

# ANALIZA UTICAJA DUŽINE POLIEDARSKE LJUSKE NA PRESEČNE SILE I POMERANJA

Danica Goleš<sup>1</sup>,  
Dragan Milašinović<sup>2</sup>

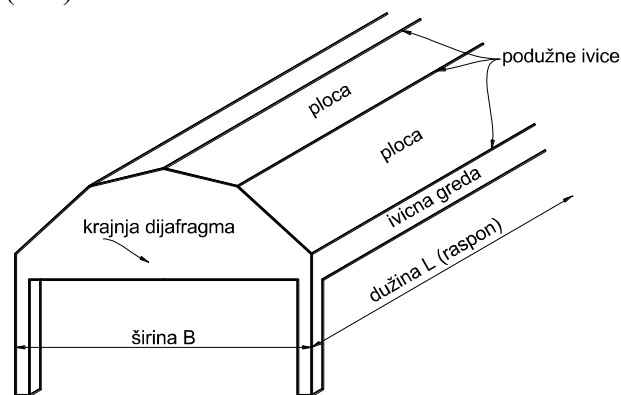
UDK: 624.074.43:624.042

**Rezime:** *Primenom metoda konačnih traka sprovedena je linearno elastična analiza armiranobetonske prizmatične poliedarske ljuske odabranog poprečnog preseka, za različite raspone. U radu je dat prikaz i komentar dobijenih dijagrama pomeranja, obrtanja, presečnih sila, momenata i napona. Analizom oblika ovih dijagrama za različite raspone, zaključuje se da se granica između "duge" i "kratke" poliedarske ljuske odabranog poprečnog preseka nalazi između raspona  $L=10m$  i  $L=20m$ , kojima odgovara odnos dužina/širina ljuske između  $L/B=0.86$  i  $L/B=1.72$ , tj. odnos raspona pojedinih ploča poliedra između  $l_y/l_x=3.19$  i  $l_y/l_x=6.37$ .*

**Ključne reči:** *Poliedarske ljuske, metod konačnih traka, dužina ljuske, armirani beton*

## 1. UVOD

Prizmatične poliedarske ljuske su prostorne noseće konstrukcije sastavljene od tankih ravnih ploča pravougaone osnove, koje su duž ivica međusobno monolitno vezane pod određenim uglom (sl. 1).



Slika 1. Elementi konstrukcije prizmatične poliedarske ljuske

<sup>1</sup> Asistent dr Danica Goleš, dipl inž građ., Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554-300, e-mail: [dgoles@gf.uns.ac.rs](mailto:dgoles@gf.uns.ac.rs)

<sup>2</sup> Prof. dr Dragan D. Milašinović, dipl inž građ., Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554-300, e-mail: [ddmil@gf.uns.ac.rs](mailto:ddmil@gf.uns.ac.rs)

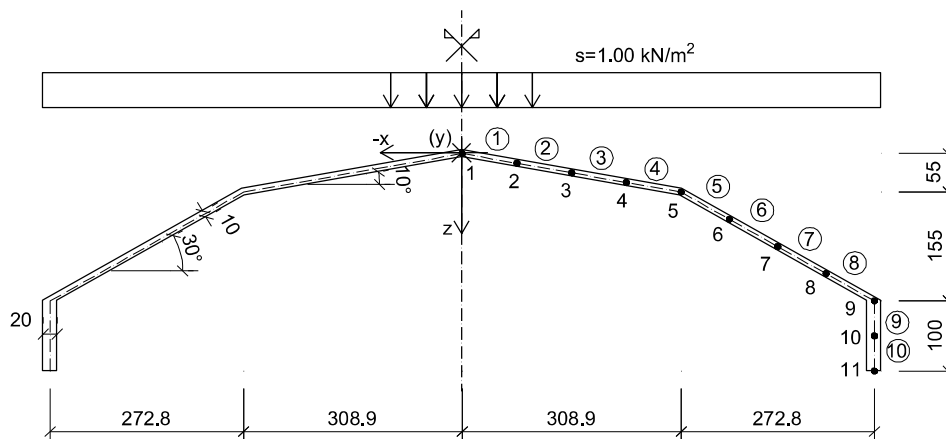
Usled proizvoljnog opterećenja, svaka ploča poliedarske ljuske trpi naprezanja u svojoj ravni (kao pločasti nosač) i upravno na nju (kao ploča). Interakcija ova dva stanja naprezanja se kod ovih konstrukcija ne može zanemariti.

