

## РАЧУНАРСКА СИМУЛАЦИЈА ОДЗИВА ДВО ФРЕКВЕНТНЕ ПОБУДЕ 1Д ДИНАМИЧКОГ МОДЕЛА ПРИМЕНОМ FFT И IFFT АЛГОРИТМА

Илија М. Миличић<sup>1</sup>  
Ђорђе Лађиновић<sup>2</sup>

УДК: 004.942 : 531.3

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2016.023

**Резиме:** У овом раду наметнута је 1Д динамичком моделу са отпором подлоге побуда (спољашња померања) математски моделирана као функција са две учестаности кретања у временском домену. Применом алгоритама Фуријеових трансформација третирају се амплитуде померања у фреквентном и временском домену, респектујући пресликавање предложеном функцијом преноса „одзив-побуда“ (И.М.Миличић, 2015). Посебност овог истраживања теоријске механике, је анализа одзива модела са гледишта времена трајања побуде. Рачунарским симулацијама, потврђено је да понашање конструкције услед дејства оптерећења (прорачун утицаја у носачима) зависи од времена његовог задржавања.

**Кључне речи:** 1Д модел, FFT и IFFT алгоритам, функција преноса, померања.

### 1. УВОД

Рачунарско моделирање и симулације као научни метод рачунарске механике у оквиру овог истраживања потврђује досадашња сазнања из статике и динамике конструкција. Прорачун утицаја у носачима услед деловања оптерећења зависи од:

- особине оптерећења
- начина деловања
- начина преношења
- времена задржавања
- могућности промене положаја оптерећења.

Међутим, овде се истражује један проблем у грађевинском конструктерству, где је постављени задатак третиран теоријски а верификован методом симулација. Према томе, разматрано је време задржавања наметнутог оптерећења, при чему је спољашња побуда бирана као дво фреквентна функција померања (4) код које је једна (друга по реду) амплитуда у подручју резонанције. Због чега?

Због тога што се проматра кретања 1Д модела побуђено са малим амплитудама померања, очекујући значајна померања одзива због резонанције, али по истом

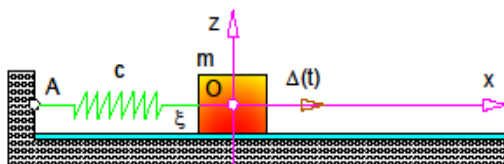
<sup>1</sup> Проф.др Илија М. Миличић, дипл.инж.грађ.,Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, 24000 Суботица, Република Србија, е – mail: [milicic@gf.uns.ac.rs](mailto:milicic@gf.uns.ac.rs)

<sup>2</sup> Проф.др Ђорђе Лађиновић, дипл.инж.грађ.,Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука, Др Симе Милошевића 12, 21000 Нови Сад, Република Србија, е – mail: [ladjin@uns.ac.rs](mailto:ladjin@uns.ac.rs)

реду амплитуда побуде. Разлог више, што побуда система може бити произвољна (кориснички наметнута), док одзив има један услов предложен решењем диференцијалне једначине да кореспондира са функцијом преноса „побуда-одзив“.

## 2. РАЧУНАРСКА СИМУЛАЦИЈА

Посматрајмо физички модел (сл.1) математички моделиран једначином (1), са решењем облика (2) које задовољава функција преноса (3),



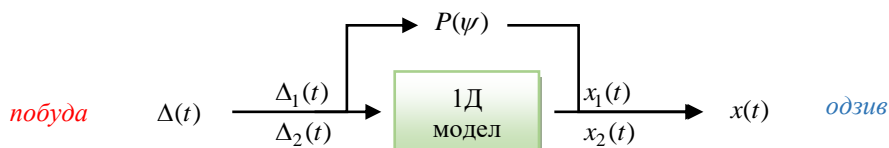
Слика 1 – Физички модел

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = c \cdot \Delta(t) \quad (1)$$

$$x(t) = A_i \cdot P(\psi_i) \cdot \cos(\Omega_i \cdot t + \theta_i) \quad (2)$$

$$P(\psi) = \frac{x(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}} \quad (3)$$

с друге стране, наметнимо дво фреквентну побуду систему. Према (сл. 2) блок дијаграмом укратко се приказује ток рачунарске симулације.



