МОДЕЛ ПРИНУДНИХ ОСЦИЛАЦИЈА КОНСТРУКЦИЈА СА ИНХЕРЕНТНОМ НЕСИМЕТРИЧНОШЋУ. ТАЧНА РЕШЕЊА.

Звонко Ракарић [1]

УДК: 534.01 : 517.9
DOI:10.14415/konferencijaGFS 2016.024

Резиме: *Поред добро развијене и опште познате линеарне теорије осцилација конструкција, све више се јавља потреба, наметнута савременим захтевима у пројектовању, ка узимању у обзир нелинеарности у разматраном систему. Узрок нелинеарности може бити различит. У овом раду ће акценат бити стављен на случајеве који узимају у обзир појаву несиметричности, и то оне изазване различитом крутошћу структуралних елемената при сабијању, односно затезању, као и геометријску несиметричност саме конструкције. Формираће се одговарајући механички и математички модел коришћењем чисто квадратне и мешовите нелинеарности у реституционој сили. Показаће се тачна аналитичка решења нелинеарних принудних осцилација применом Јакобијевих елиптичких функција, што представља нов резултат у овој области. Такође ће се дати и одговарајућа веза са линеарном теоријом. Овај рад има и едукативни карактер, јер му је циљ и да да допринос већој примени елиптичких функција у инжењерству, што је данас применом симболичких софтвера значајно олакшано.*

Кључне речи: *Нелинеарне осцилације, квадратна нелинеарност, принудне осцилације, Јакобијеве елиптичке функције, транскритична бифуркација*

1. УВОД

Савремени приступ у пројектовању конструкција све више намеће потребу да се узимају у обзир присутне нелинеарности које могу имати различито порекло [1]. Одређени материјали, као и структурални елементи могу показивати различито понашање приликом сабијања или затезања. Такође, може постојати геометријска просторна несиметрија, како у појединачном конструктивном елементу, тако и целокупној разматраној конструкцији. Приликом моделовања такве несиметричности доводе до нелинеарности у моделима који су описани било алгебарским или диференцијалним једначинама. Једна од манифестација тога је нелинеарна реституциона сила, веома често полиномијалне форме. У овом раду ће се размотрити такав случај у којем је реституциона сила нелинеарна функција од померања и која поред линеарног, укључује и квадратни члан.

[1] Доц. др. Звонко Ракарић, Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука, Департман за Техничку механику, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад, Србија, тел: 021 485 2242, e – mail: zvonko@uns.ac.rs

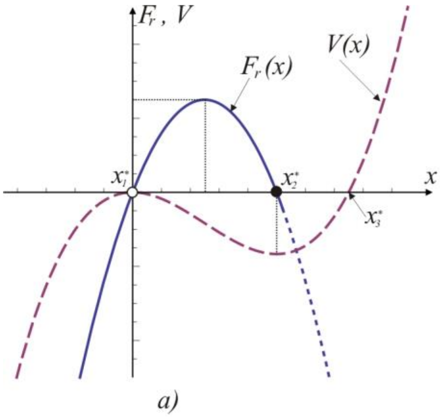
Поменуте нелинеарности могу бити занемарене и прећи на добро утврђено поље које је обухваћено линеарним теоријама. Међутим, због постојања нелинеарности, линеарна теорија некада не може у потпуности да да задовољавајућа решења и одговоре. Наиме, постоје различите манифестације и феномени, који су искључиво каракетристика и последица нелинеарности. Ту можемо навести, а везано за например, проблеме вибрација, следеће: међусобна веза између амплитуде и фреквенције, појава скокова (хистерезиса) у амплитудно фреквентном дијаграму, бифуркације равнотежних положаја у односу на које се врше осцилације...
Као што је већ наглашено, савремени приступ пројектовању укључује употребу нових материјала, све лакших конструкција и са све виткијим структуралним елементима. Са друге стране, често се од таквих конструкција захтева значајније повећање носивости и стабилност према поремећајима. Поремећаји и оптерећења могу имати како статички (квазистатички), тако и значајан динамички карактер који представља својеврсан изазов за пројектанте. Једна од области у којој је неопходно обратити посебну пажњу на ово, су вибрације у конструкцијама. Такође, у грађевинским контрукцијама од интереса су анализе стабилности, а које су у вези са бифуркацијом равнотежних положаја. У првом случају, када се ради о вибрацијама или осцилацијама углавном се користи линеарна теорија. Што се тиче анализе бифуркације равнотежних положаја, ту се опет углавном користи статички (квази-статички) приступ, тј. задата оптерећења су или непроменљива са временом, или се врло споро мењају. Овај рад има циљ да на једном месту, обједини ова два проблема узимајући у обзир модел који у себе укључује нелинеарност. Да би суштина приступа била што разумљивија, теорија ће бити разматрена на релативно једноставном једнодимензијском моделу, али то не ограничава његову применљивост и за вишедимензијске проблеме као основа за модалну анализу. Може се нагласити и да је уобичајено да се проблеми вибрација и бифуркације рвнотежних положаја обично третирају одвојено, како приликом редовних курсева на инжењерским студијама, тако и у конкретним инжењерским применама. Из тог разлога, овај рад може послужити као смерница како онима који се директно срећу са овим проблемима, такође и у склопу материје која може бити презентована студентима инжењерских смерова. Додатно, у раду се користе специјалне Јакобијеве функције [2], које иако у употреби већ 200 година, још увек нису довољно заступљене у инжењерству. При томе, елиптичке функције могу бити посматране као извесна генерализација хармонијских, и као такве су погодне управо у бројним нелинеарним проблемима. Иако по својој природи компликованије од тригонометријских, данас примена елиптичких функција применом симболичких софтвера добија на својој актуелности. Из тог разлога, овај рад може бити схваћен и као прилог доприносу популаризацији веће примене елиптичких функција.