Složenost problema analize prizmatične poliedarske ljuske nameće primenu približnih metoda proračuna. Izbor adekvatnog metoda u velikoj meri zavisi od geometrijskih karakteristika ljuske. Odnos dužine i širine konstrukcije kao celine, ali i pojedinačnih ploča sistema, utiče na mogućnost zanemarenja pojedinih presečnih uticaja pri ispisivanju uslova ravnoteže, čime se postupak analize pojednostavljuje, bez značajnijeg uticaja na tačnost rezultata. Pretpostavka o malim pomeranjima je kod "kratkih" ljuski često opravdana, dok se proračun "dugih" ljuski mora sprovesti uzimajući u obzir velike ugibe. Sve ovo ukazuje na potrebu određivanja što jasnije granice između "dugih" i "kratkih" poliedarskih ljuski. Pri tome treba koristiti metode analize čija primenljivost ne zavisi od odnosa raspona i širine ljuske, kao što su numerički metodi - metod konačnih elemenata (MKE) i metod konačnih traka (MKT).

U radu [1] je dat istorijski prikaz razvoja metoda analize poliedarskih ljuski. Na osnovu uporedne analize različitih metoda (klasičnih i numeričkih), prvi autor ovog rada zaključuje da se, zbog složenosti problema analize ovih konstrukcija, nameće upotreba približnih, numeričkih metoda. Imajući u vidu da se u MKT javlja znatno manji broj jednačina, matrica i ulazno-izlaznih podataka nego u MKE, što ovaj metod čini manje zahtevnim u pogledu kapaciteta računara i vremena potrebnog za izvršenje, a često i lakšim za primenu, za analizu ove specijalne klase konstrukcija, za koje se može smatrati da su im geometrijske karakteristike i svojstva materijala konstantni duž glavnog pravca, u [1] se preporučuje primena MKT. Primenom ovog postupka izvršena je linearno elastična analiza u slučaju malih pomeranja armiranobetonske prizmatične poliedarske ljuske odabranog poprečnog preseka, za različite raspone (dužine). U ovom radu su prikazani i komentarisani rezultati analize.

## 2. OPIS PREDMETA I METODA ANALIZE

U [1] je analizirana armiranobetonska prizmatična poliedarska ljuska poprečnog preseka prema slici 2.



Slika 2. Elementi konstrukcije prizmatične poliedarske ljuske

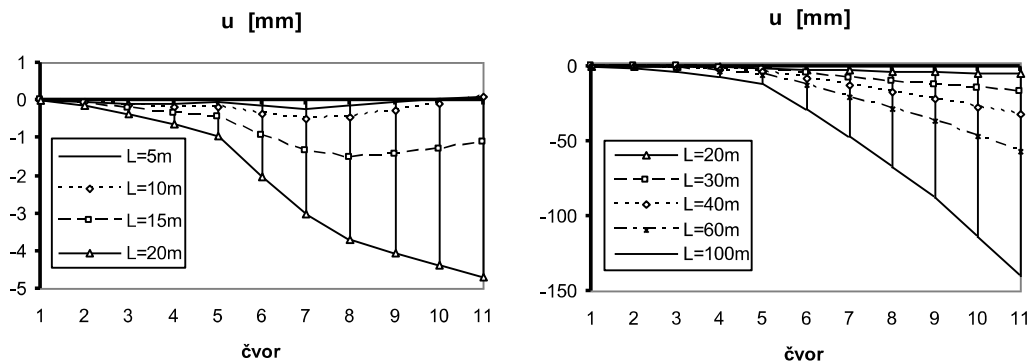
Konstrukcija je opterećena stalnim opterećenjem: sopstvenom težinom  $g$  i težinom obloge nagnutih ploča, intenziteta  $\Delta g=0.5\text{kN/m}^2$ , kao i opterećenjem snegom, intenziteta  $s=1.0\text{kN/m}^2$ . Poliedarska ljuska se na svojim krajevima ( $y=0$  i  $y=L$ ) oslanja na armiranobetonске dijafragme, krute u svojoj ravni. Konstrukcija je od betona MB 45 (C35/45), sa armaturom RA 400/500-2. Raspon ljuske je variran od  $L=5\text{m}$ , kome odgovara odnos dužina/širina pojedinih ploča poliedra  $l_y/l_x=1.59$ , do  $L=100\text{m}$  ( $l_y/l_x=31.87$ ). Pri tome izbor raspona većeg od  $L=30\text{m}$ , u slučaju armiranobetonске poliedarske ljuske poprečnog preseka prema slici 2, ima samo teorijski značaj, budući da presečne sile i pomeranja ovde dostižu praktično neprihvatljive veličine.

