PRIMENA METODE STATIKE KONSTRUKCIJA PRI NUMERIČKOJ INTERPOLACIJI FUNKCIJA SA PROCENOM TAČNOSTI

Vojislav Mihailović[1]
Aleksandar Landović[2]

UDK:

Rezime: *U Zborniku radova GFS br.18 je opisan multiparabolični postupak za interpolaciju funkcija. Ovde se predlaže potpuno nezavisan postupak za interpolaciju funkcija. Iako je ovaj postupak znatno složeniji od prethodnog on daje mnogo bolju aproksimaju funkcije. Postupak zahteva primenu programa zbog većeg obima algoritma proračuna. Moguće je vrlo uspešno proceniti grešku interpolacije, odnosno oceniti tačnost proračuna.*

Ključne reči: *Interpolacija, model, multilinerna i globalna interpolaciona funkcija , statika konstrukcija*

1. UVOD

U radu [12] je predložen postupak numeričke interpolacije funkcija pomoću skupa lokalnih parabola koristeći parabole 'unazad i unapred'. Ovde neće biti ponavljani stavovi o potrebi numeričke interpolacije u inženjerskim poslovima, kao ni delovi izlaganja koji daju pregled i analizu najpopularnijih postupaka, jer se mogu naći u navedenom radu. Iako je taj postupak dosta jednostavan i daje mnogo bolje rezultate u odnosu na Lagranžov postupak, može se formirati znatno uspešniji postupak, naročito ako se koristi računarski aplikativni program autora ovog rada. Za ručni rad pomoću običnog kalkulatora ili za brže unošenje podataka jednostavnije je raditi sa multiparaboličnim postupkom.

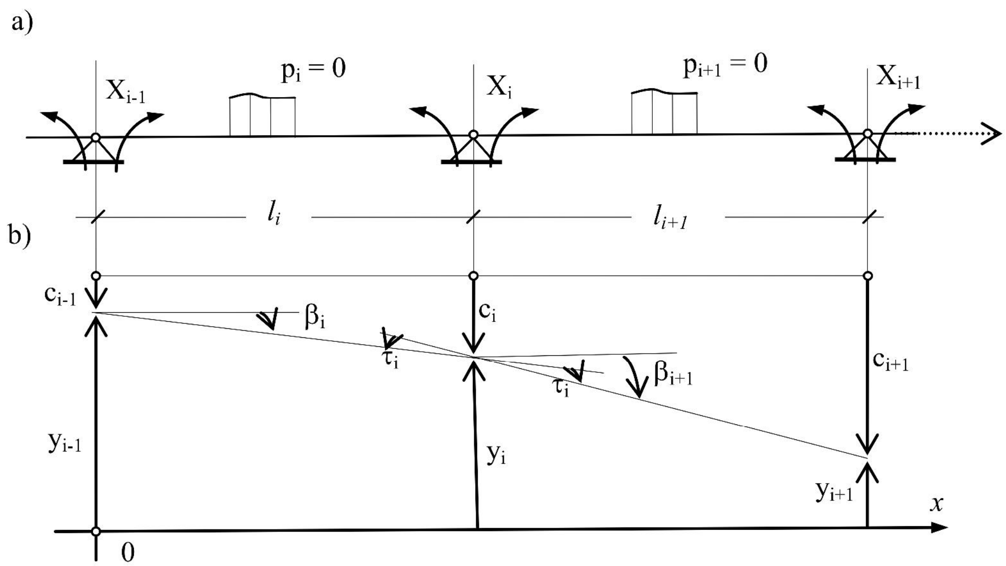
Primena metode sila statike konstrukcija uspešno rešava problem promene krivine i većeg broja čvorova funkcije sto nije slučaj za Lagranžov ili postupak vrlo poznate 'spline' metode. Primena 'spline' postupka polazi se od ispravne ideje 'savitljive trake'. Iako je ideja potpuno ispravna sa inženjerskog stanovišta, jer poštuje uslov energetskog principa minimuma potencijalne energije sistema, postavljen je algoritam nepoznatih veličina koji ne poštuje polaznu ideju, pa ce biti zadatak ovog rada da pokaže zbog čega dolazi do značajnih odstupanja interpolovanih vrednosti funkcija u odnosu na logičan trend krive linije. Drugi deo cilja je da se predloži ispravan algoritam zasnovan na primeni Metode sila statike konstrukcija na sisteme linijskih konstrukcija u ravni.