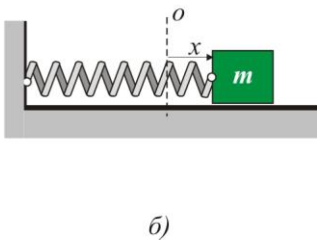
2. О РЕСТИТУЦИОНОЈ СИЛИ СА КВАДРАТНИМ ЧЛАНОМ

У овом раду ће се посматрати нелинеарна реституциона сила као полиномијална функција од померања са линеарним и квадратним чланом. На Слици 1 су приказани карактеристични графици реституционе силе F_r (пуна линија) и њој одговарајућа потенцијална енергија $V(x)$ чији математички модели (у бездимензијској форми) гласе

$$F_r(x) = \pm c_1 x - c_2 x^2, \quad V(x) = -\frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{4} c_2 x^3, \qquad (1а,б)$$

где су c_1 и c_2 коефицијенти, који ће се у овом раду звати: линеаран, односно нелинеаран коефицијент, респективно. Претпоставиће се да је нелинеарни коефицијент сталног предзнака, док знак испред линеарног може бити позитиван или негативан. Треба нагласити и да у зависности од математичког модела у којем се оваква реституциона сила може наћи, може извршити бездимензионисање на такав начин да један или оба коефицијента буду једнака јединици. Међутим, овде ће се претпоставити да је, управо због што бољег увида у утицај ових коефицијената, процес бездимензионисања урађен тако да c_1 и c_2 буду различити од јединице.





Слика 1. а) График квадратне реституционе силе (пуна линија) и потенцијалне енергије (испрекидана линија); б) систем маса-опруга.

Као што се са Слике 1 може видети (представљен је случај са негативним предзнаком испред линеарног члана), за овакву реституциону силу је карактеристична несиметрија у односу на координатни почетак. Примењено на аксијално оптерећен штап као најједноставнији случај напрезања, рекли би да је другачија зависност сила-померање у случају затезања, односно притиска. Штавише, у једном делу реституциона сила расте, достиже максималну вредност, а затим опада. Као што је уобичајено, ово се може дискутовати на једноставном моделу: маса – опруга. У том смислу, изразом (1а) је описана сила у нелинеарној опрузи. Овакав модел одговара конзервативној сили чија је потенцијална енергија на Слици 1 приказана са испрекиданом линијом. Могу се уочити два локална екстремума функције $V(x)$ за положаје $x_1^* = 0$ и $x_2^* = c_1 / c_2$. Такође, уочава се тзв. потенцијална јама ограничена са вредностима: $x_1^* = 0$ и $x_3^* = (3/2)(c_1 / c_2)$. Уколико се посматра кретање система маса-опруга приказаног на Слици 1б) без дејства спољашње силе ($F = 0$), тј., када се посматра кретање само „слободног” система, тада почетни услови у потпуности дефинишу кретање. При томе, у зависности од почетних услова (који дефинишу механичку енергију коју систем поседује), кретање може бити ограничено (а самим тим и осцилаторно), као и неограничено, тј, кретање које неће имати осцилаторни карактер. У првом случају, када се ради о осцилаторном кретању, може се успоставити аналогија са кретањем тачке унутар потенцијалне јаме између положаја x_1^* и x_3^*.

3. ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

У овој Секцији ће се размотрити осцилаторно кретање система (Слика 1б) који је описан следећом диференцијалном једначином:

$$\ddot{x} \pm c_1 x + c_2 x^2 = F(t), \tag{2}$$

где је са $F(t)$ означена спољашња периодична сила, $F(t) = F(t+T)$ и где је T њен период. Једначина (2) је нелинеарна и нехомогена диференцијална једначина другог реда. У циљу одређивања њеног решења, најпре ће се размотрити случај када је $F = 0$, тј. решење слободног система, односно хомогене једначине.

3.1 Тачно решење слободног осцилатора

У случају слободног система описаног једначином (2) за $F = 0$, познато је да постоји тачно решење (осцилаторног кретања) које је дефинисано следећим изразом [3]:

$$x(t) = A_0 + A_2 \,\mathrm{sn}^2(\omega t, m). \tag{3}$$

У изразу (3), sn означава Јакобијеву елиптичку син функцију [2] која је дефинисана са две величине: аргументом $u = \omega t$ и параметром m (квадрат модула елиптичке функције). Уврштавањем претпостављеног решења (3) у (хомогену) једначину (2) долази се до система алгебарских једначина по A_0, A_2, ω и m. Решавањем алгебарских једначина, параметри A_0, A_2, ω се могу експлицитно изразити у функцији од m и они гласе (за случај позитивног предзнака испред линеарног члана)

$$A_0 = \frac{c_1}{2c_2}\frac{1-2m-D}{D},\ A_2 = \frac{3c_1}{2c_2}\frac{m^2}{D},\ \omega = \frac{\sqrt{c_1}}{2}\frac{1}{\sqrt{D}}, \tag{4а,б,в}$$

где је $D = \sqrt{m^2 - m + 1}$. У случају негативног предзнака испред линеарног коефицијента у једначини (2), тачно решење има исти облик као израз (3) али су коефицијенти A_0, A_2 и ω дефинисани на следећи начин:

$$A_0 = -\frac{c_1}{2c_2}\frac{m+1+D}{D},\ A_2 = \frac{3c_1}{2c_2}\frac{m}{D},\ \omega = -\frac{i\sqrt{c_1}}{2}\frac{1}{\sqrt{D}}. \tag{5а,б,в}$$

У изразе (5а,б,в) се коефицијент c_1 уноси са негативним передзнаком. Са i је означена имагинарна јединица. Представљено тачно решење слободног система ће сада послужити за одређивање тачног решења принудних нелинеарних осцилација.

3.2 Тачно решење устаљених осцилација принудног осцилатора

У циљу одређивања тачног решења (устаљених осцилација) за случај постојања спољашње принуде, искористиће се приступ који је предложен у раду [4] за случај Дуфинговог осцилатора. Наиме, претпоставиће се да је спољашња периодична сила на одређени начин повезана са решењем устаљених осцилација. Претпоставиће се веза облика $F = Bx$. Уврштавањем у (2) добија се

$$\ddot{x} - (B - c_1)x + c_2 x^2 = 0, \tag{6}$$

Као што се види, једначина (4) је аутономна и њено се решење такође може представити са (3) при чему се у изразима (4а,б) и (5а,б) уместо c_1 узима $B - c_1$. Ова разлика ће се представити са новим параметром $\mu = B - c_1$. Користе се одговарајући изрази (4а,б) или (5а,б) у зависности од предзнака испред параметра μ. Треба и нагласити да од предзнака испред μ, у систему (6) долази до измене равнотежног положаја око којег се врши осцилаторно кретање. Ова узмена се описује са *транскритичном бифуркацијом* (Слика 3), а као бифуркациони параметар се јавља новоуведени параметар μ. Значи, на овај начин се спољашњом периодичном силом може утицати на промену квалитативног понашања разматраног осцилаторног система, и као што ће бити показано, тај утицај може у потпуности да буде контролисан.