Analiza konstrukcije je sprovedena primenom računarskog programa MKTE1, autora D. D. Milašinića [3], za sto članova reda. Iskorišćena je simetrija geometrije, uslova oslanjanja i opterećenja, pa je numerička analiza sprovedena samo za polovinu nosača. Mreža konačnih traka (ukupno 10), njihove oznake i oznake čvornih linija, kao i orijentacija globalnog koordinatnog sistema, prikazane su na slici 2. Trake su na krajevima slobodno oslonjene, a svaka ima po osam stepeni slobode kretanja. Usvojene su sledeće elastične karakteristike materijala: modul elastičnosti  $E=34\text{GPa}$  i Poisson-ov koeficijent  $\nu=0$ .

Analizom rezultata proračuna za mreže konačnih traka različite gustine, uočeno je da se izborom mreže prema slici 2 postiže željena tačnost, a da se izlazni podaci dobijaju u zadovoljavajućem broju tačaka. Ovo potvrđuje i uporedna analiza iste ljuske primenom komercijalnog računarskog programa Tower 6, zasnovanog na metodu konačnih elemenata, koju je za potrebe svoje doktorske disertacije [1] prvi autor ovog rada sprovedla za različite gustine mreže konačnih elemenata. Presečni uticaji i pomeranja dobijeni na ovaj način gotovo su identični sa uticajima dobijenim primenom metoda konačnih traka za linearno elastičnu analizu u slučaju malih pomeranja.

### 3. REZULTATI ANALIZE

Na slikama 3 do 13 dat je uporedni prikaz dijagrama pomeranja, obrtanja, presečnih sila, momenata i napona, usled ukupnog eksploatacionog opterećenja, za različite raspone ljuske poprečnog preseka prema slici 2.



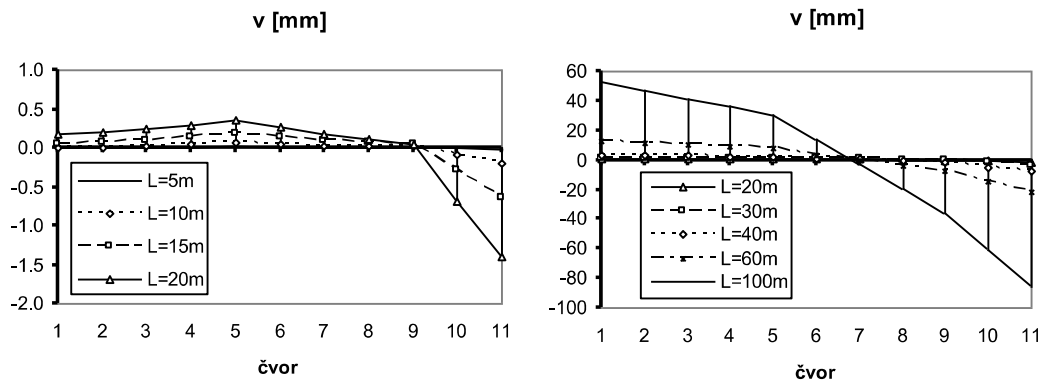
Slika 3. Dijagrami pomeranja u pravcu globalne "x" ose tačakau sredini raspona

Analizom dijagrama pomeranja u pravcu globalne  $x$  ose (sl. 3) može se uočiti da se donja linija ivične grede (čvorna linija 11) u slučaju raspona  $L=5\text{m}$  i  $L=10\text{m}$  pomera ka spolja, dok je za sve ostale raspone njeno pomeranje ka unutra (ka osi simetrije poprečnog preseka). Zaključno sa rasponom  $L=20\text{m}$  dijagram između čvornih linija 5 i 9 ima paraboličan oblik, dok je kod većih raspona on gotovo linearan.