Слика 2 – Блок дијаграм симулације модела са дво фреквентном побудом

Побуда модела представљена је суперпозицијом улаза,

$$\Delta_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t) \quad \text{и} \quad \Delta_2(t) = A_2 \sin(\Omega_2 t) \quad (4)$$

док се одзив модела, према (2) налази суперпозицијом излаза:

$$x_1(t) = \underbrace{A_1 \cdot P(\psi_1)}_{x_1} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) \quad \text{и} \quad x_2(t) = \underbrace{A_2 \cdot P(\psi_2)}_{x_2} \sin(\Omega_2 t + \theta_2) \quad (5)$$

где су:

- $A_1, A_2$  – амплитуде побуде модела,
- $X_1, X_2$  – амплитуде одзива модела

Улазни подаци модела за симулацију:

$$m := 640 \text{ kg} \quad N := 256$$

$$\xi := 0.1 \quad t_{max} := 5 \text{ s}$$

$$c := 1.0 \cdot 10^5 \frac{N}{m} \quad i := 0..(N-1) \quad t_i := i \cdot \Delta t \quad \Delta t = 0.019531$$

срачунавање природне учестаности и физичког пригушење 1Д модела

$$\begin{aligned} \omega &:= \sqrt{\frac{c}{m}} & \omega &= 12.5 \frac{1}{s} & f &:= \frac{\omega}{2 \cdot \pi} & f &= 1.99 \frac{1}{s} \\ b &:= 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi & b &= 1.6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{s} & \omega_d &:= \omega \cdot \sqrt{(1 - \xi^2)} & \omega_d &= 12.44 \frac{1}{s} \\ f_d &:= \frac{\omega_d}{2 \cdot \pi} & T_d &:= \frac{1}{f_d} & T_d &= 0.505 & \frac{T_d}{10} &= 0.0505 \end{aligned}$$

вишефреквентни улазни подаци модела

$$\begin{aligned} A_1 &:= 5 \text{ mm} & A_2 &:= 5 \text{ mm} \\ \Omega_1 &:= \frac{3}{10} \cdot \omega & \Omega_2 &:= \frac{9.999}{10} \cdot \omega \end{aligned}$$

побуда модела

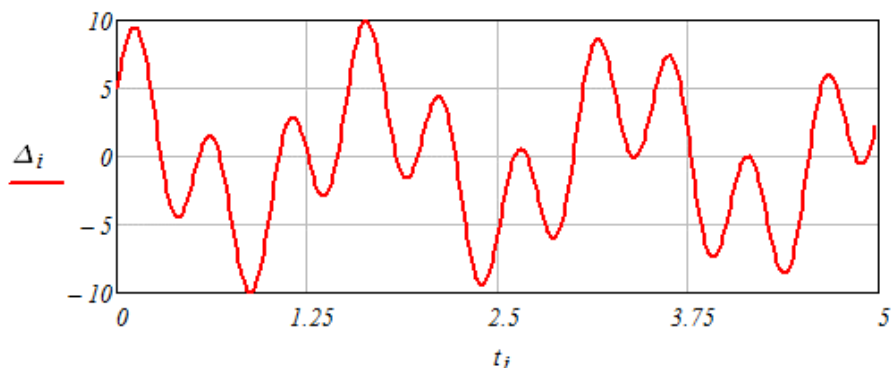
$$\Delta_i := A_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t_i) + A_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t_i)$$

Општи облик једначине кретања модела – одзива је:

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t + \theta_2)$$

**Напомена:**

Симулацијом при стању једнаких сопствених учестаности, модел нема кретање, па се због постојања подручја резонанције намеће, да њихов однос буде близак јединици (9.999/10). У овом истраживању однос сопствених учестаности третиран је као поремећај.



