

АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ВЕРТИКАЛНОГ ЗАСЕКА ПРИМЕНОМ МЕХАНИКЕ ЛОМА

Предраг Митковић¹
Никола Обрадовић²
Драгослав Шумарац³

УДК: 539.42

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2016.055

Резиме: *Одређивање критичне висине вертикалног засека представља веома важан задатак у геотехници. Поред до сада примењиваних решења механике тла, све више истраживача предлаже нова решења заснована на примени механике лома, поготово ако постоје пукотине услед затезања у тлу. У раду је, у кратким цртама, приказано одређивање критичне висине вертикалног засека применом методе граничне равнотеже и применом кинематичке теореме теорије пластичности. Анализирано је неколико радова, у којима су разни истраживачи применили механику лома на решавање овог проблема. Укратко су приказани резултати тих радова и изведени закључци. На крају су дати предлози аутора о могућим будућим истраживањима у овој области.*

Кључне речи: *вертикални засек, пукотина, механика лома, метода густине енергије деформација*

1. УВОД

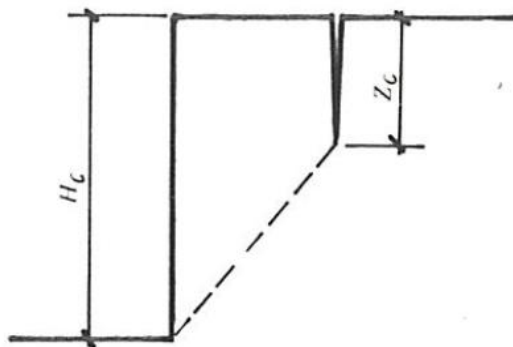
Анализа стабилности вертикалног засека је веома важан задатак у геотехници, поготово када се узму у обзир евентуалне последице губитка стабилности засека. До сада су изведени многобројни поступци како да се одреди критична висина вертикалног засека, односно одређивања фактора сигурности против клизања. Проблем постаје компликованији, ако се у кохезивном тлу, испод неоптерећене површине терена, појављују пукотине услед напона затезања до одређене дубине. Највећи број ових поступака заснива се на примени метода граничне равнотеже. Мана ових метода је занемаривање веза између напона и деформација. Са друге стране, примена граничних теорема теорије пластичности узима у обзир ове везе, преко услова течења и одговарајућег закона течења [1]. Решења заснована на граничној равнотежи су разматрали Fellenius [2], Bishop [3], Kenney [4], Janbu [5]. Заједничко за претходно наведене методе, је да све претпостављају облик клизне

¹ Предраг Митковић, маг. инж. грађ, студент докторских студија, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, mitke_d@yahoo.com

² Никола Обрадовић, маг. инж. грађ., асистент-студент докторских студија, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, nobradovic@grf.bg.ac.rs

³ др Драгослав Шумарац, дипл. инж. грађ., редовни професор, Грађевински факултет, Универзитет у Београду dragosumi@gmail.com

површи, и на основу тако претпостављене клизне површи, анализирају стабилност засека. Такође, претпоставља се да се дубина пукотине не мења, односно да не долази до даље пропагације пукотине.



Слика 1. Диспозиција проблема

Све више аутора користи механику лома како би решили проблем стабилности засека са пукотином. Механика лома не даје само податак о критичној висини засека, већ може и да покаже како се пукотина у тлу даље шири. А облик пропагације пукотине представља облик клизне површи. У радовима [6] и [7], анализирана је примена нумеричких метода, пре свега методе коначних елемената, за одређивање пропагације пукотине, и како та пропагације утиче на свеукупну стабилност засека.

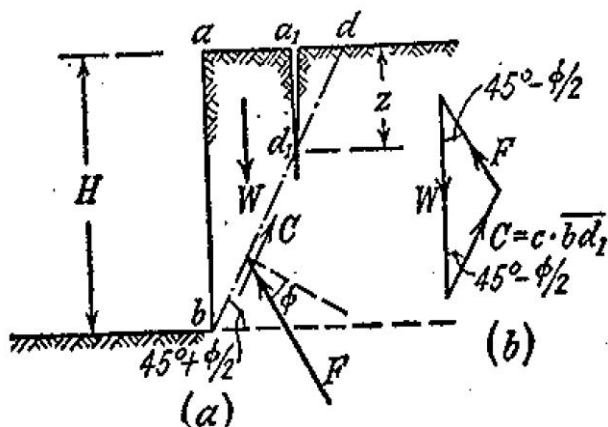
2. КЛАСИЧНЕ МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА СТАБИЛНОСТИ ВЕРТИКАЛНОГ ЗАСЕКА

