KAKO DEFINISATI TENZOR

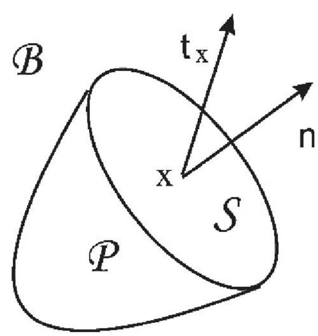
Aleksandar Bakša[1]
UDK: 514.763.5
DOI: 10.14415/zbornikGFS22.003

Rezime: *U literaturi se pojam tenzora uvodi na različite načine. U starijoj literaturi tenzor se definiše kao element linearnog prostora čije se koordinate transformišu na određeni način dok se u savremenoj to radi na druge načine — u nekoordinatnom obliku. Ovde će biti izložena definicija tenzora kao elementa tenzorskog prostora — specijalnog linearnog prostora konstruisanog kao tenzorski proizvod vektorskih prostora.*

Ključne reči: *Vektorski prostor, dualni prostor, tenzorski prostor.*

1. MOTIV

Motiv za ovaj rad je dobro poznata definicija napona u mehanici. Razmatra se deo $\mathscr{P}$ tela $\mathscr{B}$ kome je drugi deo $\mathscr{B}\backslash\mathscr{P}$ imaginarno odstranjen. Na površini preseka S, sa



spoljašnom normalom $\mathbf{n}$, postoji polje sila $\mathbf{t}$ koje izražava dejstvo odstranjenog dela tela na $\mathscr{P}$.

Napon se definiše na osnovu sledeća dva Košijeva iskaza.

Košijev postulat. Sila $\mathbf{t}_x$ u tački $x \in S$ zavisi samo od x i normale $\mathbf{n}$ na površ S u toj tački; $\mathbf{t}_x = \mathbf{t}(x, \mathbf{n})$.

Osnovna Košijeva teorema. Ako je $x \mapsto \mathbf{t}(x, \mathbf{n})$ neprekidno vektorsko polje postoji takvo tenzorsko polje $x \mapsto \mathbf{T}(x)$ da je

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(x)\mathbf{n}.$$

$\mathbf{t}(x, \mathbf{n})$ - Košijev vektor napona, $\mathbf{T}(x)$ -Košijev tenzor napona.

[1]Prof.dr Aleksandar Bakša, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 11000 Beograd

Zapitajmo se sada šta je taj matematički objekat koji se zove tenzor; kako se definiše i koja su mu svojstva.

Sam Koši je ovu teoremu interpretirao kao stav da naponi na tri medjusobno upravne ravni koje sadrže tačku x potpuno odredjuju napon na proizvoljnoj ravni u okolini te tačke. To se može izraziti na sledeći način

$$\mathbf{t}(x,\mathbf{n}) = \langle \mathbf{T}(x), \sum n_i \mathbf{g}^i \rangle = \sum n_i \langle \mathbf{T}(x), \mathbf{g}^i \rangle = \sum n_i \mathbf{t}_i(x)$$

gde je $\{\mathbf{g}_i\}$ koordinatna baza nekog (u opštem slučaju krivolinijskog) koordinatnog sistema u tački x i $\mathbf{t}_i(x) = \langle \mathbf{T}(x), \mathbf{g}^i \rangle$ vektor napona na koordinatnoj površi čija je normala $\mathbf{g}^i$. Uglasta zagrada označava linearnu operaciju.

Odavde se može zaključiti da tenzor $\mathbf{T}(x)$ vrši linearno preslikavanje vektora

$$\mathbf{T} : \mathbf{g}^i \to \mathbf{t}_i$$

odnosno, vektorskog prostora kome pripada normala $\mathbf{n}$ u vektorski prostor u kome je $\mathbf{t}_i$.

