NEKE NAPOMENE UZ STOHASTIČKU ANALIZU ZEMLJOTRESNIH UTICAJA

Red. prof. dr *Brčić Vlatko*, dipl. inž. građ.
Građevinski fakultet, Beograd

Rezime

Razmatra se primena probabilističkog pristupa za analizu uticaja od zemljotresa, uz korišćenje pojmova i metoda računa verovatnoće i matematičke statistike. Analizirani su diskretni sistemi, a date su i napomene o probabilističkoj analizi nelinearnih sistema. Posebno je razmatrana simulacija zemljotresa primenom „belog šuma''.

1. UVOD

Standardna analiza zemljotresnih uticaja, kako je predviđeno tehničkim propisima za aseizmičku izgradnju, zasniva se na determinističkom pristupu, bilo da se pri tome računa ekvivalentno statičko opterećenje, bilo da se sprovodi dinamička linearna ili nelinearna analiza. Praksa, međutim, pokazuje da se objekti veoma često ne ponašaju onako kako bi se to, prema izvršenom dinamičkom proračunu, očekivalo. Razlog ovoj činjenici može se delimično tražiti i u tome što su seizmički uticaji na objekte stohastičkog (stihijskog, slučajnog) karaktera, pa se njihova analiza može najadekvatnije sprovesti probabilistički, tj. metodologijom statističke matematike i teorije verovatnoće. Ovde se krajnji zaključak svodi na ocenu verovatnoće nekog događaja, na primer, na verovatnoću da pomeranje vrha posmatranog visokog objekta neće prekoračiti neki utvrđen iznos. U tom smislu treba da se traži matematički put da se tražena verovatnoća dobije na osnovu stvarno izmerenih podataka, npr. akcelerograma nekog objekta snimljenog pri stvarnom zemljotresu.

U ovom radu daju se najpre osnovni podaci o matematičkom rešavanju problema primenom teorije verovatnoće, a u drugom delu se to primenjuje na analizu diskretnih sistema sa proizvoljnim brojem stepeni slobode, pri čemu osnovnu ulogu igra funkcija raspodele. Da bi se ona dobila, potrebno je da se nađe srednja kvadratska vrednost posmatrane funkcije.

Verovatnoća da će za stihijnu promenljivu x biti $x > x_k$ daje se pomoću funkcije raspodele $f(x)$ u obliku

$$\text{Verov.}\ (x > x_k) = \int_{x_k}^{\infty} f(x)\, dx \tag{1}$$

pri čemu za funkciju raspodele važi

$$f(x) > 0; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

To je funkcija karakterističnog zvonastog oblika, i ona je dovoljan podatak za ocenu verovatnoće.

Ako su u pitanju funkcije sa dve stihijne promenljive x i y, tada se slično definiše i funkcija vezane verovatnoće $f(x, y)$ u obliku

$$\text{Verov.} \begin{matrix} x > x_k \\ y > y_l \end{matrix} = \int_{x_k}^{\infty} \int_{y_l}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1'}$$

Pri formiranju funkcije verovatnoće važnu ulogu imaju pojmovi:

— očekivana vrednost funkcije $h(x)$: $E\,|h(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$

— srednje vrednost stihijne promenljive: $\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

— varijansa (disperzija) stihijne promenljive x: $\sigma_x^2 = - \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)\, dx$.

Varijansa predstavlja srednje kvadratsko odstupanje stihijne promenljive x od njezine srednje vrednosti. Ako je $\mu_x = 0$, biće

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx \tag{2}$$

tj. varijansa tada predstavlja srednju kvadratsku vrednost promenljive x.