Прво ће бити приказано Terzaghi-јево решење, засновано на примени методе граничне равнотеже. У сваком типу тла се може направити косина довољно висока и стрма да изазове нестабилност косине. Terzaghi[8] се бавио само условима стабилности против клизања у кохерентним материјалима. Отпорност на смицање је одређена Coulombo-вом једначином:

$$S = C + \sigma g \varphi. \quad (1)$$

Највиши део тла је у стању затезања ако је угао косине већи од угла отпорности против смицања φ у Coulombo-вој једначини. На слици 2. је приказан вертикални засек и елементи потребни за одређивање услова његове стабилности.

Најгрубља метода за одређивање стабилности косине заснива се на претпоставци да клизна површина bd на слици 2а је равна и са хоризонталом заклапа угао $45^\circ + \varphi/2$.



Слика 2. Вертикални засек стр.125[6]

Укупни хоризонтални притисак P_A на вертикални пресек између површине и дубине H је дат једначином:

$$P_A = -2cH \frac{1}{\sqrt{N_\varphi}} + \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1}{N_\varphi} \quad (2)$$

где је $N_\varphi = \text{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)$ коефицијент бочног отпора тла. Ако је

$$H = H_c = 4 \frac{c}{\gamma} \sqrt{N_\varphi}, \quad (3)$$

тада је укупни притисак на вертикални пресек висине H_c једнак нули. За $\varphi=0$, вредност N_φ је једнака јединици па је критична висина:

$$H_c = 4 \frac{c}{\gamma} \quad (4)$$

Горњи део тла уз засек је у стању затезања. Ако нека од пукотина услед затезања сече потенцијалну клизну површину bd на слици 2а на дубини z испод спољне површине, призматично тело тла a_1dd_1 не учествује у ножичном клизању.

Услови за равнотежу тела уз засек су представљени полигоном сила приказаним на слици 2б. Нека је тежина овог тела по јединици дужине W :

$$W = \frac{1}{2} \gamma (H^2 - z^2) \text{tg}(45^\circ - \varphi/2) = \frac{1}{2} \gamma (H^2 - z^2) \frac{1}{\sqrt{N_\varphi}} \quad (5)$$

Укупна кохезија дуж bd_1 :

$$C = (H - z) \frac{c}{\cos(45^\circ - \varphi/2)}, \quad (6)$$

а реакција делује под углом φ према нормали на bd_1 . Из полигона сила добијамо:

$$W = \frac{1}{2} \gamma (H^2 - z^2) \frac{1}{\sqrt{N_\varphi}} = 2C \cos(45^\circ - \varphi/2) = 2c(H - z) \quad (7)$$

Или

$$H = H_c' = 4 \frac{c}{\gamma} \sqrt{N_\varphi} - z = H_c - z \quad (8)$$

Где је H_c критична висина одређена једначином (3). У нормалним условима дубина пукотина услед затезања није већа од око половине висине вертикалног засека. Ако претпоставимо да је $z = H_c'/2$ из једначине (8) добијамо:

$$H_c' = 2,67 \frac{c}{\gamma} \sqrt{N_\varphi} = \frac{2}{3} H \quad (9)$$

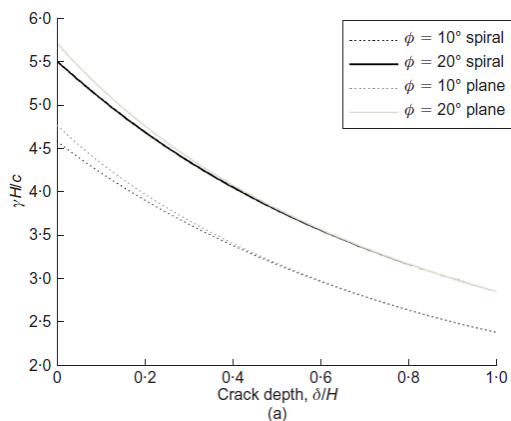
H_c' представља максималну висину вертикалног засека који је ослабљен због појаве пукотина услед затезања. Ако величина неподупртог вертикалног засека не премаши вредност H_c' , може се очекивати да ће засек остати стално стабилан.