Имајући у виду речено, циљ је да се за нелинеарни систем описан једначином (2), пронађе она спољашња периодична принуда која ће изазвати неко жељено понашање система. Жељено понашање система је описано одређеним решењем $x_p(t)$. При томе, претпостављајући, како је речено везу између принудне силе, „улаза” (*F*) и „излаза” (*x*), у форми $F = Bx$, те свођењем неаутономног система (2) на аутономан систем (6), приступа се његовом решавању на основу израза (4а,б) или (5а,б). Параметри које је потребно одредити су: m, ω, A_0, A_2 и *B*. При томе су на располагању три једначине (4а,б,в) или (5а,б,в). Значи, два параметра могу бити произвољно изабрана. Иако би се, евентуално могло помислити да је овај приступ јако специјалан, управо ова слобода избора одређених параметара указује на далеко општији карактер оваквог приступа на проблеме нелинеарних осцилација. Например, може се предпоставити квадрат модула, *m* и „кружна“ фреквенција ω као познате, задате величине. Иначе, за ово може да постоји и објашњење, имајући у виду физику проблема. Наиме, параметар *m* дефинише међусобни однос хармоника (када се елиптичка функција развије у њој одговарајући Фуријеов ред) излазног решења [1], док заједно *m* и ω дефинишу период, који за случај cn или sn функције износи $T = 4K(m)/\omega$. Са $K(m)$ је означен елиптички интеграл прве врсте. Сада се за усвојене вредности *m* и ω одређује најпре параметар *B* користећи израз:

$$B = c_1 + 4\omega^2 \sqrt{1 - m + m^2}\ , \tag{7}$$

а затим параметри A_0 и A_2 на основу

$$A_0 = \frac{(B-c_1)}{2c_2}\frac{m+1+\sqrt{1-m+m^2}}{\sqrt{1-m+m^2}},\ A_2 = -\frac{3(B-c_1)}{2c_2}\frac{m}{\sqrt{1-m+m^2}}, \tag{8а,б}$$

Овако одређени параметри се затим уносе у решење дефинисано са (3). Иначе, изразом (7) је дефинисан параметар *B*, као однос између „потребне“ спољашње принуде и „жељеног“ резултујућег решења устаљених осцилација. Као илистрација даће се следећи пример.

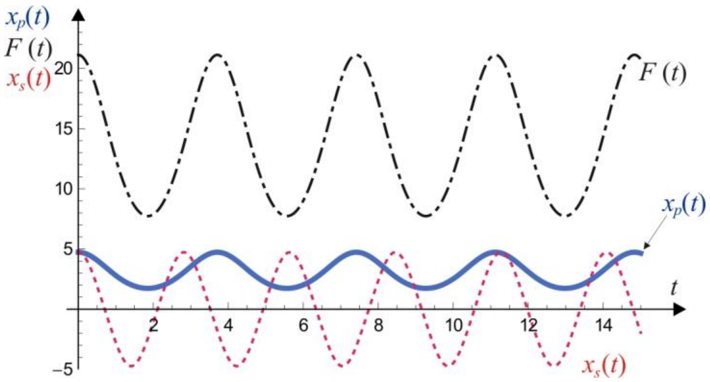
Пример: Посматра се систем моделован следећом једначином:

$$\ddot{x}+c_1x+c_2x^2 = B_0 + B_2\,\mathrm{sn}^2(\Omega t, m), \tag{9}$$

где су: $c_1 = c_2 = 1, m = 0.5,$ и $\Omega = 1$. Треба приметити да слободан систем, тј,. систем у којем је десна страна једначине (9) једнака нули, може вршити (у зависности од почетних услова) осцилаторно кретање око положаја $x^* = 0$ (Слика 3). Користећи изразе (8а,б), одређује се решење за кретање система (9), као и одговарајућа периодична сила. Добијена решења гласе:

$$x_r(t) = 4.732 - 3\,\mathrm{sn}(t,0.5),\ F(t) = 21.124 - 13.392\,\mathrm{sn}^2(t,0.5), \tag{10а,б}$$

Одређена вредност параметра *B* на основу (7) износи $B = 4.464$. На Слици 2 је поред решења за устаљено осцилаторно кретање (пуна дебља линија), дат и график спољашње периодичне силе (линија црта-тачка). Такође је на Слици 2 приказано и решење за кретање слободног система које представља осцилаторно кретање у потенцијалној јами око координатног почетка. Ово кретање одговара графику горе лево на Слици 3.