[1] Prof. dr Vojislav Mihailović, dipl. inž. građ (u penziji), Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel.: 024/554 300, e-mail: voja@gf.uns.ac.rs
[2]mr Aleksandar Landović, dipl. inž. građ., Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel.: 024/554 300, e-mail: landovic@gf.uns.ac.rs

Novi postupak ćemo nazvati 'New spline' (novi postupak savitljive trake') da bi ga razlikovali od predhodnog, pod imenom 'spline', detaljno izvedenog u knjizi Soupa [13]. Koliko je autorima poznato ovaj algoritam je prikazivan netačno ili nedovoljno precizno (videti [4] i [13]). Aplikativni program 'Newspline' je testiran na više primera i pokazao je očekivane logične rezultate. Za postupak 'spline' analizom više primera u knjizi Gilat A, koji namenjen primeni programskog paketa 'MatLab' utvrđeno je da „može biti uzrok velikih grešaka ukoliko ulazni podaci nisu ravnomerno raspoređeni” (v.str.217 [4]). Ove greške u potpunosti otklanja naš predlog 'New spline' postupka.

2. ALGORITAM POSTUPKA 'NEW SPLINE' PRI INTERPOLACIJI FUNKCIJA

Zbog čega dolazi do pogrešnih interpolacionih vrednosti, iako je ispravno postavljena početna ideja savitljive trake, koja prolazi kroz unapred poznat broj čvorova krive linije? Na sledećoj slici prikazan je osnovni statički sistem kontinualnog nosaca (KN), gde su prikazani čvorovi KN pre deformacije horizontalnom linijom. Posle pomeranja čvorova, njihov novi položaj je određen pomeranjima (c_i), ili položajem čvorova u koordinatnom sistemu $x0y$ sa koordinatama y_i. Ugao τ prikazuje ugao promene linije pomeranja između tri susedna čvora.



Slika 1. a) Osnovni statički sistem KN b) Vertikalna pomeranja oslonaca (c_i) *

Kao što je već navedeno, prethodni rad autora [12] dao je odgovor zašto uslovi

$$y(x_i)=y_i \quad (i=1,2,..... n+1) \tag{1}$$

,prema Lagranžovom postupku na slici 1, nisu dovoljni za uspešnu interpolaciju. U ovom izrazu sa n je obeležen broj polja između čvorova, a sa i posmatrani čvor (i).

* Prikaz na slici 1 je nacrtan prema Metodi sila u Statici konstrukcija [14]

Vrlo poznat i dosta korišćen u praksi postupak 'spline' (postupak savitljive trake) je pokušaj otklanjanja uočenih nedostataka postupka Lagranža za krive sa većim brojem čvorova. U tom cilju postavljeni su dopunski uslovi u čvorovima krive linije.
Na slici 1. prikazani su čvorovi krive linije koji su spojeni glatkom krivom linijom. Da bi kriva linija bila glatka u metodi 'spline' postavljeni su sledeći uslovi:

$$y_{i-1}(x_i)=y_i$$
$$y_i\,(x_i)=y_i$$
$$y_{i-1}'\,(x_i)=y_i'\,(x_i)$$
$$y_{i-1}''(x_i)=y_i''(x_i) \quad (i=1,2,.....n+1) \tag{2}$$

Indeks i neposredno uz ordinatu x označava polje linije, a indeks uz apscisu y označava posmatrani čvor krive linije.
Postavljeni uslovi kontinuteta krive (2) postavljaju uslove jednakosti ordinata funkcije za dva susedna polja u samom čvoru, zatim iste vrednosti nagiba tangenti i jednakost drugog izvoda.
Promena funkcije pomeranja između čvorova uzeta je u obliku polinoma trećeg stepena:

$$y_i(x_k)=k_{1i}+k_{2i}\cdot x_k+k_{3i}\cdot x_k^2+k_{4i}\cdot x_k^3 \quad (i=1,2,.....n) \tag{3}$$