Seizmografski zapisi pri zemljotresu predstavljaju *stohastičke procese*, i oni se mogu okarakterisati statističkim svojstvima. Kod zemljotresa se pretpostavlja *stacionarnost* (ustaljenost) i *ergodičnost*, gde su svi zapisi međusobno statistički ekvivalentni, pa se očekivana vrednost $E\,|\,x(t)\,|$ može zameniti vremenskim prosekom jednog reprezentativnog zapisa:

$$E(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \tag{3}$$

Pretpostavka ergodičnosti opravdana je kod vibracija nastalih usled stohastički promenljivih zemljotresnih sila. Varijansa σ_x^2 neke veličine $x(t)$, koja predstavlja ergodičan proces, u specijalnom slučaju kada je srednja vrednost stihijne promenljive jednaka nuli, postaje njezina srednja kvadratska vrednost $\overline{x^2(t)}$ data izrazom

$$\overline{x^2(t)} = E\,|\,x^2(t)\,| = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt \tag{4}$$

U zemljotresnom inženjerstvu smo zainteresovani da pomeranje $y(t)$ neke tačke objekta pri zemljotresu ne prekorači neku vrednost y_k. No, kako su zemljotresne sile stihijne, mora se dopustiti mogućnost da će vrednost y_k biti i prekoračena. Najviše što se može tražiti je to da je verovatnoća takvog prekoračenja biti mala, tj.

$$\text{Verov.}\ (|\,y(t)\,| > y_k) = \int_{-\infty}^{-y} f(y)\,dy + \int_{y_k}^{\infty} f(y)\,dy = \varepsilon \tag{5}$$

gde je ε mali pozitivan broj. Ovde je $f(y)$ funkcija raspodele. Kod zemljotresnih uticaja se s pravom usvaja da je to Gausova (normalna) raspodela data izrazom

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\,e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \tag{6}$$

gde je μ srednja vrednost, a σ_y^2 varijansa. Specijalno, ako je srednja vrednost $\mu_y = 0$, onda je

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \tag{6a}$$

tj., funkcija raspodele data je samo jednim parametrom, varijansom. Ako je $y(t)$ reprezentativni zapis ergodičnog zemljotresnog procesa, onda važi da je

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y^2(t)\,dt \tag{7}$$

tj. varijansa σ_y^2 je jednaka srednjoj kvadratskoj vrednosti. Kada je $\sigma_y^2\ \overline{y^2(t)}$ izračunato, a raspodela od $y(t)$ data približno, može se pomoću Gausove funkcije raspodele odrediti verovatnoća

$$\text{Verov.}\quad (y > y_k) = \int_{y_k}^{\infty} f(y)\,dy \tag{8}$$

a time je problem u probabilističkom smislu načelno rešen.

Da bi se odredila srednja kvadratska vrednost odgovara konstrukcije $\overline{y^2(t)}$, potrebno je da se nađe srednja kvadratska vrednost pobuđenja $\overline{f^2(t)}$, da se linearan oscilatoran sistem karakteriše svojim kompleksnim dinamičkim faktorom („prenosnom funkcijom") $H(\Omega)$, pa da se nađe relacija koja izražava $\overline{y^2(t)}$ u zavisnosti od $\overline{f^2(t)}$ i $H(\Omega)$. Poznato je da je kompleksan dinamički faktor $H(\Omega)$ definisan kao količnik kompleksne amplitude i statičkog ugiba pri ustaljenim vibracijama nastalim usled oscilatornog opterećenja frekvencije Ω. Važi da je

$$H(\Omega) = \frac{1}{\left|1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right| + i\left|2\xi\,\dfrac{\Omega}{\omega}\right|} \tag{9}$$

 gde je ω svojstvena frekvencija sistema, a ξ relativno prigušenje.

Ako je pobuđenje normalno (tj. prema Gausovoj raspodeli), biće i odgovor sistema takođe normalan, pa kad je $\overline{y^2(t)}$ izračunato, može se izvesti tvrdnja o verovatnoći nekog događaja vezanog za ponašanje oscilatornog sistema.