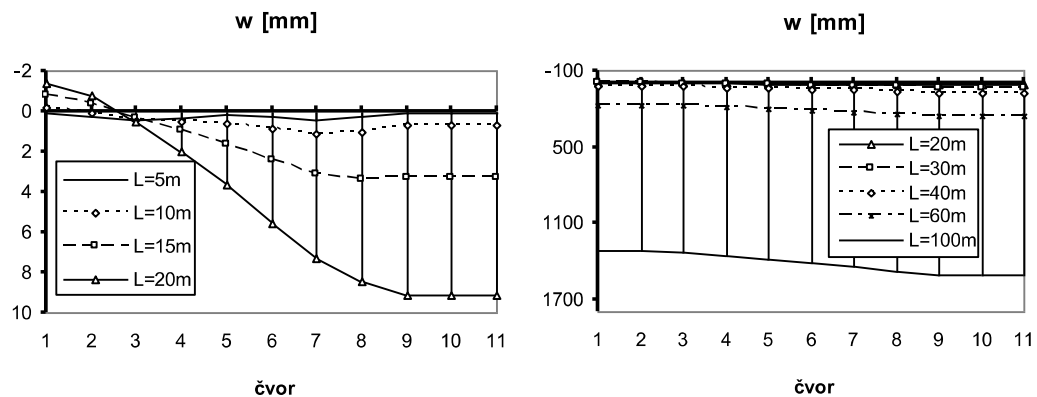
Promena oblika dijagrama pomeranja u pravcu podužne ose ljsuke (sl. 4) je kod raspona  $L=5\text{m}$  izrazito krivolinijska, dok je za sve ostale raspone ova promena gotovo pravolinijska po širini pojedinih ploča poliedra.

Vertikalna pomeranja tačaka (sl. 5) u osi simetrije poprečnog preseka (čvorna linija 1) kod ljsuki raspona  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$  su negativna (naviše). Kod svih ostalih raspona vertikalna pomeranja svih tačaka poprečnog preseka su pozitivna. Sve tačke poprečnog preseka ljsuke raspona  $L=100\text{m}$  imaju gotovo jednaka vertikalna pomeranja.

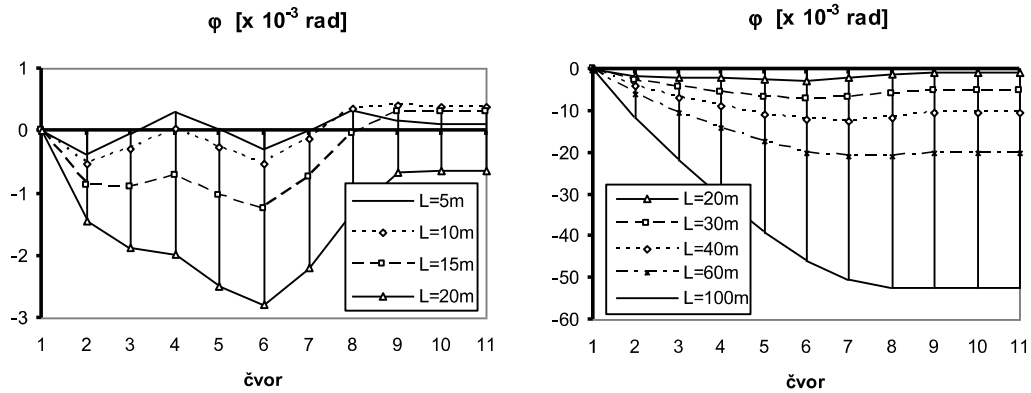
Ugao obrtanja oko podužne ose ljsuke (sl. 6) ima promenljiv predznak duž poprečnog preseka ljsuki raspona  $L=5\text{m}$  i  $L=10\text{m}$ . Za sve ostale raspone obrtanja svih tačaka su negativna.



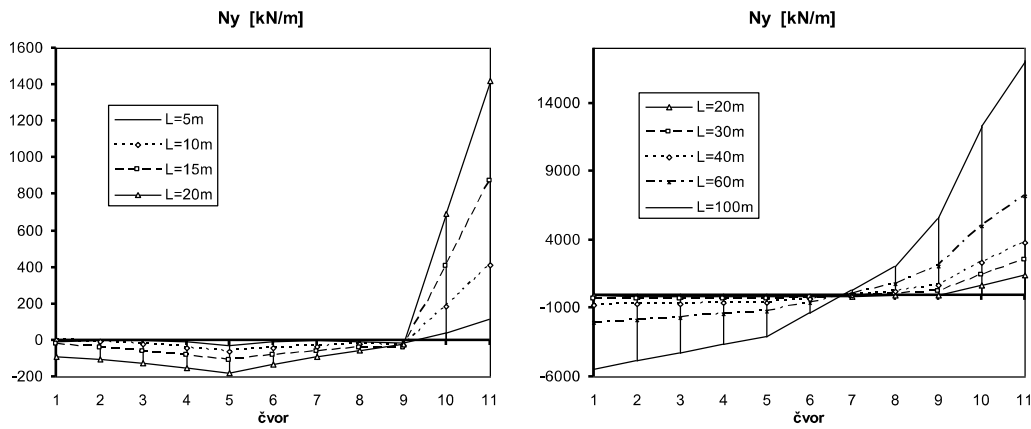
Slika 4. Dijagrami pomeranja u pravcu globalne "y" ose tačaka iznad oslonaca