Као што је напоменуто у уводу, мана примене метода граничне равнотеже је то, што нису узете у обзир везе између напона и деформација. Ово се исправља применом граничних теорема теорије пластичности [1]. Према статичкој теореме, ако је могуће одредити поље напона, такво да су у свакој тачки тела задовољени услови равнотеже, и тако да нигде није прекорачен услов течења, онда то поље напона одговара доњој граници граничног оптерећења. Према кинематичкој теореме, ако је могуће одредити механизам лома услед спољашњег оптерећења, такав да је рад спољашњих сила једнак раду унутрашњих сила, и ако је задовољен услов течења, онда тај механизам одговара горњој граници спољашњег оптерећења.

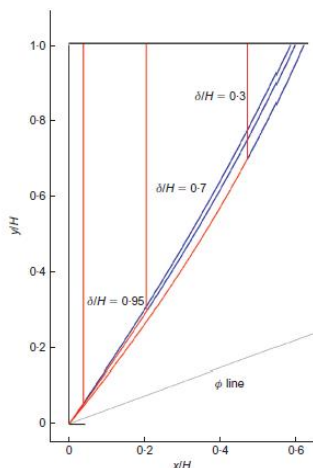
У раду [9], применом кинематичке теореме теорије пластичности, изведена је зависност бездимензионог коефицијента, односно фактора стабилности

$$N = \gamma H / c \quad (10)$$

у функцији удаљености пукотине од лица засека и дубине пукотине. Минимална вредност фактора стабилности одговара критичној висини вертикалног засека.



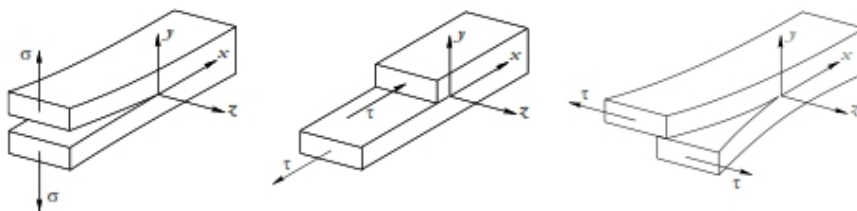
Слика 3. Зависност фактора стабилности и односа дубина пукотине/висина засека, за тла са два различита угла унутрашњег трења, и два претпостављена облика клизне површи [9].



Слика 4. Облици клизне површи у зависности од односа дубина пукотине/висина засека и удаљења пукотине од лица засека, за угао унутрашњег трења од 20° Црвенс линија ограничава масу тла која клиза, а плавалинија представља претпостављен облик клизне површи [9].

3. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МЕХАНИКЕ ЛОМА

Теорију механике лома је први проучио Griffith 1920 године коју је Irwin проширио уводећи појмове фактора интензитета напона. Постоје три облика(мода)деформације прслине приказаних на слици(5):



Слика 5. Облици деформације прслине [10]

Фактор интензитета напона је параметар који одређује ниво напона, или деформације или густине енергије деформације, еластични сингуларитет у близина врха идеалне прслине у напрегнутом линеарно еластичном чврстом телу. Индекси I, II, III означавају факторе интензитета напона за мод I, II и III ако је познато напонско стање у околини врха прслине.

Фактори интензитета напона су [10]:

$$\left. \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \begin{cases} \sigma_{yy}(x, y=0) \\ \sigma_{xy}(x, y=0) \\ \sigma_{yz}(x, y=0) \end{cases} \quad (10)$$

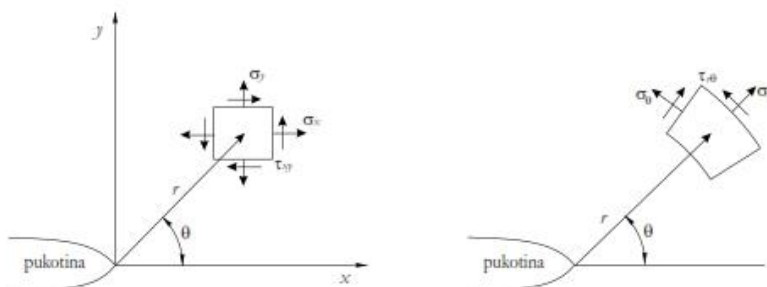
У близини врха пукотине главни део напона је:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)] \quad (11)$$

А главни део померања је :

$$U_i(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I g_i^I(\theta) + K_{II} g_i^{II}(\theta) + K_{III} g_i^{III}(\theta)] \quad (12)$$

Индекси (i,j) се односи на картезијанске (x_1, x_2, x_3) или на цилиндричне координате (r, θ, z) . $f_{ij}^I(\theta)$, $f_{ij}^{II}(\theta)$, $f_{ij}^{III}(\theta)$ и $g_i^I(\theta)$, $g_i^{II}(\theta)$, $g_i^{III}(\theta)$ су бездимензионалне функције угла θ .