Zavisnost između srednjih kvadratskih vrednosti pobuđenja $f(t)$ i odgovora $y(t)$ data je pomoću funkcije spektralne gustine snage. Kao što je poznato, funkcija spektralne gustine snage $y(\Omega)$ funkcije $y(t)$ definisana je obrascem

$$y(\Omega) = \frac{|Y(\Omega)|^2}{T} \tag{10}$$

gde je $Y(\Omega)$ Fourierova integralna transformacija funkcije $y(t)$:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

Može se pokazati | 5 | da iz (10) izlazi da je srednja kvadratska vrednost

$$\overline{y^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} y(\Omega)\, d\Omega \tag{11}$$

Funkcija spektralne gustine snage $f(\Omega)$ dobija se iz tzv. autokorelacione funkcije $R(\tau)$ prema obrascu

$$f(\Omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-i\Omega\tau}\, d\tau \tag{12}$$

pri čemu je autokorelaciona funkcija data izrazom

$$R(\Omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} f(t) f(t+\tau)\, dt \tag{13}$$

Ovde se pretpostavlja da je $f(t)$ funkcija koja predstavlja neki ergodičan proces, npr., zemljotresno pobuđenje.

Obrascem (13) dobija se autokorelaciona funkcija pobuđenja, a iz nje prema (12) spektralna gustina snage pobuđenja. Ako se još uspostavi zavisnost između spektralnih gustina snage pobuđenja i odgovora, onda se prema (11) dobija i srednja kvadratska vrednost odgovora, a time su ostvareni uslovi za probabilističko rešenje problema zemljotresa.

3. ANALIZA LINEARNIH DISKRETNIH SISTEMA

Kod *sistema sa jednim stepenom slobode* prethodno pomenuta zavisnost ima oblik | 1 |:

$$y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 f(\Omega) \tag{14}$$

pa je krajnji izraz za srednju kvadratsku vrednost odgovora

$$\overline{y^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} |H(\Omega)|^2 f(\Omega)\, d\Omega \tag{15}$$

To je osnovna relacija za probabilističku zemljotresnu analizu, jer se izraz $\overline{y^2(t)} = \sigma_y$ unosi u Gausovu funkciju raspodele.

Osnovnu ulogu ima ovde, dakle, poznavanje spektralne gustine snage $f(\Omega)$ pobuđenja $f(t)$ datog seizmičkim zapisom. Ono se traži pomoću obrazaca (12) i (13), gde je $f(t)$ vremenski tok seizmografskog zapisa. Ti iznosi se za realne zapise mogu dobiti primenom automatskog računara, i u udžbenicima statističke matematike postoje rešenja za mnoge karakteristične funkcije. Međutim, u zemljotresnom inženjerstvu se sa uspehom koristi jedan specijalan slučaj pobude poznat pod imenom „beli šum" ("white noise"). To je slabo stacionaran stihijni proces karakterisan spektralnom gustinom snage. Fizička interpretacija konstantne gustine snage je u tome što je količina energije u tom stihijnom procesu približno uniformno raspoređena po celoj oblasti frekvencija. Pokazano je |2| da primena belog šuma dobro odgovara kao ulazni podatak za slučaj zemljotresnog uticaja.

Ako se posmatra sistem sa slabim prigušenjem, onda je za slučaj viskoznog prigušenja ξ i belog šuma $f(\Omega) = f = \text{const}$,

$$\overline{y^2(t)} = \frac{f\,\omega}{8\xi}; \quad |H(\Omega)| = \frac{1}{2\xi} \tag{16a}$$

dok je za slučaj konstrukcijskog prigušenja $F_D = i\,g\,F_E$:

$$\overline{y^2(t)} = \frac{f\,\omega}{4g}; \qquad |H)\Omega)| = \frac{1}{g} \qquad g = \text{const.} \tag{16b}$$

Uz takve pretpostavke i korišćenje prethodno izložene teorije mogućna je za sisteme sa jednim sistemom slobode relativno jednostavna probabilistička analiza.

Prigušeni sistemi sa n stepeni slobode. Primenjuje se uobičajeni postupak razvijanja vibracije po tonovima, uz korišćenje normalnih koordinata. Reprezentativna jednačina tada glasi |5|:

$$\ddot{\eta}_{(r)} + 2\xi_{(r)}\,\omega_{(r)}\,\dot{\eta}_{(r)} + \omega_{(r)}^2\,\eta_r = \frac{P_0\,\Gamma_{(r)}}{M_{(r)}}\,f(t) \tag{17}$$

$(r = 1, 2, \ldots, n)$

pa se iz $\eta_{(r)}$ poznatim postupkom nalazi pomeranje $y(t)$, a zatim i srednja kvadratska vrednost $\overline{y^2(x, t)}$.