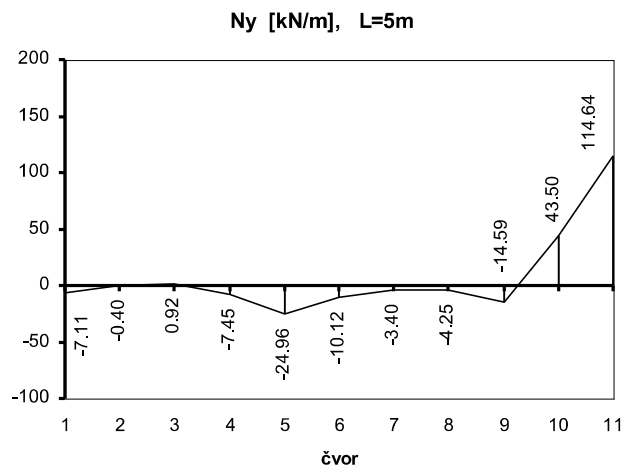
Slika 5. Dijagrami vertikalnih pomeranja tačaka u sredini raspona



Slika 6. Dijagrami obrtanja oko "y" osetačaka u sredini raspona



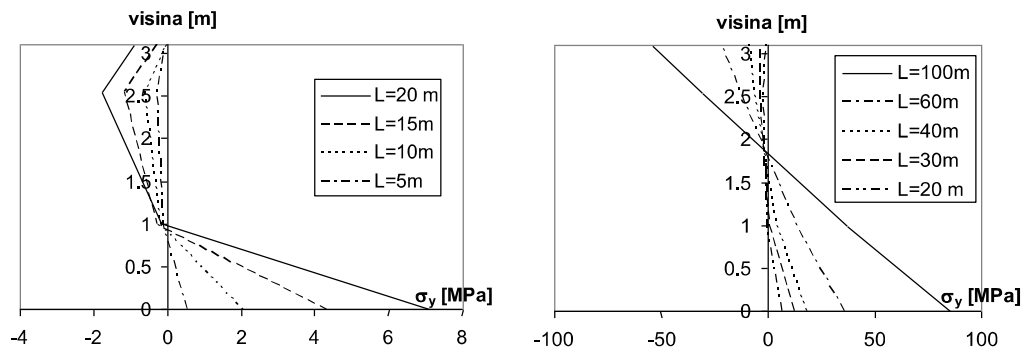
Slika 7. Dijagrami podužne normalne sile  $N_y$  u preseku na sredini raspona



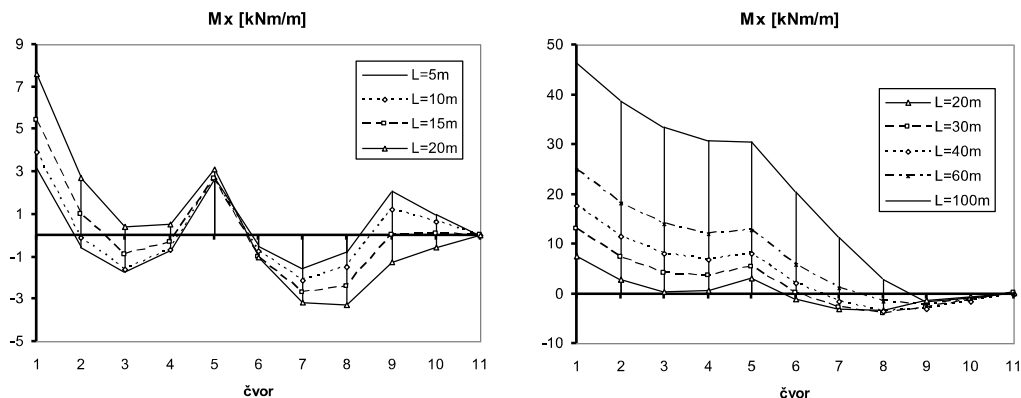
Slika 8. Dijagram podužne normalne sile  $N_y$  u preseku na sredini raspona ljuske dužine  $L=5m$

