4a) glasi:

$$\int_0^B \int_0^{n - \frac{n}{m}y} a x + b y + C dx dy = P \quad (11)$$

Na sličan način se mogu prikazati izrazi (4b) i (4c). Nakon integracije, dobija se:

$$B^2 n C (B^2 + 6 m B + 3 m^2) / 6 m^2 = P \quad (12a)$$

$$B n^2 C (-B^3 - 6 B m^2 + 4 m^3 + 4 B^2 m) / 24 m^3 = P e_x \quad (12b)$$

$$B^2 n C (3 B^2 + 6 m^2 - 8 B m) / 24 m^2 = P e_y \quad (12c)$$

U datom slučaju, mogu se koordinate/odsecci neutralne linije m i n eksplicitno izraziti:

$$m = \frac{B (-\sqrt{-2 B^2 + 12 B e_y} - 12 e_y^2 + 6 e_y - 4 B)}{12 e_y - 6 B} \quad (13a)$$

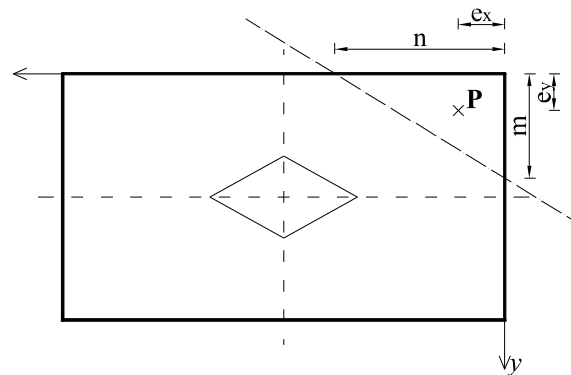
$$n = \frac{4 m (B^2 - 3 B m + 3 m^2)}{-B^3 + 4 B^2 m - 6 B m^2 + 4 m^3} e_x \quad (13b)$$

Na osnovu n i m , i izraza (12c), nepoznata C glasi:

$$C = \frac{24 m^2 P e_y}{B^2 n (3 B^2 + 6 m^2 - 8 B m)} \quad (13c)$$

Na osnovu izraza (4d) i (4e), mogu se odrediti nepoznate a i b , čime je rešen slučaj 2a). Rešenje slučaja 2a), principijeno je rešen i slučaj 2b) kada neutralna linija seče vertikalne stranice, s tim da bi treba zameniti x i y osu i voditi računa o oznakama.

1.3. Neutralna linija seče dve susedne stranice – slučaj 3)



Slika 4. Neutralna linija seče dve susedne stranice (pritisnut je samo jedan ugao)

Kao i u prethodnim slučajevima, polazi se od pretpostavke da važi slučaj 3), pa se nakon proračuna proverava da li je uslov ispunjen ili ne.

Na osnovu oznaka na slici 4. i izraza (10), integral (4a) glasi:

$$\int_0^m \int_0^{n-\frac{n}{m}y} a x + b y + C dx dy = P \quad (14)$$

Na sličan način se mogu prikazati izrazi (4b) i (4c). Nakon integracije, dobija se:

$$m n (3C + b m + a n)/6 = P \quad (15a)$$

$$m n^2 (4C + b m + 2a n)/24 = P e_x \quad (15b)$$

$$m^2 n (4C + 2b m + a n)/24 = P e_y \quad (15c)$$

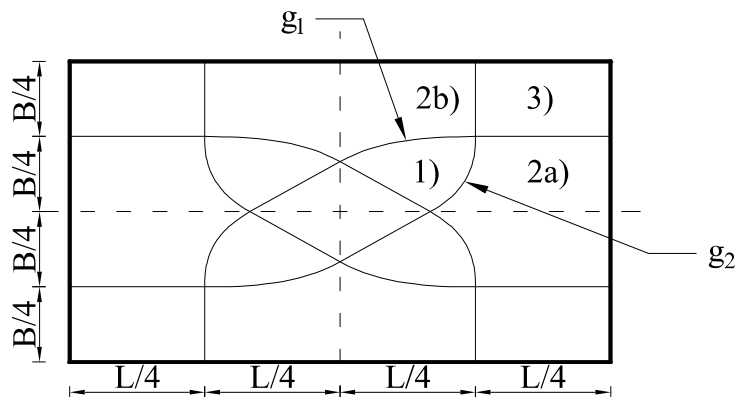
Uvrštavanjem izraza (8) u gornje izraze, dobija se:

$$n = 4e_x \quad m = 4e_y \quad C = 6P/mn \quad (16a,b,c)$$

Na osnovu izraza (4d) i (4e), mogu se odrediti i nepoznate veličine a i b , čime je slučaj 3) praktično rešen.

3. ODREĐIVANJE KARAKTERISTIČNIH ZONA PRESEKA

Pre svega, da bi neutralna linija sekla presek temeljne površine napadna tačka opterećenja treba da se bude izvan jezgra preseka. Zona u kojoj treba da se nalazi napadna tačka rezultujućeg opterećenja kako bi neutralna linija sekla dve susedne stranice – 1) slučaj, ograničena je krivama g_1 i g_2 na slici 5.