koji sadrži četiri nepoznate konstante. Broj nepoznatih veličina je 4×n ili
4×n-2 ukoliko postoje uglovi nagiba krive linije na oba njena kraja. Dosta složen algoritam detaljan se može naći u knjizi T. Shoupa [13].
Međutim, ti uslovi nisu dovoljni zato što jedna savitljiva traka treba da ispuni i uslove zavisnosti deformacije u čvoru od stanja deformacije u susednim čvorovima, što je dobro poznato u Statici konstrukcija linijskih sistema. Znači, u postojećoj 'spline' metodi nisu dobro postavljene uslovne jednačine za određivanje položaja interpolovanih tačaka.
Na slici 1a prikazana su dva susedna polja jedne kontinualne grede (KG), tj. prikazan je deo osnovnog sistema sa naznačenim opterećenjem i nepoznatim momentima iznad oslonaca. Može se uzeti da su za savitljivu traku dominantni uticaji usled sleganja oslonaca, a da su potpuno zanemarljivi usled prikazanog spoljašnjeg opterećenja. Deformacija osnovnog sistema izazvana sleganjem oslonaca je poligonalna linija prikazana na slici 2b. Na tom delu slike oznakom τ_i označena je promena ugla iznad oslonca (i).

Za kontinualnu gredu mogu se postaviti uslovne jednačine, kao što je poznato, u sledećem obliku:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{n,n-1} & \delta_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

ili sažeto

$$\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{\Delta} \tag{5}$$

Koeficijenti δ_{ij} mogu se dobiti pomoću izraza

$$
\begin{aligned}
\delta_{i,i-1} &= \frac{1}{6EI}\left(l_i\right) \\
\delta_{i,i} &= \frac{1}{6EI}\left(l_i + l_{i+1}\right) \\
\delta_{i,i+1} &= \frac{1}{6EI}\left(l_{i+1}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Članovi slobodnog vektora uslovnih jednačina su

$$\Delta_i = -\frac{\Delta c_{i+1_i}}{l_{i+1}} + \frac{\Delta c_{i_i}}{l_i} \tag{7}$$

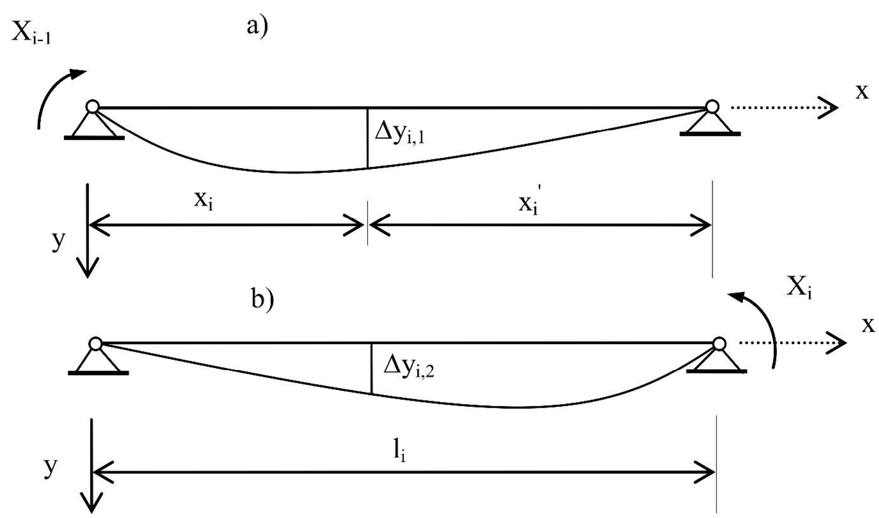
gde je, na osnovu slike 2b,

$$\Delta c_i = -(y_i - y_{i-1})$$

Iz jednačine (5) dobija se nepoznati vektor **X**

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\delta}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Delta} \tag{8}$$

gde je $\boldsymbol{\delta}^{-1}$ inverzna matrica matrice $\boldsymbol{\delta}$, a $\boldsymbol{\Delta}$ vektor koji je dat u jednačini (4) i (5).
Položaj bilo koje tačke *k* za KG može se dobiti kao zbir linearne (globalne) promene ordinate ($y_{i,lin}$) između čvorova i lokalne promene zbog deformisanja 'savitljive grede' (Δy_i) između dva susedna čvora.