Analizirajmo, najpre, prirodu vektora $\mathbf{n}$. Pretpostavimo da je površ S zadana glatkom (u smislu: neprekidno diferencijabilnom) funkcijom

$$f : (x^1, x^2, x^3) \to f(x^1, x^2, x^3).$$

Pošto je normala $\mathbf{n}$ normirani gradijent funkcije f ispitajmo vektorsku prirodu gradijenta. To je pogodno uraditi na izvodu funkcije $f : R^3 \to R$ u pravcu zadanog vektora $\mathbf{v}$:

$$df(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{v}^i = \langle \mathrm{grad} f, \mathbf{v} \rangle \in R.$$

Za fiksirano x ova jednakost definiše linearno preslikavanje tangentnog vektorskog prostora V u tački x, u skup realnih brojeva:

$$\langle \omega, \cdot \rangle : V \mapsto R$$

gde smo obeležili $\mathrm{grad} f(x) = \omega$.

2. DUALNI VEKTORSKI PROSTOR

Operator ω je linearan ako je

$$\omega(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_1 \omega(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 \omega(\mathbf{v}_2).$$

Kada se u skup svih linearnih operatora uvedu operacije sabiranja

$$(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{v}) = \omega_1(\mathbf{v}) + \omega_2(\mathbf{v})$$

i množenja skalarom

$$\lambda \omega(\mathbf{v}) = \lambda \omega(\mathbf{v})$$

dobija se linearni prostor koji se zove *dualan* prostoru V i obeležava sa V^*. Elementi prostora V^* zovu se *kovektori*. Za $\omega \in V^*$ i $\mathbf{v} \in V$ imamo

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega(\mathrm{v}^i \mathbf{g}_i) = \mathrm{v}^i \omega(\mathbf{g_i})$$

(podrazumeva se sabiranje po ponovljenim indeksima od kojih je jedan gornji a drugi donji). Izaberimo bazu $\{\mathbf{g^i}\}$ dualnog prostora V^* tako da $\omega_i = \omega(\mathbf{g_i})$ budu koordinate kovektora ω:

$$\omega = \omega_i \mathbf{g}^i = \omega(\mathbf{g_i})\mathbf{g}^i.$$

Baza prostora V^* može se izabrati proizvoljno a ovako izabrana zove se dualna (u odnosu na $\{\mathbf{g_i}\}$). Sada možemo pisati

$$\omega_i \mathrm{v}^i = \omega(\mathbf{v}) = \omega_i \mathbf{g}^i(\mathrm{v}^j \mathbf{g}_j) = \omega_i \mathrm{v}^j \mathbf{g}^i(\mathbf{g}_j)$$

odakle sledi $\mathbf{g}^i(\mathbf{g}_j) = \delta^i_j$. Ako se fiksira $\mathbf{v} \in V$ izraz $\omega(\mathbf{v}) = \omega_i \mathrm{v}^i$ definiše linearno preslikavanje

$$\mathbf{v} : V^* \to R, \ \mathbf{v} : \omega \to \mathbf{v}(\omega) = \mathrm{v}^i \omega_i.$$

S obzirom na ovu simetriju može se koristiti ma koji od sledećih načina pisanja: $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}^* \in V^*$,

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\mathbf{v}^*) = \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}^* \rangle = \mathrm{v}^i \mathrm{v}_i.$$

Prema tome, gradijent skalarne funkcije je kovektor. Da vidimo kako se transformišu njegove koordinate pri transformaciji koordinata tačke.

Uvodjenjem novih dopuštenih koordinata $(q^1, q^2, q^3) = q$ smenom

$$x^i = x^i(q^1, q^2, q^3)$$

jednačina površi S je

$$f(x^1(q), x^2(q), x^3(q)) = 0.$$

Gradijent funkcije f izražen linearnim (Dekartovim) koordinatama je

$$\mathrm{grad} f(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{e}_i = \sum \xi_i \mathbf{e}_i.$$

U proizvoljnim generalisanim koordinatama je

$$\text{grad f(q)} = \sum \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \mathbf{g}^\alpha = \eta_\alpha \mathbf{g}^\alpha = \eta_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{e}_i.$$

Prema tome

$$\xi_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \eta_\alpha.$$

Koordinate tangentnog vektora (brzine) se transformišu na sledeći način

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(x)}{dt} = \dot{x}\mathbf{e}_i = \mathrm{v}^i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}(x(q))}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \mathbf{e}_i = \mathrm{u}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\mathbf{e}_i$$

odakle sledi

$$\mathrm{v}^i = \mathbf{u}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}.$$

Vektori čije se koordinate, pri zameni lokalnih koordinata, transformišu kao koordinate gradijenta, u tenzorskom računu se zovu *kovarijantni* vektori a oni, čije se koordinate transformišu kao koordinate tangentnog vektora - *kontravarijantni* vektori.