Слика 2. Решење (10а) осцилатора (9) (дебља пуна линија); Спољашња периодична сила (10б) (линија црта тачка); Осцилаторно кретање слободног система (9) за $F = 0$ *(тачкаста линија).*

Као што се може видети, спољашњом периодичном силом је остварено померање положаја око кога се врши осцилаторно кретање. При томе, то померање, као и само резултујуће осцилаторно кретање је могуће у потпуности контролисати одговарајућим избором параметара.

3.3 Параметар *B*. Аналогија са линеарним системом

Овде ће се укратко појаснити улога параметра B и дати одговарајућа веза са линеарним осцилатором. Наиме, на основу предпостављене везе $F = Bx$ произилази да реципрочна вредност овог параметра износи

$$\frac{1}{B} = \frac{A_p}{F_0}, \tag{11}$$

што значи да $1/B$ представља однос амплитуде одзива (амплитуде принудних устаљених осцилација) према амплитуди периодичне силе. При томе се може рећи да $1/B$ дефинише амплитуду одзива за јединичну амплитуду принудне силе и на одређени начин указује колико се амплитуда принудних осцилација увећала у односу на јединичну вредност амплитуде принудне силе. Овај приступ је уобичајен у теорији линеарних осцилација.

Међутим, у случају нелинеарних осцилација постоји веза између амплитуде и фреквенције (или периода). У том случају, може погодније да буде представљање и коришћење параметра $B = F_0 / A_p$ који ће се назвати „фактор амплитуде принуде" (ФАП). Другим речима, ово се може исказати на следећи начин: која спољашња периодична сила ће изазвати жењени одзив са амплитудом A_p.

Може се и показати да приказани поступак, где се усваја веза $F = Bx$ може применити и у случају линеарног принудног осцилатора и довести до добро познатог резултата. Наиме, у случају линеарног осцилатора (хармонијски осцилатор)

$$\ddot{x} + c_1 x = 0,, \tag{12}$$

добро је познато да се решење може представити преко хармонијске функције $x(t) = A\cos\omega t$, где је $\omega = \sqrt{c_1}$ сопствена (природна) кружна фреквенција. Претпоставимо сада да се хармонијски осцилатор подвргне дејству периодично променљиве силе F

$$\ddot{x} + c_1 x = F. \tag{13}$$

У духу претходно описаног приступа, усвојиће се да је $F = Bx$, те уврштавањем у (13) долази се до једначине

$$\ddot{x} + (c_1 - B)x = 0, \tag{14}$$

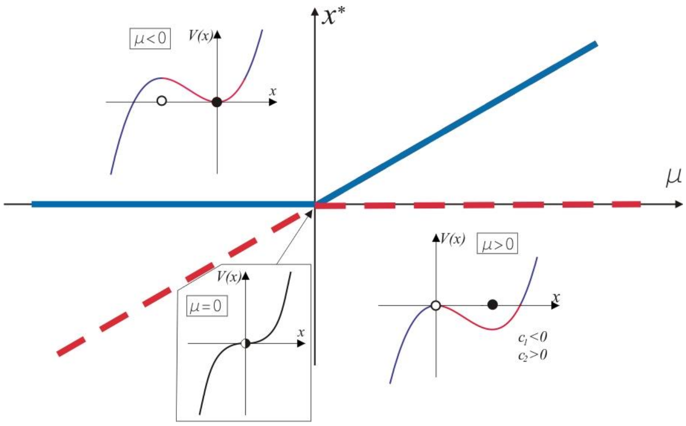
која опет представља хомогену линеарну диференцијалну једначину и чије је решење $x_p = A_p \cos\omega_p t$ и где је сада

$$\omega_p^2 = \Omega^2 = c_1 - B, \rightarrow \frac{1}{B} = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}, \tag{15}$$

У изразу (15) се види добро познати израз за амплитуду принудних осцилација $A_p = 1/B$ у функцији природне фреквенције ω и фреквенције принудне силе Ω када је амплитуда принудне силе сведена на јединицу. И овде се уочава да применом описаног поступка, решење принудних осцилација је у складу са решењем слободног осцилатора.