Ako se za pobuđenje $f(t)$ usvoji da ono predstavlja ergodičan stihijni proces, onda se granični proces po vremenu prevodi na granični proces po frekvenciji, tj.

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(\Omega)\,d\Omega$$

pa se tada, koristeći neke aproksimacije, može rešenje za srednju kvadratsku vrednost odgovara $\overline{y^2(x, t)}$ svesti na oblik |1|:

$$y^2(x, t) = \sum_{r=1}^{n} \Phi_{(r)}^2(x)\,\frac{P_0\,\Gamma_{(r)}^2}{\omega_{(r)}^4\,M_{(r)}^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |H_{(r)}(\Omega)^2 f(\Omega)\,d\Omega \tag{18}$$

gde su $\Phi_{(r)}(x)$ svojstveni oblici slobodnih vibracija, $M_{(r)}$ generalisane mase, a $\Gamma_{(r)}$ faktori participacije po tonovima.

Integrali u ovom izrazu mogu se aproksimirati zamenjujući funkciju spektralne gustine snage $f(\Omega)$ njenim diskretnim vrednostima $f(\omega_{(r)})$ kod svojstvenih frekvencija. Tada se iz (18), za slučaj viskoznog prigušenja dobija

$$\overline{y^2(x, t)} = \sum_{r=1}^{n} \Phi_{(r)}^2(x)\,\frac{P_0^2\,\Gamma_{(r)}^2}{\omega_{(r)}^4\,M_{(r)}^2}\,\frac{f(\omega_{(r)})\,\omega_{(r)}}{8\xi_{(r)}} \tag{19a}$$

Kod konstrukcijskog prigušenja dobija se za srednju kvadratsku vrednots |1| izraz

$$\overline{y^2(x,t)} = \sum_{r=1}^{n} \Phi^2_{(r)}(x) \frac{P_o^2 \Gamma^2_{(r)}}{\omega^4_{(r)} M^2_{(r)}} \frac{f(\omega_{(r)})\,\omega_{(r)}}{4g} \tag{19b}$$

Ako se ovde za funkciju spektralne gustine snage pobuđenja $f(\Omega)$ usvoji beli šum (tj. konstanta), rešenje problema postaje elementarno.

Značajnu ulogu igra ovde određivanje konstante f belog šuma. Ako je spektralna gustina snage konstantna u celom domenu frekvencija, onda se primenom Wiener--Hinchinove teoreme dobija da je korelaciona funkcija takvog procesa Diracova δ — funkcija („delta-korelirani slučajni proces"). On se može predstaviti skupom nekoreliranih pravougaonih impulsa.

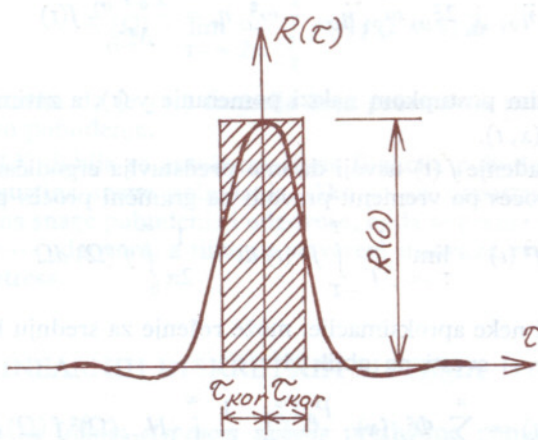
Ako je posmatrani proces samo aproksimacija belog šuma (što u stvari pri zemljotresu i nastupa), onda se može odrediti konstantna spektralna gustina snage ekvivalentnog belog šuma. Na sl. 1 je prikazan grafik autokorelacione funkcije u okolini tačke $\tau = 0$. Površina autokorelacione funkcije iznosi

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)|\, d\tau$$

Vreme korelacije τ_{kor} približno se određuje izjednačavanjem površina, tj.

$$2\,\tau_{kor}\, R(\sigma) = \int_{\infty}^{\infty} |R(\tau)|\, d\tau$$

Ovde je τ_{kor} vreme unutar koga postoji značajnija korelacija trenutnih vrednosti slučajnog procesa.