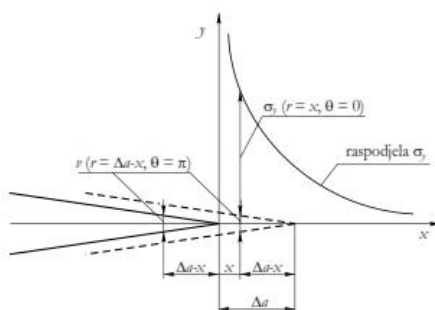
Слика 6. Напони у врху прслине[10]

Помоћу Westergaardових функција напрезања може се доћи до аналитичког решења расподеле напрезања око врха пукотине:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] - \left[K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \left[K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \left[K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (15)$$



Слика 7. Пропагација прслине [10]

Померања су такође у потпуности описана фактором интензитета напона[10]:

$$u = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (16)$$

$$v = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (17)$$

Према S-критеријуму или критеријуму минимума густине енергије деформација, правац ширења пукотине пролази кроз тачку на кружници која је описана око врха пукотине, а у којој је енергија деформације минимална. Математички се овај критеријум може написати и користи се за линеарно еластичне материјале:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (18)$$

где је S фактор густине енергије деформација, дефинисан изразом:

$$S = r_0 \frac{dW}{dA} \quad (19)$$

где је dW/dA функција густине енергије деформација по јединици површине, а r_0 удаљеност од врха пукотине. Коришћењем израза (13), (14) и (15) може се добити енергија деформација по јединици површине, чијим се уврштавањем у претходним изразима добија фактор густине енергије деформација:

$$S = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (20)$$

где су фактори a_{ij} функције угла θ :

$$a_{11} = \frac{1}{16G\pi} [(1 + \cos \theta)(\kappa - \cos \theta)] \quad (21)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16G\pi} \sin \theta [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \quad (22)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16G\pi} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \quad (23)$$

Применом S критеријума на израз (20) када је $\theta_c = 0$, $K_{II} = 0$ и $A_{11} = 1/4\mu(1 - 2\nu)$, добијамо:

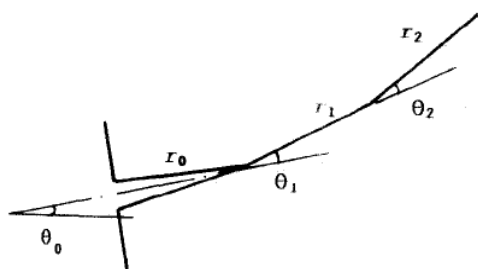
$$S_c = \frac{1 - 2\nu}{4\mu\pi} K_{IC}^2 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} K_{IC}^2 \quad (24)$$

У жилавим материјалима, нпр. земљи, повећање пукотине може се представити као константно повећање односа густине енергије деформација по јединици површине као у изразу (25):

$$\left[\frac{\partial W}{\partial V} \right]_c = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \frac{S_i}{r_i} = \dots = \frac{S_c}{r_c} = \text{const.} \quad (25)$$

Где је $\left[\frac{\partial W}{\partial V} \right]_c$ критична енергија деформација, а r_i повећање дужине пукотине. Ако

су познате вредности S_c и r_c , могуће је одредити величину за коју се пукотина шири и правац ширења пукотине. Наравно, за одређивање повећања дужине пукотине, и правца користе се нумеричке методе, као што је метода коначних елемената, пошто одређивање стања напона у маси тла са пукотином, представља изузетно компликован задатак.