4. ФАКТОР АМПЛИТУДЕ ПРИНУДЕ (ФАП) КАО БИФУРКАЦИОНИ ПАРАМЕТАР

На Слици 3 је приказан дијаграм транскритичне бифуркације који је могућ у посматраном систему. Дата је зависност равнотежних положаја x^* (око којег се могу вршити осцилаторна кретања) од бифуркационог параметра μ који је дефинисан са $\mu = B - c_1$. Као што се на дијаграму види, у случају $\mu < 0$, могуће је осцилаторно кретање око равнотежног положаја које одговара нултој џ координати. Тај равнотежни положај је стабилан и представљен је (на левој координатној полуравни) са дебљом линијом која се поклапа са абсцисом. Користећи аналогију са кретањем тачке у потенцијалној јами, то одговара црном кружићу на графику горе лево Слике 3. Ту постоји и нестабилан равнотежни положај (испрекидана линија и којем одговара положај дефинисан белим кружићем на истом графику.



Слика 3. Бифуркациони дијаграм.

Повећавањем параметра μ, нестабилан равнотежни положај се све више приближава стабилном равнотежном положају. Критична вредност параметра μ је нула када је координатни почетак полустабилан равнотежни положај. Даљим повећањем параметра μ, координатни почетак постаје нестабилан равнотежни положај, док се сада појављује нови стабилни, али са друге стране. Као што се може видети, овде за свако μ у разматраном систему постоји стабилан равнотежни положај, при чему се бифуркационим параметром утиче на измену тих положаја, што је типично за случај транскритичне бифуркације.

5. ЗАКЉУЧАК

У раду је разматран механички систем нелинеарног принудног осцилатора са једним степеном слободе. Предпостављена је нелинеарна реституциона сила која поред линеарног садржи и члан са квадратном функцијом од померања. Приказано је добијање тачног решења нелинеарног принудног осцилатора, тако што је искоришћено познавање тачног решења у случају слободног система. Показује се да је у суштини природно неки нелинеарни слободан осцилатор подвргнути дејству периодичне спољашње силе који припада класи решења слободног система. То је идентично добро познатом приступу у линеарној теорији у којем хармонијски осцилатор чије је решење хармонијска функција буде подвргнут принудној сили која је такође хармонијска. Могућност познавања тачног аналитичког решења неког нелинеарног осцилатора обезбеђује потпуну контролу таквог система и остварење жељеног стања. Могуће је чак утицати и на квалитативну измену понашања система, а што је овде показано постојањем транскритичне бифуркације равнотежних положаја у односу на које се одвијају устаљене осцилације. Резултати представљени у овом раду су почетни са циљем да се приказани приступ примени на широку класу нелинеарних осцилатора чија се решења у случају слободних осцилација могу представити у затвореној аналитичкој форми.

Напомена
Истраживања у овом раду су реализована у оквиру пројекта Департмана за Техничку механику Факултета техничких наука у Новом Саду: „Инжењерска анализа механичких система“

ЛИТЕРАТУРА

[1] Virgin, L.N.: Vibration of Axially Loaded Structures, Cambridge University Press, Cambridge, **2007**.
[2] Byrd, P., Friedman, M.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer, Berlin, **1954**.
[3] Rand, R.H., Using computer algebra to handle elliptic functions in the method of averaging. In: *Symbolic Computations and Their Impact on Mechanics*, Eds. A.K.Noor, I.Elishakoff, G.Hulbert, American Society of Mechanical Engineers, PVP-Vol. 205, 311-326 (1990)
[4] Hsu, C.S.: On the application of the elliptic functions in nonlinear forced oscillations. *Quarterly of Applied Mathematics*, **1960.**, vol. 17, стр. 393-407.

MODEL OF FORCED OSCILLATIONS OF CONSTRUCTION WITH INTERNAL ASYMMETRY

Summary: *In addition to well-developed and well-known linear theory of oscillations of structures, there is an increasing need for taking into account the non-linearity in the studied system. This is imposed due to modern requirements in design. Causes of nonlinearities can be different in its nature. The emphasis in this paper will be the cases* *that take into account the asymmetry. It is taken into account those asymmetry which is coused by different structural elements stiffness in compression or tension, as well as the geometric asymmetry. The appropriate mechanical and mathematical model is formed using quadratic nonlinearities in the restoring force. It has been shown the exact analytical solutions of nonlinear forced oscillations by using Jacobi elliptic functions, which is a new result in this field. Also it has be given the appropriate relationship with the linear theory. This work has an educational character too, as it aims to contribute to the greater application of elliptic functions in engineering. Today, the application of these functions greatly facilitated using a symbolic software.*

Keywords: *Non-linear oscillations, quadratic nonlinearities, forced oscillations, Jacobi elliptic function, transcritical bifurcation*