3. TENZORI DRUGOG REDA

Pošto smo odgonetnuli da je normala kovarijantni vektor ili kovektor, vratimo se Košijevom tenzoru. Vidimo da tenzor $\mathbf{T}$ možemo tretirati kao operator koji kovarijantni vektor $\mathbf{g}^i$ preslikava u kontravarijantni vektor $\mathbf{t}_i$. Sada se i taj vektor može dalje spariti sa kovektorom $\mathbf{g}^j$ pri čemu se dobija skalarna veličina

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{g}^i\rangle, \mathbf{g}^j\rangle = \mathbf{T}^{ij}.$$

Zapitajmo se šta predstavljaju veličine T^{ij} dobijene preslikavanjem para kovektora u skup realnih brojeva. Ako indeksi i, j uzimaju vrednosti 1,2,3 njih ima devet i mogle bi biti koordinate elementa linearnog devet-dimenzionog prostora. Pokazuje se da takav prostor postoji i mi ćemo ga sada konstruisati.

Neka je $V_1 \times V_2$ direktni proizvod vektorskih prostora nad poljem realnih brojeva. Formirajmo uredjene parove

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2, \; \mathbf{v}_i \in V_i.$$

U skup svih ovakvih parova uvedimo strukturu linearnog prostora (definisanjem sabiranja i množenja skalarom na uobičajeni način). Obeležimo taj prostor sa U. Tipičan element prostora U je

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{z}_k, \; r < \propto, \; \mathbf{z} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \; \lambda_k \in R.$$

U prostoru U definišimo binarnu relaciju ρ na sledeći način:

a) Ako je $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_1''$ onda se

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \text{ može zameniti sa } (\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1'', \mathbf{v}_2).$$

Isto važi i za $\mathbf{v}_2$.

b) Ako je $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_1'$ onda se

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \text{ može zameniti sa } \lambda(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2).$$

Isto važi i za $\mathbf{v}_2$.

Elementi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ su u relaciji ρ ako se konačnim brojem zamena a) i b) mogu dovesti na isti oblik. Pokazuje se da je relacija ρ ekvivalencija.

Faktor-prostor $\tilde{U} = U/\rho$ (prostora U u odnosu na ekvivalenciju ρ) zove se *tenzorski proizvod* prostora V_1 i V_2 i obeležava sa $V_1 \otimes V_2$. Elementi

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \in V_1 \otimes V_2$$

zovu se *kontravarijantni tenzori drugog reda* ili tenzori tipa $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ako se vektori $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ izraze preko koordinata, tenzorski proizvod je

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 = (\mathrm{v}_1^i \mathbf{g}_i) \otimes (\mathrm{v}_2^j \mathbf{g}_j) = \mathrm{v}_1^i \mathrm{v}_2^j (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j)$$

pri čemu smo koristili zamene a) i b).

U slučaju kada su vektorski prostori V_ν, $\nu = 1, 2$ trodimenzioni, tenzora $(\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j)$ ima 3^2 i pošto su linearno nezavisni mogu se uzeti za bazu prostora $V_1 \otimes V_2$. S druge strane, za koeficijente se može uzeti neki sistem od 9 funkcija (ako se radi o tenzorskom polju) T^{ij} za koje ćemo videti da moraju zadovoljavati neke uslove pri transformaciji koordinata.