Слика 3 – Дво фреквентна побуца 1Д модела са временом задржавања  $t=5$  s

Срачунавање параметара:

$$\begin{aligned} \text{први одзив: } \psi_1 &:= \frac{\Omega_1}{\omega} & \psi_1 &= 0.3 \\ P(\psi_1) &= 1.097 & \theta_1 &:= \theta(\psi_1) \\ X_1 &:= \frac{c}{c} \cdot A_1 \cdot P(\psi_1) & X_1 &= 5.4826 & \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} &= -3.7723 \end{aligned}$$

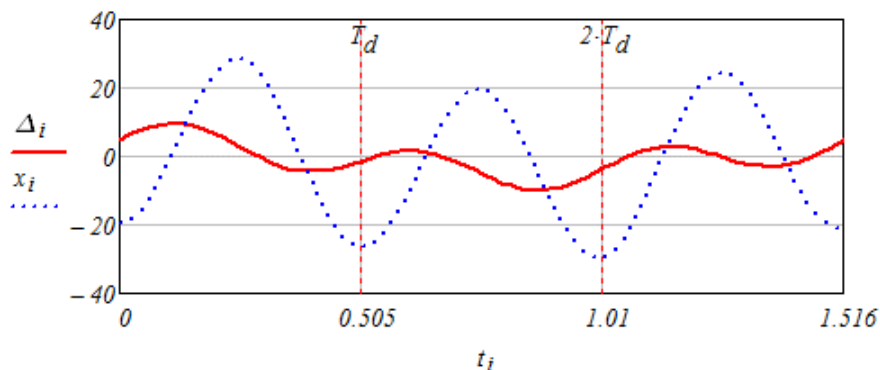
$$\begin{aligned} \text{други одзив: } \psi_2 &:= \frac{\Omega_2}{\omega} & \psi_2 &= 1 \\ P(\psi_2) &= 5 & \theta_2 &:= \theta(\psi_2) \\ X_2 &:= A_2 \cdot P(\psi_2) & X_2 &= 25.0025 & \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} &= -89.9427 \end{aligned}$$

однос амплитуда, одзив - побуца

$$\frac{X_1}{A_1} = 1.097 \quad X_1 > A_1 \qquad \frac{X_2}{A_2} = 5 \quad X_2 > A_2$$

Једначина кретања модела

$$x_i := X_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t_i + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t_i + \theta_2)$$

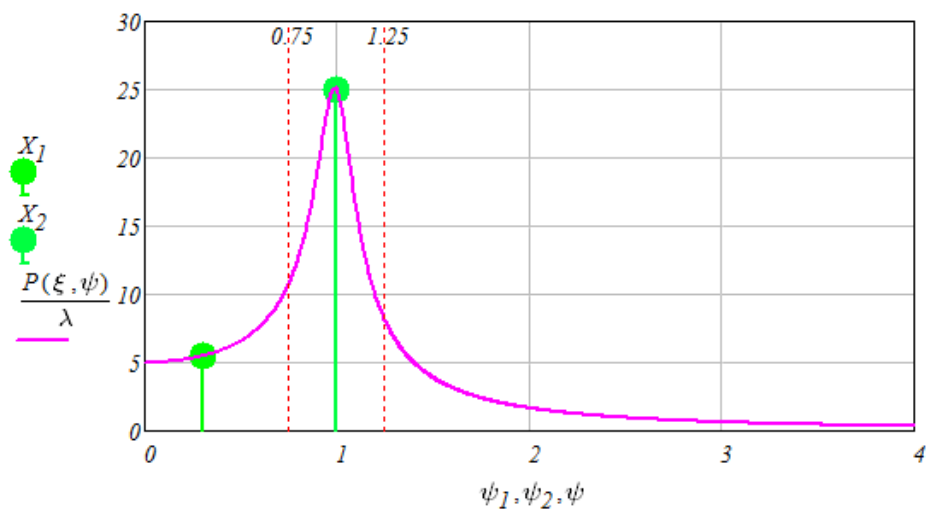


Слика 4 – Кретање 1Д динамичког модела (побуда – одзив)