Posmatrajmo dijagrame presečnih sila, podužnih normalnih napona i momenata prikazane na slikama 7 do 13. Lako se uočavaju dve grupe ovih dijagrama, koje se razlikuju po svom obliku - dijagrami "kratkih" ljski ( $L=5\text{ m}$  i  $L=10\text{ m}$ ) i dijagrami "dugih" ljski (raspona  $L=20\text{ m}$  i više). Dok je dijagram podužne normalne sile  $N_y$  dugih ljski gotovo linearan po širini pojedinih ploča (sl. 7), to je kod ljske raspona  $L=5\text{ m}$  izražena njegova nelinearnost (sl. 8).

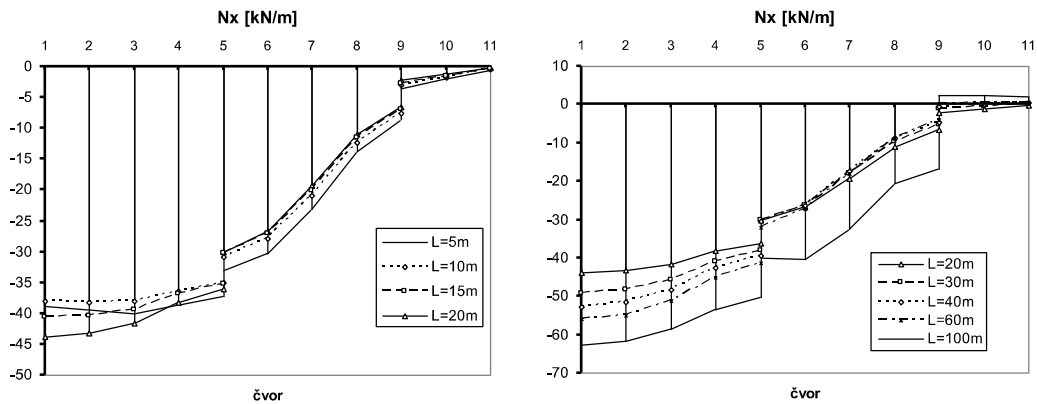
Zanimljivo je uporediti dijagrame podužnog normalnog napona  $\sigma_y$  po visini poprečnog preseka ljske, za različite raspone (sl. 9). Kod ljski raspona do  $L=20\text{ m}$  maksimalna vrednost normalnog napona pritiska se ne dostiže u najvišoj tački poprečnog preseka (čvorna linija 1), već nešto ispod nje. Sa povećanjem raspona smanjuje se visina pritisnute zone preseka (neutralna linija se pomera bliže krajnjoj pritisnutoj ivici). Za izrazito velike raspone ( $L=100\text{ m}$ ) dijagram normalnih napona postaje linearan po visini preseka, iz čega se može zaključiti da bi primena klasične teorije grede na analizu poliedarskih ljski dala približno tačne rezultate tek za dužine preko  $L=60\text{ m}$  ( $L/B=5.17$ ,  $I_y/I_x=19.12$ ), koje su neprihvatljive sa praktičnog aspekta.



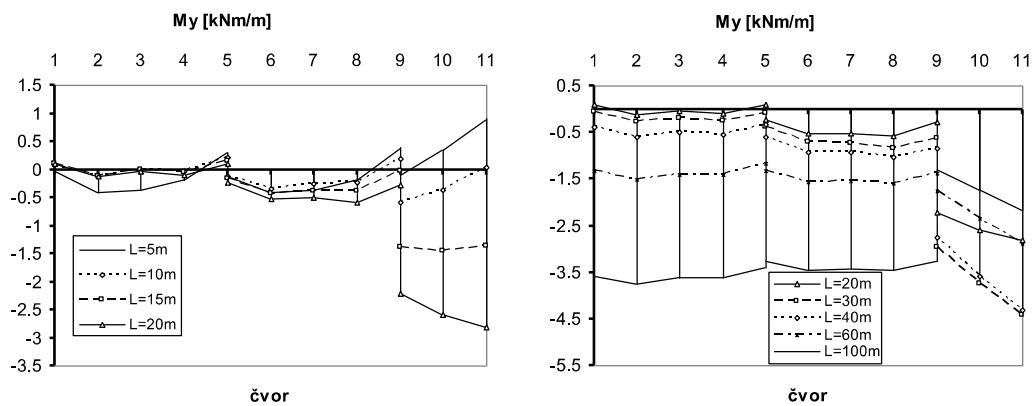
Slika 9. Dijagrami podužnog normalnog napona  $\sigma_y$  po visini poprečnog preseka ljske, u sredini raspona