Prema tome, Košijev tenzor je kontravarijantni tenzor drugog reda i u odnosu na bazu $\{\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j\}$ izražava se u obliku

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

Opšti oblik kontravarijantnog tenzora drugog reda na tenzorskom proizvodu n-dimenzionih prostora $V^n \otimes V^n$ je

$$\mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j, \ i, j = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

gde su T^{ij} njegove koordinate u odnosu na bazu $\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$ koje ne moraju biti proizvod nekih drugih koordinata. Očigledno je $\dim(V^n \otimes V^n) = n^2$

Pri zameni koordinata $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$ vektori ostaju invarijantni

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}^i \mathbf{e}_i = \mathrm{v}^\alpha \mathbf{g}_\alpha = \mathrm{v}^i \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{g}_\alpha$$

odakle sledi

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{g}_\alpha.$$

Kada se ova zamena izvrši u $(*)$ dobija se

$$\mathbf{T} = t^{ij} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta.$$

Prema tome, koordinate kontravarijantnog tenzora drugog reda transformišu se po zakonu

$$t^{\alpha\beta} = t^{ij} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}$$

U tenzorskom računu tenzori se obično zapisuju samo svojim koordinatama; tj. pišu se u obliku

$$\mathbf{T} = (t^{ij}),\ i, j = 1, \dots, n$$

pri čemu se u operacijama sa njima mora voditi računa da su to koordinate elemenata linearnog prostora.

Na isti način se definiše i tenzorski proizvod vektorskog prostora V i njemu dualnog V^* kao i izmedju dva dualna prostora:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^* \in V \otimes V^*,\ \mathbf{v}_1^* \otimes \mathbf{v}_2^* \in V_1^* \otimes V_2^*.$$

Elementi prostora $V \otimes V^*$ su tenzori tipa $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i zovu se *mešoviti tenzori*; u ovom slučaju jednom kontravarijantni i jednom kovarijantni. Zapisan u koordinatnom obliku

$$\mathbf{T} = t^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \text{ ili samo } \mathbf{T} = (t^i_j).$$

Njihove koordinate se transformišu po zakonu

$$t^\alpha_\beta = t^i_j \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y_\beta}$$

u šta se možemo uveriti na način analogan prethodnom uzimajući u obzir da se baza kovarijantnih vektora transformiše na naredni način

$$\mathbf{g}^j = \mathbf{g}^\beta \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}.$$

Elementi prostora $V^* \otimes V^*$ su tenzori tipa $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ i zovu se *kovarijantni tenzori drugog reda*; u koordinatnom zapisu

$$\mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{e}^j \text{ ili samo } \mathbf{T} = (t_{ij}).$$

Koordinate ovog tenzora transformišu se po pravilu

$$t_{\alpha\beta} = t_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}.$$

4. TENZOR OPŠTEG TIPA

Tenzor opšteg tipa, p puta kontravarijantan i q puta kovarijantan definisaćemo uopštavanjem prethodne definicije. Neka su V_i n-dimenzioni vektorski prostori i V_i^* njima konjugovani prostori svi nad poljem realnih brojeva (pretpostavka da su svi iste dimenzije nije neophodna ali je mi uvodimo radi jednostavnijeg pisanja). Konstruišimo

linearni prostor U čiji su elementi
$\mathbf{z} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_q^*)$ pri čemu su $\mathbf{v}_i \in V_i$, $\mathbf{v}_i^* \in V^*$. Kazaćemo da su dva elementa u relaciji ρ ako se svode jedan na drugi primenom sledećih operacija

a) element $(\mathbf{v}_1, \ldots, \acute{\mathbf{v}}_i + \grave{\mathbf{v}}_i, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_q^*)$ može biti zamenjen elementom

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \acute{\mathbf{v}}_i, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_q^*) + (\mathbf{v}_1, \ldots, \grave{\mathbf{v}}_i, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_q^*)$$

b) element $(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_q^*)$ može biti zamenjen elementom

$$\lambda(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_q^*).$$

Kazaćemo da su dva elementa ekvivalentna ($\sim$) ako se konačnim brojem ovakvih zamena mogu svesti na isti oblik (da je ovo zaista ekvivalencija nećemo dokazivati).