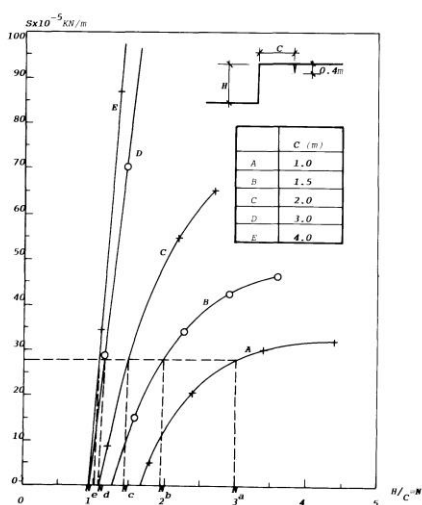


Слика 8. Начин пропације пукотине [6]

Прорачун применом методе коначних елемената је итеративан. Прелина расте у одређеним инкрементима. Након једне итерације, познат је прираштај дужине пукотине и правац пропације пукотине. Пошто је сада дошло до промене геометрије тела, потребно је генерисати нову мрежу коначних елемената, и поновити прорачун.

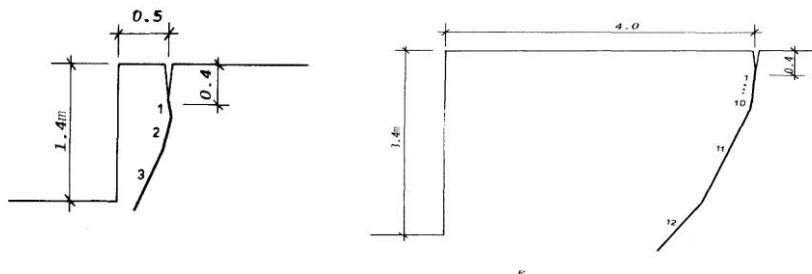
4. КОНКРЕТНИ ПРИМЕРИ ПРИМЕНЕ МЕХАНИКЕ ЛОМА

У раду [6] је приказана анализа стабилности вертикалног засека ако постоји пукотина. Полазећи од задатих параметара тла, било класичних-угао унутрашњег трења, кохезија, уведени су и нови параметри. Пре свега критични фактор интезитета напона за мод I, и критична густина енергије. Аутори овог рада су користећи метод коначних елемената, спровели параметарску анализу, чији резултат представљају дијаграми зависности критичне густине енергије и геометрије конкретног проблема-однос удаљености пукотине и висине засека. Дати дијаграми се могу користити на следећи начин: ако је позната критична густина енергије за неко тло, која се одређује лабораторијским истраживањима, и ако је позната геометрија пукотине (дубина и удаљеност од ивице засека), може се одредити критична висина засека. Наравно, употребљивост ових дијаграма је ограничена на анализирано тло.



Слика 9. Дијаграм зависности критичне густине енергије и удаљености пукотине од лица засека [6]

Поред ових дијаграма, у раду [5] дато је и како се пукотина шири, односно, начин пропације пукотине, који се може довести у везу са обликом клизне површи.

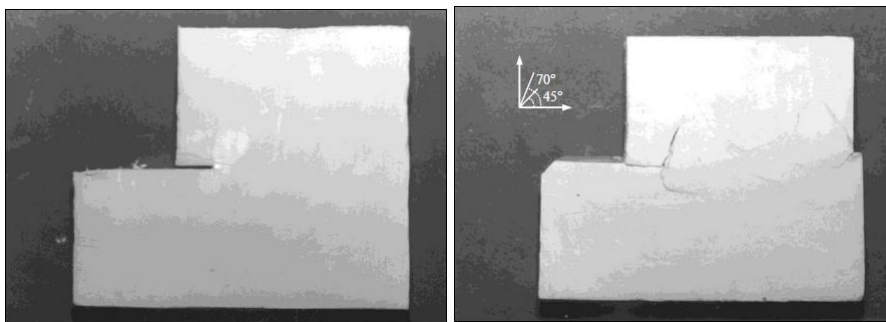


Слика 10. Начин пропације пукотине [6]

Из претходних слика се види предност примене механике лома на анализу стабилности вертикалног засека са пукотином. Може се узети да пропација пукотине, односно облик пукотине, одговара облику клизне површи. Применом било метода граничне анализе, или граничних теорема теорије пластичности, претпоставља се облик клизне површи, и тражи се клизна површ са минималним фактором стабилности, док се применом механике лома, добија тачно како се пукотина шири даље.