Slika 2. Lokalna promena pomeranja: a) Usled dejstva X_{i-1} i b) Usled dejstva X_i

Prema tome, za polje *i* važi da je

$$y_i = y_{i,lin} + \Delta y_i \tag{9}$$

gde je ($y_{i,lin}$) linearno pomeranje u osnovnom sistemu pri pomeranju čvorova na slici 1. Ako se izdvoji jedno polje kontinualne grede tada se vidi da lokalna deformacija zavisi od dva susedna momenta savijanja, koja deluju na krajevima grede (*i-1, i*).
Uticaj poprečnog opterećenja duž grede može da se zanemari zato što je krutost grede mala ('savitljiva traka') tj. greda ne može da primi veće poprečno opterećenje. Lokalno pomeranje izazvano dejstvom momenta savijanja X_{i-1} na levom kraju polja (*i*) dato formulom

$$\Delta y_{i,1} = X_{i-1} \frac{l_i^2}{6EI} (2\varepsilon_i - 3\varepsilon_i^2 + \varepsilon^3) \tag{10}$$

Lokalno pomeranje usled pomeranja X_i na desnom kraju polja je

$$\Delta y_{i,2} = X_i \frac{l_i^2}{6EI} (2\varepsilon_i' - 3\varepsilon_i'^2 + \varepsilon'^3) \tag{11}$$

U izrazima (10) i (11) obeleženo je

$$\varepsilon_i = \frac{x_i}{l_i} \tag{12}$$

i

$$\varepsilon_i = \frac{x_i'}{l_i}; \qquad x_i' = l_i - x_i \tag{13}$$

Ukupno lokalno pomeranje je

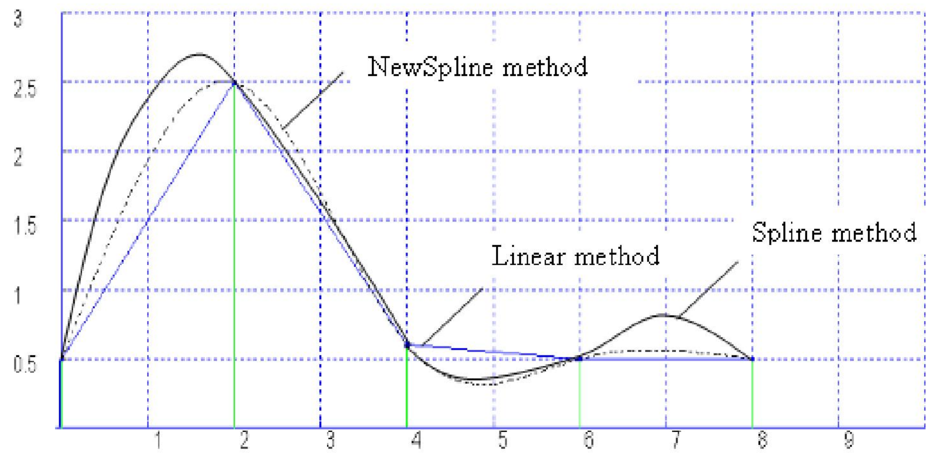
$$\Delta y_i = -(\Delta y_{i,1} + \Delta y_{i,2}). \tag{14}$$

3. ANALIZA DVA PRIMERA

a) Primer 1

Za dati skup tačaka (x_j, y_j) (za j=1.5) treba naći interpolacionu krivu postupkom 'Spline' primenom programa MatLab2006b i pomoću novog našeg predloga 'New spline', koji je izložen preko algoritma koristeći izraze (4) - (14). Kao što je već navedeno postupak primenjuje metodu sila statike konstrukcija. Vektor zadatih apscisa je **x**=[0, 2, 4, 6, 8], a odgovarajući vektor ordinata je **y**=[0.5, 2.5, 0.60, 0.5, 0.5]. Treba analizirati rezultate.

Direktnom primenom programa MatLab2006b dobijene su vrednosti interpolacionih ordinata, odnosno dobijene su vrednosti po postupku 'Spline'. Za novi predlog postupka pod nazivom 'New spline', s'obzirom da nije postojao program, urađen je u programskom jeziku *Visual Basic*. Rezultati su u obliku dijagrama prikazani za oba postupka na slici 3.