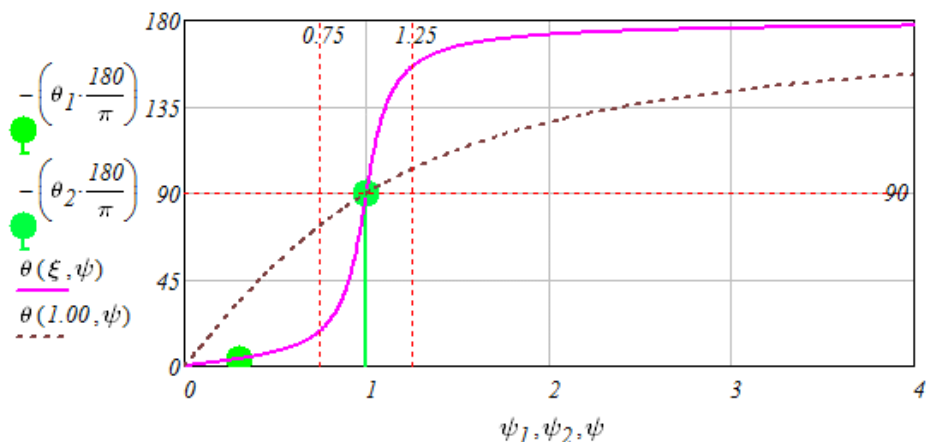
Амплитуде и фазни углови одзива модела:

амплитуда  $\underline{P}(\xi, \psi) := \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}}$       фактор скалирања  $\lambda := \frac{1}{A_1}$

фазни угао  $\underline{\theta}(\xi, \psi) := \begin{cases} \theta \leftarrow -\text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \psi}{1 - \psi^2}\right) \\ \theta \leftarrow \theta - \pi \text{ if } \psi > 1 \\ \text{return } \theta \end{cases}$        $\underline{\underline{\theta}}(\xi, \psi) := -\theta(\xi, \psi) \cdot \frac{180}{\pi}$



Слика 5 – Амплитуде одзива 1Д модела



Слика 6 – Фазни углови одзива 1Д модела

### 3. РЕКОНСТРУКЦИЈА ПОБУДЕ И ОДЗИВА 1Д МОДЕЛА

Третирајући време задржавања оптерећења као битан фактор, решења се траже трансформацијама побуде и одзива симултано алгоритмом FFT у фреквентни домен. На тај начин приступа се међусобном поређењу њихових амплитуда. У случају да имамо два улаза за побуду са истим односом учестаности кретања модела у фреквентном домену јасно се запажа само једна учестаност амплитуде померања. Ово указује да уколико се ради о дво фреквентном спектру амплитуда нисмо сасвим сигурни да ли је побуда реконструисана са једним или два улаза.

#### Анализа одзива у фреквентном домену :

$$\text{побуда: } U := FFT(\Delta)$$

$$\text{одзива: } I := FFT(x)$$

$$i := 0.. \left(\frac{N}{2}\right) \quad f_{i,0} := \frac{i}{t_{max}} \quad f_N := \frac{N}{2 \cdot t_{max}} \quad f_{D_i} := (i+1) \cdot f_0$$

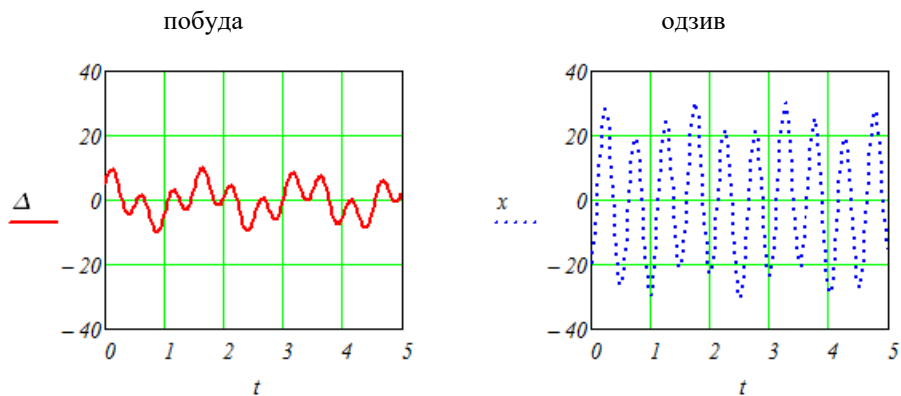
#### Амплитуде одзива:

$$X_1 = 5.48 \text{ mm} \quad X_2 = 25 \text{ mm} \quad f_0 = 0.2 \quad f_N = 25.6$$

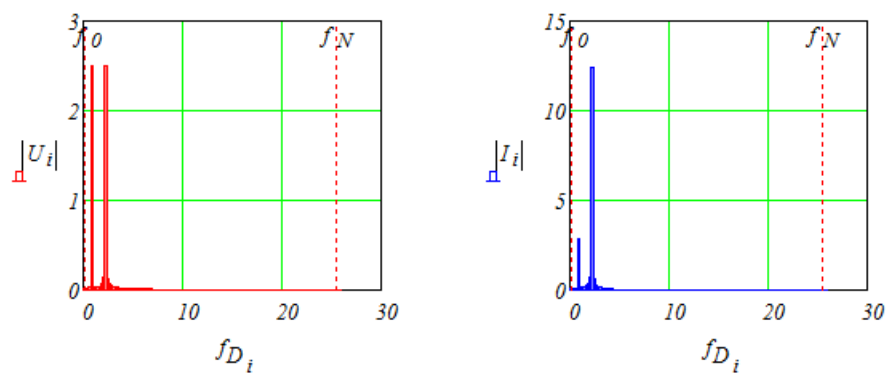
#### Фазни углови одзива:

$$-\theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} = 3.772 \quad -\theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} = 89.943$$