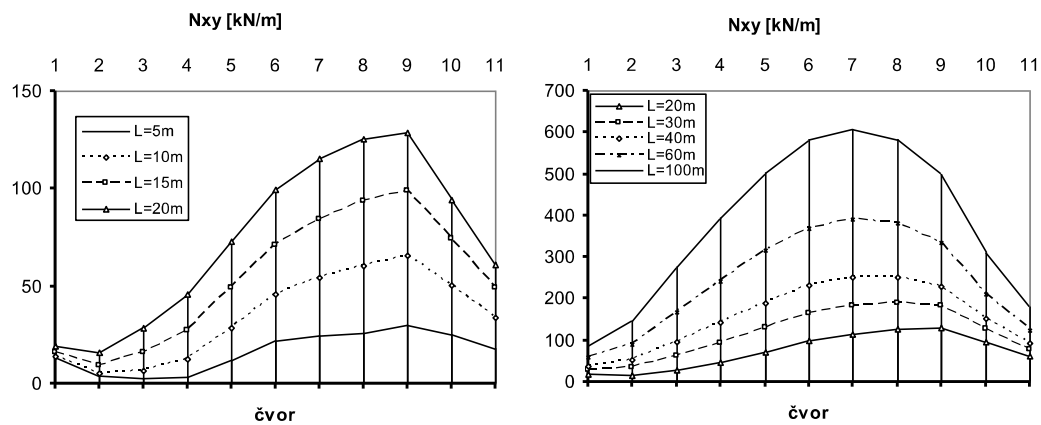
Slika 10. Dijagrami momenta savijanja  $M_x$  oko "y" ose u preseku na sredini raspona



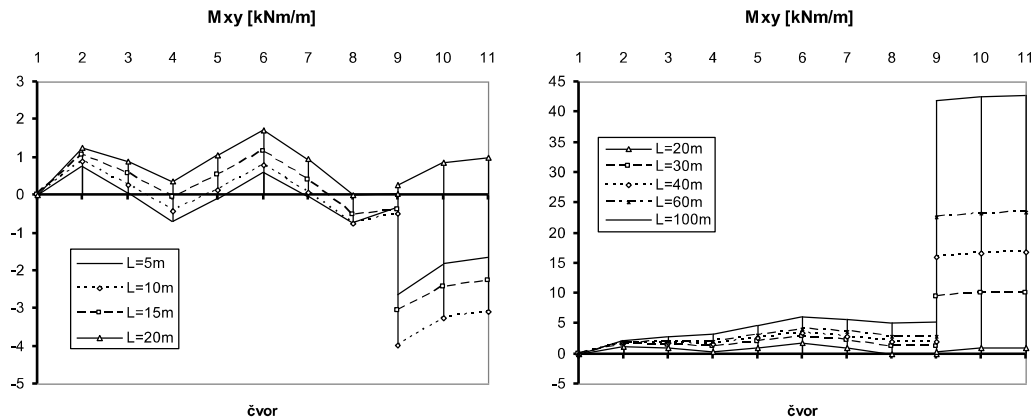
Slika 11. Dijagrami normalne sile  $N_x$  u poprečnom pravcu u preseku na sredini raspona



Slika 12. Dijagrami momenta savijanja  $M_y$  oko "x" ose u preseku na sredini raspona



Slika 13. Dijagrami smičuće sile  $N_{xy}$  u preseku iznad oslonca



Slika 13. Dijagrami momenta torzije  $M_{xy}$  u preseku iznad oslonca

Momenti torzije  $M_{xy}$  u oslonačkim presjecima ploča koje čine poliedar su mali čak i kod dugih ljski. Međutim, u presjecima ivičnih greda oni dostižu značajnu veličinu. U nekim slučajevima ovi uticaji mogu postati merodavni za dimenzionisanje. Sa dijagrama na slici 13 se vidi da se predznak momenta torzije u ivičnoj gredi menja pri rasponima između  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$ . Najmanji oslonački momenti torzije u ivičnoj gredi javljaju se pri rasponu  $L=20\text{m}$ .