Slika 3. Prikaz aproksimacionih krivih linija prema postupku 'Spline' i 'NewSpline'

Ako uporedimo oba dijagrama može se videti da se vrednosti, prema navedenim postupcima znatno razlikuju, i to najviše u prvom polju između čvorova (0) i (1), kao i u zadnjem polju između čvorova (4) i (5).
Procenjena apsolutna greška interpolacije, u odnosu na vrednosti prema linearnoj interpolaciji između čvorova, za x=1.5 iznosi

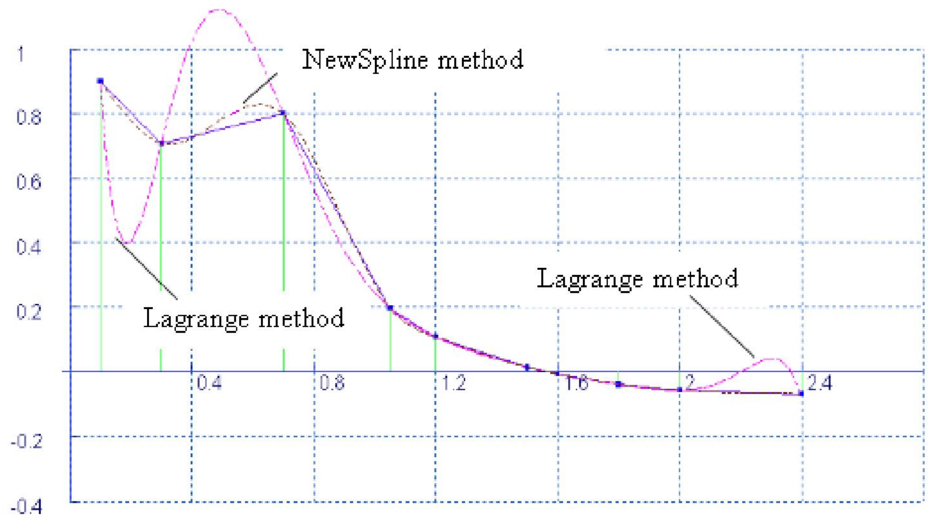
$$E_r = abs(\frac{2.3-1.4}{2.3})\cdot 100 = 39.13\%$$ prema postupku 'Spline' i

$$E_r = abs(\frac{1.8-1.4}{1.8})\cdot 100 = 22.22\%$$ prema postupku 'New spline'.

Vrednost greške može se, po želji, smanjiti ako se uzme novi, gušći raspored čvorova.
Vizuelno je lako uočiti da 'Spline' postupak ne daje logičan tok položaja 'savitljive trake' u prvom i zadnjem polju krive linije, što je rezultat pogrešno postavljenih uslova, koje kriva linija treba da ispuni u čvorovima.
Postupak 'New spline ' daje potpuno logičan tok krive linije u skladu sa mogućem ponašanju 'savitljive trake' pri pomeranju njenih oslonaca, odnosno zadatih čvorova krive linije.

b) Primer 2

Za dati skup podataka (xj,fj) (j=1,10) treba naći interpolacione krive postupkom 'Newspline' i multilinearnom postupkom. Analizirati rezultate.
Zadat je vektor zadatih apscisa **x**=[0.1, 0.3, 0.7, 1.05, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0, 2.4] (n=10) i vektor ordinata **f**=[0.9, 0.708, 0.8, 0.1988, 0.1091, 0.01578, -0.00589, -0.03756, -0.05632, -0.06689].



Slika 4. Prikaz rezultata Lagranžovog i 'NewSpline' postupka

Rezultati su dobijeni na isti način kao što je opisano u prethodnom primeru, a prikazani su na slici 4. Može se videti da se rezultati znatno razlikuju između 'New spline' i 'Lagrnžovog' postupka. Ovde je namerno upoređen novi postupak sa drugim interpolacionim postupkom, da bi se videla prednost u odnosu na druge postupke. Postupak 'Spline' isto daje velika odstupanja.

Znatno bolji rezultati se dobijaju pomoću novog postupka. Takođe, na slici se vidi da postupak 'Lagrange' daje vrlo velika odstupanja ako se uzme $n \geq 9$.