Ako se stvarni oblik funkcije spektralne gustine snage pobuđenja zameni vrednošću za $\omega = 0$, biće:

$$f(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, d\tau$$

a za slučaj da je trajanje korelacije pobuđenja kratko, važi

$$\int^{\infty} R(\tau)\, d\tau = 2\,\tau_{kor}\, R(0) = f(\omega = 0) = f_{oekv}.$$

Dakle, konstanta spektralne gustine snage ekvivalentnog belog šuma može se aproksimirati |6| sa:

$$f_{oekv} = 2\,R\,(0)\,\tau_{kor} \tag{20}$$

Prema tome, za iznalaženje ekvivalentnog belog šuma potrebno je imati grafik autokorelacione funkcije pobuđenja, koja se iz seizmičkog zapisa dobija primenom automatskog računara i plotera, gde je mogućno programiranje celog računskog postupka, a posebno Fourierovih transformacija.

Neki autori |2| su činili pokušaje da se pogodnim izborom tzv. filtrirane prenosne funkcije $|H_1(i\,\omega)|^2$ dobije ustaljeno filtriran beli šum, sa minimalnim varijacijama i uklonjenim singularitetima. U daljem procesu simulacije zemljotresnih uticaja ide se i na korišćenje nestacionarno filtriranog belog šuma koji bolje odgovara stvarnim oblicima akcelerograma.

Metodologija prikazana za analizu linearnih diskretnih sistema uopštava se kontinualno raspodeljenom masom |5|.

Napomene o analizi nelinearnih sistema. Probabilistička analiza nelinearnih sistema ne može se sprovoditi prethodno opisanim postupcima, jer ovde više ne važi princip superpozicije. Za nelinearne sisteme, koji su zbog histerezisnih efekata često vremenski zavisni, potrebno je da se generiše skup većeg broja akcelerograma pomeranja tla, da se crtaju odgovarajući spektri brzina ili ubrzanja, pa da se tako dođe do mogućnosti za statističku analizu, menjajući pri tome osnovne fizičke parametre sistema (period, prigušenja). I ovde se uspešno koristi primena pobuđenja definisanog filtriranim belim šumom |2|. Integracija diferencijalnih jednačina kretanja za ovakve nelinearne sisteme (elastoplastični, bilinearni, sa opadajućom krutosti i dr.) sprovodi se tada uobičajenim inkrementalnim postupcima. Na taj način se sprovodi analiza o ponašanju pojedinih delova sistema (npr., spratova zgrade) kod raznih tipova objekata, sve u odnosu na dejstvo zemljotresa. Naravno da je ovakva kompletna analiza moguća jedino uz primenu automatskih računara velikih kapaciteta.

Summary

SOME NOTES DUE TO STOCHASTIC ANALYSIS OF EARTHQUAKE EFFECTS

The paper deals with the general probabilistic procedure to the determination of the behaviour of tall structures due to stochastic earthquake forces. The discrete systems with one as well as with n degrees of freedom are analyzed. The special accentuation is put to the application of white noise. The nonlinear probabilistic analysis is noted briefly, too.

LITERATURA

1. Hurty, W. C., *Rubinstein, M.*, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, In., Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Clough, R. W., Penzien, J., *Dynamics of Structures*, Mc Graw-Hill, New York, 1975.
3. Lin, Y. K., *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Mc Graw-Hill, New York, 1967.
4. Prelog, E., *Metoda končnih elementov*, Univ. Ljubljana, 1975.
5. Brčić, V., *Dinamika konstrukcija*, Građ. knj. Beograd, 1981.
6. Bycroft, G. N., *White Noise Representation of Earthquake, Journ. of the Eng. Mech. Div.*, Proc. of the ASCE, Vol 86, No EM2, April, 1960.

Napomena: Ovaj rad je delimično finansiran od Republičke zajednice za nauku Srbije u okviru projekta „Teorijska i eksperimentalna istraživanja građevinskih konstrukcija, materijala i sredina u kojima se grade".