Na osnovu gornje analize pomeranja, obrtanja, presečnih sila, napona i momenata, može se izvesti zaključak da se granica između "kratkih" i "dugih" poliedarskih ljski, poprečnog preseka prema slici 2, nalazi između raspona  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$ , kojima odgovara odnos dužina/širina ljske između  $L/B=0.86$  i  $L/B=1.72$ , tj. odnos raspona pojedinih ploča poliedra između  $I_y/I_x=3.19$  i  $I_y/I_x=6.37$ .

Aktuelna istraživanja [2] pokazuju da je pretpostavka o malim pomeranjima u potpunosti opravdana za poliedarske ljske poprečnog preseka prema slici 2, raspona do  $L=15\text{m}$  ( $L/B=1.29$ ;  $I_y/I_x=4.8$ ). Geometrijska nelinearnost postaje izražena za raspone veće od  $L=25\text{m}$ . Za ljske raspona  $L=20\text{m}$  greška koja se čini usvajanjem pretpostavke o malim pomeranjima, u odnosu na rezultate dobijene geometrijski nelinearnom analizom, ne prelazi 10%. Analiza stabilnosti poliedarskih ljski, koju je u svojim novijim istraživanjima sproveo D. D. Milašinović, ukazuje na to da analizirane ljske postaju geometrijski nestabilne ili pri opterećenju mnogostruko većem od eksploatacionog ili u slučaju veoma tankih ljski, koje bi bilo teško ili čak nemoguće izvesti u armiranom betonu. Međutim, materijalnu nelinearnost nije opravdano zanemariti ni kod kratkih ni kod dugih ljski, na šta ukazuju rezultati granične analize armiranobetonske konstrukcije koji nisu predmet istraživanja u ovom radu.

#### 4. ZAKLJUČAK

U okviru ovog rada prikazani su rezultati numeričke analize armiranobetonskih prizmatičnih poliedarskih ljski primenom metoda konačnih traka. Analiza je sprovedena za ljske različite dužine, identičnog oblika poprečnog preseka, materijala i opterećenja. Na osnovu poređenja dijagrama pomeranja, obrtanja, presečnih sila,



momenata i napona, za ljuske različite dužine, zaključuje se da se granica između "kratkih" i "dugih" poliedarskih ljuski, odabranog poprečnog preseka, nalazi između raspona  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$ , kojima odgovara odnos dužina/širina ljuske između  $L/B=0.86$  i  $L/B=1.72$ , tj. odnos raspona pojedinih ploča poliedra između  $l_y/l_x=3.19$  i  $l_y/l_x=6.37$ . Za kratke ljuske je dovoljno sprovesti linaernu analizu proračuna presečnih sila i pomeranja.

## LITERATURA

- [1] Goleš, D.: Reološko-dinamička analiza armiranobetonskih poliedarskih ljuski, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Subotica, jun 2012.
- [2] Milašinović, D.D., Goleš, D., Borković, A., Kukaras, D., Landović, A., Živanov, Ž., Rakić, P.: Rheological-Dynamical Limit Analysis of Reinforced Concrete Folded Plate Structures Using the Harmonic Coupled Finite-Strip Method, The Eleventh International Conference on Computational Structures Technology, Dubrovnik, Croatia, 4-7 September 2012.
- [3] Milašinović, D. D.: Metod konačnih traka u teoriji konstrukcija, Student, Novi Sad, 1994.

## ANALYSIS OF SPAN LENGTH INFLUENCE ON INTERNAL FORCES AND DISPLACEMENTS OF FOLDED PLATE STRUCTURE

**Summary:** *Linear elastic analysis of reinforced concrete prismatic folded plate structure of various span lengths was carried out using finite strip method. The paper presents and comments obtained diagrams of displacements, rotations, internal forces, moments and stresses. Analysing the shape of these diagrams, it is concluded that the boundary between "long" and "short" folded plate structures of selected cross section lies between the range of  $L=10\text{m}$  and  $L=20\text{m}$ , which corresponds to length/width ratio of entire structure between  $L/B=0.86$  and  $L/B=1.72$ , ie. span length ratio of individual plates between  $l_y/l_x=3.19$  i  $l_y/l_x=6.37$ .*

**Key words:** *Folded plates, finite strip method, shell length, reinforced concrete*