Procenjena greška interpolacije prema 'Lagrange' postupku, za $x_i = 0.5$, iznosi

$$E_r = abs(\frac{1.1 - 0.75}{0.75}) \cdot 100 = 46.66\%,$$

dok prema 'New spline' postupku procenjena greška iznosi

$$E_r = abs(\frac{0.8 - 0.75}{0.75}) \cdot 100 = 6.66\%.$$

Vizuelno se na slici 4. mogu jasno uočiti ogromne razlike prema dva obrađena postupka.

4. ZAKLJUČCI

Predloženi postupak interpolacije pomoću 'savitljive trake' između zadatih čvornih tačaka krive linije je vrlo jednostavan, relativno lak za programiranje i omogućava procenu greške interpolacije.

Novi postupak interpolacije nazvan je 'New spline' da bi se razlikovao od popularnog 'Spline' postupka.

Greške interpolacije uvek mogu da budu prihvatljive za razliku od postupka 'Spline', koji može višestruko pogrešno da proceni interpolovane vrednosti' . U izabranom primeru greška interpolacije je približno dvostruko manja.
Oba postupka su relativno složena za rad sa običnim kalkulatorima.
Umesto primene metode sila za proračun deformacione linije ravnopravno se može primeniti i metoda deformacije Statike konstrukcija.
Postupak 'Spline' ima znatno složeniji algoritam proračuna [13]. Taj postupak ne ispunjava potrebne statičke uslove deformacije, iako polazni uslovi, na prvi pogled, izgledaju ispravni.
Paralelnom primenom 'New spline' postupka, zatim multiparaboličnog i multilinearnog postupka možemo sa velikom sigurnošću tvrditi da poznajemo očekivane vrednosti intrpolacionih tačaka krive linije ispitivane pojave. Takvu sigurnost nam daje procenjena vrednost greške proračuna.

LITERATURA

[1] Bajpai A., Mustoe L., Walker D.: Engineering Mathematics, Wiley, New York, USA, **1979**.

[2] Demidovich D., Maron I.: Osnovi viceslitelјnoj matematiki, Nauka, Moscow, 1979.

[3] Đurić M.: Statika konstrukcija, N. Knjiga, Beograd, **1970**.

[4] Gilat A.: Uvod u Matlab 7, Mikro knjiga, **2005**.

[5] Grozdanić D.: Numeričke metode, TMF, Beograd, **2003**.

[6] Mihailović V., Beleslin R.: Analiza uticaja impulsnog opterećenja, s.29 , Građevinski fakultet u Subotici, **1999**.

[7] Mihailović V., Landović A.: Novi aplikativni programia za konstrukcije’Construct B05’, Međunarodna konferencija u Subotici, s.190-196, **2005**.

[8] Mihailović V., Landović A.: Dve nove verzije grupe aplikativnih programa ’Construct’ , Međunarodna konferencija u Subotici, s.175-184, **2007**

[9] Mihailović V.: A possibility for modification of Simpson formula, Bulletins for Applied Mathematics, N 547, 247-256, Budapest, **1987**.

[10] Mihailović V.: A numerical integration approch by weight factors and its accuracy, Intern. Journal for numerical methods in engineering, Wiley, vol. 28, 1217-1228, **1989**.

[11] Mihailović V.: Postupak numeričke integracije pomoću težinskih koeficijenata, Zbornik radova Građevinskog fakulteta 3, 46-62, Subotica, **1986**.

[12] Mihailović V., Tadić Lj.: Interpolacija pomoću skupa lokalnih parabola i procena tačnosti u mehanici konstrukcija, Zbornik radova Građevinskog fakulteta 18, **2009**.

[13] Shoup T.: A Practical Guide to Computer Methods for Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, **1979**.

[14] Solovjev Đ.: Statika konstrukcija, Veselin Masleša, Sarajevo, **1952.**

A STRUCTURAL STATIC METHOD AS TOOL FOR NUMERIC INTERPOLATION OF FUNCTIONS

Summary: *In our publication Zbornik radova GFS No.18 the multiparabolic approach for interpolation of functions is described. Here is proposal which is totally independent of mentioned approach. This approach is more complex, because it needs larger algorithm, but it gives much better approximation of the functions and can estimate error of interpolation.*

Key words*: Interpolation, model, elastoplastic, multilinear and local parabolic function, structural mechanic.*