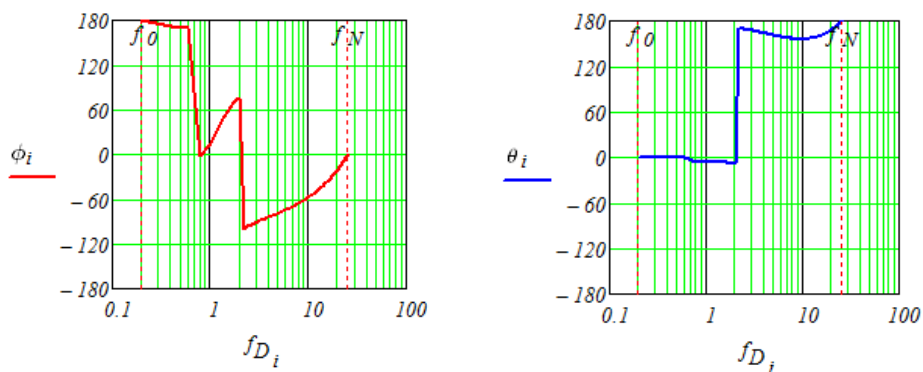
- **Временски домен**



- **Фреквентни домен**

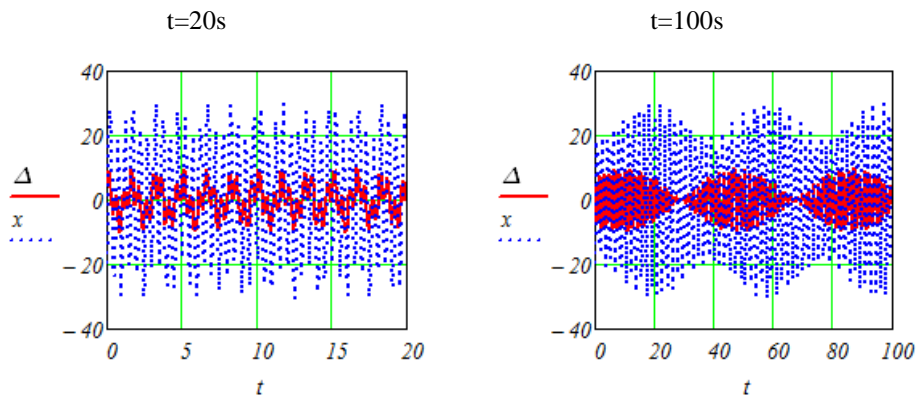


**Фазни углови**

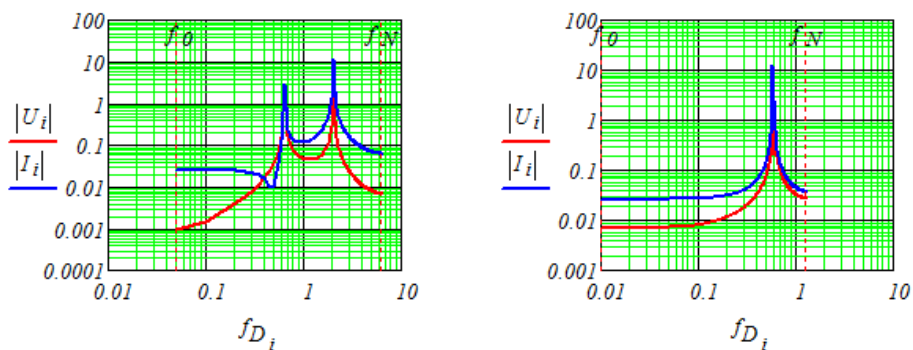


Слика 7 – Резултати симулације за време трајања оптерећења од  $t=5s$

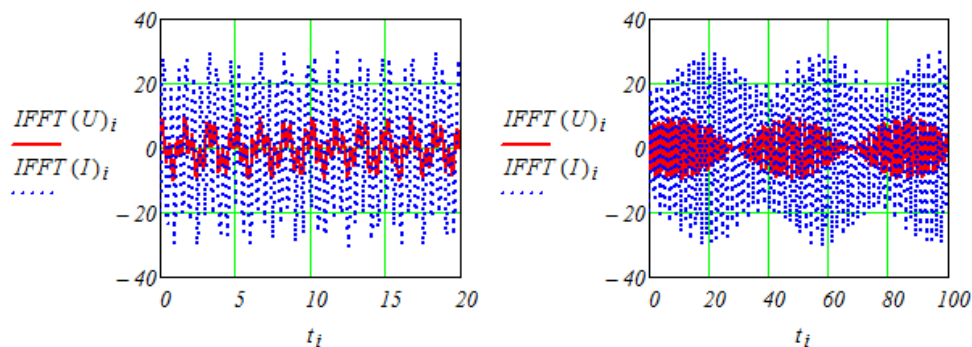
- **Временски домен**



- **Фреквентни домен**



- **Инверзна трансформација (временски домен)**



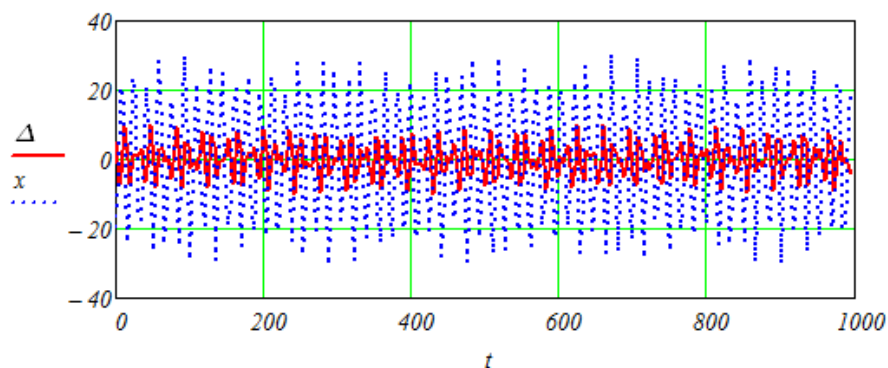
Слика 8 – Резултати симулације за време трајања оптерећења од  $t=20$  и  $t=100s$