Tenzorski proizvod prostora $V_1, \ldots, V_1^*, \ldots, V_p, \ldots, V_q^*$ je faktor prostor prostora U u odnosu ne ekvivalenciju $\sim$:

$$U/_{\sim} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p \otimes \cdots \otimes V_q^*.$$

Njegovi elementi se obeležavaju sa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_q^*.$$

Linearni prostor na kome je definisan tenzorski proizvod p vektorskih i q njima konjugovanih (kovektorskih) prostora zove se *tenzorski prostor tipa* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Obeležavaćemo ga sa T_q^p. Ako je $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ baza prostora V i $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1,\ldots,n}$ baza prostora V^*, tenzori

$$\mathbf{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{i_p} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{j_q}$$

su linearno nezavisni i pošto je njihov broj n^{p+q} jednak dimenziji prostora T_q^p, mogu se uzeti za bazu tog prostora. Razume se da bi i svaki drugi sistem od n^{p+q} linearno nezavisnih tenzorskih polja u svakoj tački prostora odredjivao tenzorsku bazu ali ova, koju indukuju baze vektorskih prostora je, na neki način, privilegovana. Prema tome, tenzor $\mathbf{T} \in T_q^P$ može se zapisati u koordinatnom obliku na sledeći način

$$\mathbf{T} = t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{j_1} \cdots \otimes \mathbf{g}_{i_p} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{j_q}.$$

U računanju sa tenzorima praktičnije je izražavati ih samo koordinatama:

$$\mathbf{T} = \left(t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \right).$$

Pri transformaciji koordinata

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots y^n(x^1, \ldots, x^n))$$

tenzor $t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ transformiše se na sledeći način

$$t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{\beta_q}}.$$

Primetimo da linearna preslikavanja

$$\ell_k : V_k \to \tilde{V}_k,\ \ell_k^* : V_k^* \to \tilde{V}_k^*$$

indukuju polilinearno preslikavanje

$$\wp : (\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_q^*) \to (\ell_1 \mathbf{v}_1) \otimes \cdots \otimes (\ell_q \mathbf{v}_q^*)$$

i istovremeno definišu linearno preslikavanje

$$\ell_1 \otimes \cdots \otimes \ell_q^* : V_1 \otimes \cdots \otimes V_q^* \to \tilde{V}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{V}_q^*.$$

Tenzorski proizvod vektorskih prostora proširuje se na tenzorski proizvod tenzorskih prostora.

Tenzorski proizvod tenzora $\mathbf{T} \in T_q^p$ i $\mathbf{L} \in T_s^r$ je tenzor $\mathbf{S} \in T_{q+s}^{p+r}$ koji se dobija po obrascu

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} =$$

$$= t_{j_1 \dots, j_q}^{i_1 \dots, i_p} l_{u_1 \dots u_s}^{k_1 \dots k_r} \mathbf{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{g}_{i_p} \otimes \mathbf{g}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}_{k_r} \otimes \mathbf{g}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{g}^{j_q} \otimes \mathbf{g}^{u_1} \otimes \cdots \ominus \mathbf{g}^{u_s}$$

ili samo u koordinatama

$$S_{j_1 \cdots j_{q+s}}^{i_1 \cdots i_{p+r}} = t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} l_{j_{q+1} \cdots j_{q-s}}^{i_{p+1} \cdots i_{p+r}}.$$

Tenzorski proizvod je asocijativan i distributivan u odnosu na sabiranje.

Na primer, neka su dati tenzori $\mathbf{T} = t_k^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k$ i $\mathbf{L} = l_{np}^m \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}^p$. Njihov tenzorski proizvod je tenzor

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{L} = t_k^{ij} l_{np}^m \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}^p. \qquad (**)$$

Navodimo još jednu operaciju sa tenzorima koja tenzor tipa T_q^p, $p > 1$, $q > 1$ transformiše u tenzor tipa T_{q-1}^{p-1}. Izaberimo dva indeksa: kontravarijantni $1 \leq \alpha \leq p$ i kovarijantni $1 \leq \beta \leq q$ i definišimo linearno preslikavanje

$$\chi : \mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_\alpha \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_\beta \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_q \to$$

$$\mathbf{u}_\beta(\mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \check{\mathbf{v}}_\alpha \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \otimes \cdots \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \check{\mathbf{u}}_\beta \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_q$$