Slika 5. Karakteristične zone preseka

Postavljajući odsečak n u granični položaj $n = L$ i $m = 0 \dots B$, mogu se dobiti jednačine granične krive g_1 u parametarskom obliku (Slika 5):

$$x = e_x = \frac{L}{4} \frac{m^2 - 4 B m + 6 B^2}{m^2 - 3 B m + 3 B^2} \quad m = 0 \dots B \quad (17a)$$

$$y = e_y = \frac{1}{4} \frac{m^3 - 6 B^2 m + 8 B^3}{m^2 - 3 B m + 3 B^2} \quad m = 0 \dots B \quad (17b)$$

Analogno, za $m = B$ i $n = 0 \dots L$, jednačina granične krive g_2 u parametarskom obliku:

$$x = e_x = \frac{1}{4} \frac{n^3 - 6 L^2 n + 8 L^3}{n^2 - 3 L n + 3 L^2} \quad n = 0 \dots L \quad (18a)$$

$$y = e_y = \frac{B}{4} \frac{n^2 - 4 L n + 6 L^2}{n^2 - 3 L n + 3 L^2} \quad n = 0 \dots L \quad (18b)$$

Za granični slučaj kada se u izrazu (17) uzme $m = B$ ili u (18) da je $n = L$, neutralna linija dijagonalno polovi temelj kada su koordinate napadne tačke opterećenja $(0.75L, 0.75B)$.

Provera da li se napadna tačka rezultujućeg opterećenja nalazi u zoni kada neutralna linija seče dve susedne strane (slučaj 1) pomoću jednačina (17,18), ili pomoću izraza u opštem obliku $e_y = e_y(e_x)$ je nepraktičan. Stoga je svrsishodno da se krive aproksimiraju

kvadratnim polinomom koji se može dobiti na osnovu poznatih nagiba krive u graničnim uslovima i/ili poznatih tačaka. Pomoću ove funkcije se može odrediti zona u kojoj je napadna tačka opterećenja i izabrati odgovarajuća jednačina za slučaj 1), 2) ili 3). Ako je napadna tačka na granici dve zone, mogu se ravnopravno koristiti obe jednačine.

Da bi se odredila oblast napadne tačke opterećenja za koju neutralna linija seče dve susedne strane temelja, slučaj 1), postavlja se sledeći uslov:

$$n > L \quad \wedge \quad m > B \quad (19)$$

Uvrštavanjem u izraze (16a) i (16b) dobijamo:

$$e_x < L/4 \quad e_y < B/4 \quad (20a,b)$$

Ovim je definisana pravougaona oblast u uglu temelja dimenzija $B/4$ i $L/4$, u kojoj treba da je napadna tačka opterećenja da bi neutralna linija sekla dve susedne strane – 3) slučaj.

4. PRORAČUN SLEGANJA TEMELJA

Na osnovu dobijenog dijagrama kontaktnih napona, uvodeći modul reakcije tla (k), može se izračunati sleganje i obrtanje krutog temelja oko težišnih osa. Na osnovu definicije modula reakcije tla, sleganje kontaktne površine krutog temelja iznosi:

$$w(x, y) = p(x, y)/k \quad (21)$$

Modul reakcije se određuje povratnom analizom sleganja centrično opterećenog temelja na linearno elastičnom poluprostoru. Alternativno, modul reakcije se može odrediti na osnovu centričnog sleganje temelja na uslojenom tlu metodom jednodimenzionalne deformacije (standardni postupak u geomehanici), koristeći parametre deformabilnosti na osnovu edometarskog opita (sitnozrna tla) ili terenskih opita statičke penetracije (peskovi).

5. ZAKLJUČAK

U radu je prikazan postupak za proračun kontaktnih napona ispod ekcentrično opterećenog pravougaonog temelja izvan jezgra preseka temeljne spojnice. Postupak je programiran na računaru (GeoGebra, Excel). Uvođenjem modula reakcije tla, na osnovu opisane metode se može odrediti i sleganje i obrtanje ekscentrično opterećenog temelja van jezgra preseka.

LITERATURA

- [1] Irls, R., Irls F.: Explicit stresses under rectangular footings. *Journal of geotechnical engineering*, **1994.**, Vol. 120.2: Page 444-450.
- [2] Wilson, K. E.: Bearing pressures for rectangular footings with biaxial uplift. *Journal of Bridge Engineering*, **1997.**, Vol. 2.1: Page 27-33.
- [3] Hülzdünker, A.: Maximale Bodenpressung unter rechteckigen Fundamenten bei Belastung mit Momenten in beiden Achsrichtungen. *Bautechnik* 41, **1964.**, Vol. 8/269.
- [4] Nonveiller, E.: *Mehanika tla i temeljenje građevina*, Školska knjiga, **1990.**

CONTACT STRESSES BELOW FOOTING WHEN LOADED POINT LIES OUTSIDE THE KERN

Summary: Tall objects such as industrial chimneys, radio masts and towers, wind turbines and the like, have relatively small weight compared to the horizontal forces generated by the wind and seismicity. In the foundation of these objects, resultant force acting on the footing, calculated for most unfavourable load combination, is no longer within the kern of the footing. Using the flexural formula for obtaining the bearing pressure, tensile stress occurs in the contact surface, which is not physically possible. This paper presents semi-iterative method for excluding the tensile stress in the contact surface, which gives the correct bearing pressure diagram that can be used for the calculation of cross-section stresses and settlement of the footing.

Keywords: Eccentrically loaded footing, kern, bearing pressure