У раду [7] је приказана анализа стабилности вертикалних ископа у конкретним случајевима на терену, користећи механику лома, лабораторијска истраживања и нумеричке методе. Веома битан део овог рада су лабораторијска истраживања на глинама у којима су направљене пукотине. Ови експерименти не захтевају

компликовану опрему и могу се користити за одређивање параметара тла потребних ако се проблем решава применом механике лома. На слици се може видети узорак и пукотина у узорку, као и како се пукотина пропагира током nanoшења оптерећења. Овај опит је сличан опиту директног смицања. Закључак аутора овог рада је да се применом механике лома добијају тачнији подаци о понашању засека, него применом класичних решења. Најзначајније је да је могуће на једноставан начин доћи експерименталним путем до карактеристика тла потребних за анализу применом механике лома.



Слика 11. Узорак који је испитиван, пре и након опита [7]

5. ЗАКЉУЧАК

Из претходно приказаних примера, може се закључити да се механика лома може применити на решавање проблема стабилности вертикалног засека. Наравно треба обратити пажњу да ли се у свим ситуацијама може применити механика лома. Због структуре тла, механика лома има највећу примену ако је тло глина. Механика лома се потпуно може применити ако је вертикалан засек направљен у стени. Један од могућих проблема је одређивање карактеристика тла потребних за ову анализу, пре свега S_c и K_{Ic} . Требало би осмислити експерименте из којих би ове физичке величине могле једноставно да се одреде. Ови експерименти би могли да буду модификација постојећих, пре свега модификација опита директног смицања. Будућа истраживања би могла да се баве упоредном анализом примене метода граничне равнотеже, граничне анализе теорије пластичности и примене метода механике лома. За одређену диспозицију проблема, карактеристике тла, одредити на сва три начина фактор стабилности и упоредити резултате. Такође, веома интересно би било спровести разне параметарске анализе, довести у везу висину засека, растојање пукотине, дубину пукотине са фактором стабилности, или другим физичким величинама које описују овај проблем. Исто тако би могла да се изводе испитивања и на терену, како би се у реалним условима тла, установило колика је примењивост механике лома.

У сваком случају, будућа истраживања из ове области су преко потребна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chen W F, Scawtorn C R.: *Limit analysis and limit equilibrium solutions in soil mechanics*, Fritz Engineering Laboratory, Department of Civil Engineering, Lehigh University (1968), 17-24
- [2] W.L. Fellenius, 'Calculation of the stability of earth dams.', *Trans. 2nd Congr. On Large Dams, Washington, 4~ 445-459 (1936)*.
- [3] A.W. Bishop, 'The use of the slip circle in the stability analysis of earth slope', *Geotechnique 5*, 7-17 (1955).
- [4] T.C. Kenney, 'An examination of the methods of calculating the stability of slopes', *MSc Thesis, Imperial College (1956)*.
- [5] N. Janbu, 'Stability analysis of slopes with dimensionless parameters', Harvard University, *Soil Mechanics Series, No. 46 (1957)*.
- [6] W.M. Cai, V.Murti, S. Valliappan, 'Slope stability analysis using fracture mechanics approach', *Theoretical and applied Fracture Mechanics 12*, 261-281, (1990)
- [7] Walter G. Kutchke, 'Investigation of lateral stress relief on the stability of $\phi=0$ using laboratory, fracture mechanics, and finite element method ', PhD Thesis, University of Pittsburgh (2011)
- [8] Karl Terzaghi, *Theoretical soil mechanics*, 118-127 (1943)
- [9] Utili, S., ' *Investigation by limit analysis on the stability of slopes with cracks* ' . *Geotechnique (2013) vol. 63 , No. 2, 140–154*
- [10] Драгослав Шумарац, Душан Крајчиновић, *Основи механике лома (1990)* Научна књига, 61-73

STABILITY ANALYSIS OF VERTICAL SLOPE USING FRACTURE MECHANICS

Summary: *Determination of critical height of vertical slope is a very important task in geotechnical engineering. Recently, increasing number of researchers is suggesting new solutions to this task using principles of fracture mechanics, instead of classical solutions based on principles of soil mechanics. This is especially used when tension crack is present in soil. In this paper, a solution to this problem based on limit equilibrium and a solution based on upper bound theorem of limit analysis. is presented. Also, analysis of several papers from different researchers, who used fracture mechanics to solve this problem are considered. Findings obtained in those papers are presented and conclusions are made. At the end, authors' suggestions of the way to solve this problem are given.*

Keywords: *Vertical slope, crack, fracture mechanics, strain energy density criterion*