($\check{\mathbf{v}}_\alpha$ i $\check{\mathbf{u}}_\beta$ su isključeni). Ova operacija se zove *sažimanje indeksa*. U koordinatnom obliku je

$$t_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = t_{j_1 \dots j_\beta\ 1}^{i_1 \dots i_\alpha\ 1} {}_{k j_{\beta+1} \dots j_q}^{k i_{\alpha+1} \dots i_p}.$$

Na primer, u proizvodu $(**)$ se može izvršiti izjednačavanje jednog kovarijantnog i jednog kontravarijantnog indeksa, na primer $k = m$; dobija se tenzor za 2 nižeg reda koji se obeležava tačkom izmedju njih

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = t_k^{ij} l_{np}^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}^p.$$

Sažimanje se može izvesti i po dva indeksa istovremeno i to se obeležava sa dvotačkom: na primer

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = T^{ij} S_{ij}.$$

Navodimo još jedan tip tenzora koji ima široku primenu u mehanici. Primer takvog tenzora je, dobro nam poznat gradijent deformacije. Neka je $\mathscr{B}$ neka konfiguracija tela B u trodimenzionom euklidskom prostoru $\mathscr{E}$ i $\Phi : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$, $\varphi \in C^r, r > 1$ kretanje (deformacija). Ako su $\{X^A\}$ lokalne koordinate na $\mathscr{B}$ a $\{x^a\}$ lokalne koordinate na $\mathscr{E}$, biće

$$\Phi^a(X^1, X^2, X^3) = x^a, \ a = 1, 2, 3.$$

Gradijent deformacije je tangentno preslikavanje

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \Phi^a}{\partial X^A}(X) \mathbf{g}_a \otimes \mathbf{G}^A$$

gde su $\{\mathbf{G^A}\}_\mathbf{X}$ i $\{\mathbf{g^a}\}_\mathbf{x}$ lokalne baze na $\mathscr{B}$, odnosno, $\mathscr{E}$ u naznačenim tačkama. Primetićemo da je tenzor $\mathbf{F}$ izražen u koordinatama X^A ali u odnosu na bazu koju čine bazni vektori dva tangentna prostora. Takvi tenzori zovu se *dvotačkasti.*

Dvotačkasti tenzor tipa$\begin{pmatrix} p \, r \\ q \, s \end{pmatrix}$ u tački $X \in \mathscr{B}$ je $t^{a_1 \ldots a_p A_{p+1} \ldots A_{p+r}}_{b_1 \ldots b_q B_{q+1} \ldots B_{q+s}}$. Raspored indeksa može biti i drugačiji, na primer $t^a_{Ab} \mathbf{g}_a \otimes \mathbf{G}^A \otimes \mathbf{g}^b$.

LITERATURA

[1] C. Trusdel: Prvi kurs racionalne mehanike kontinuuma, (na ruskom), "MIR", **1975.**

[2] J. Jarić: Mehanika kontinuuma, Građevinska knjiga, **1988**.

[3] T.P. Anđelić: Tenzorski račun, Naučna knjiga, (2. izdanje), **1967**.

[4] S. Sternberg: Lekcije iz diferencijalne geometrije (na ruskom), "MIR", **1970**.

[5] Burbaki: Savremena matematika, (na ruskom), "MIR", **1966**.

[6] J.E. Marsden and T.J R. Uhghes: Mathematical foundations of elasticity, **1983**.

HOW TO DEFINE A TENSOR

Summary: *This work proposes a way to define tensors, which is naturally imposed by the application of tensor calculation in mechanics. Taking as the staring point the problem of determining voltage, the voltage tensor is defined as a linear operator that transforms the covariant vector into a contravariant vector. The general type tensor is defined as the element of the tensor space — linear space, in which the tensor product is defined. From this definition it is possible to deduce the transformation method for tensor coordinates.*

Keywords: *Vector space, dual space, tensor space.*