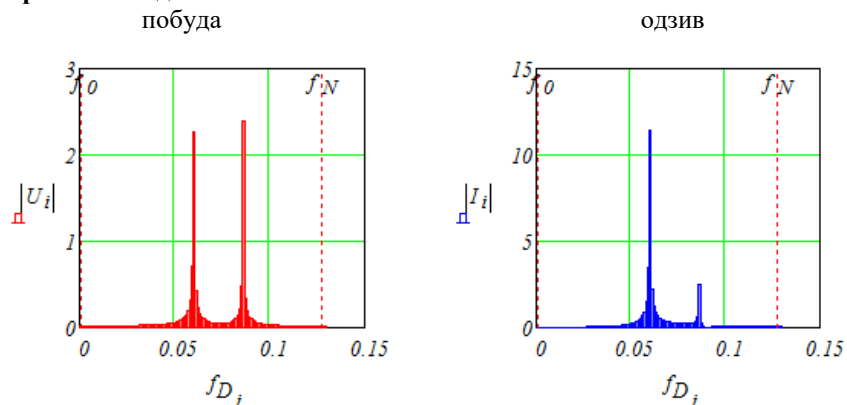
Запазимо резултате симулације (сл. 8, десно) према којем имамо могуће кретање модела блиско теоријском стању бијења или подрхтавања.

На крају размотримо још једну симулацију при дејству од  $t=1000s$ .

- **Временски домен**



- **Фреквентни домен**



Слика 9 – Резултати симулације за време трајања оптерећења од  $t=1000s$

Према томе, кроз време задржавања оптерећења налази се спектар амплитуда померања (овде две) променљивог редоследа (сл. 9), при чему се максимална амплитуда одзива појавила услед првог улаза побуде.

#### 4. ЗАКЉУЧАК

На основу приказане рачунарске симулације у овом раду за поремећај близак јединици (9.999/10), имамо одзив модела, при чему су регистроване амплитуде петоструко веће од амплитуда спољашње побуде.

Предложена функција преноса „одзив-побуда“ и са дво фреквентним спектром побуде кореспондира у коначном решењу кретања 1Д модела. Међутим, како је овде задаћа била и пресликавање функције одзив-побуда из временског домена у фреквентни и обрнуто, применом алгоритама Фуријевих трансформација је постигнуто. На основу свега изложеног, одзив модела на задату побуду показује да је време трајање побуде (време задржавања оптерећења) битан фактор.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Миличић, М.И., Романић, Ј.М.: Теоријска анализа динамичких утицаја 1Д модела побуђеног дејством спољашњих померања, Зборник радова међународна конференција „Савремена достигнућа у грађевинарству“, ISBN 978-86-80297-62-0, Суботица, **2015.**, стр. 347-350.
- [2] Vlajić, Lj. M., Miličić, I.M., Prokić, A. D.: Eksperimentalna analiza dinamičkih uticaja spregnute konstrukcije u fabrici "Banini a.d." u Kikindi, DOI:10.14415/konferencijaGFS 2014.013, Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Međunarodna konferencija "Savremena dostignuća u građevinarstvu", **2014**.god., str. 107-116
- [3] Milašinović DD. The finite strip method in computational mechanics, Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade: Subotica, Budapest, Belgrade, **1997**.
- [4] Wilson, E.L.: Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, ISBN 0-923907-00-9, Third Edition, Berkeley, California, USA, **2012**.
- [5] Tang, K.T.: Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3, ISBN-10 3-540-44695-8 Springer Berlin Heidelberg New York, **2007**.
- [6] PTC, Mathcad 14.0, User's Guide (pdf), February **2007**.

## COMPUTER SIMULATION OF TWO FREQUENCY RESPONSE EXCITATION 1D DYNAMIC MODEL USING FFT and IFFT ALGORITHM

**Summary:** *In this paper imposed on the dynamics of 1D models with resistance pad excitation (external displacements) mathematically was modeled as a function of the two frequencies developments in the time domain. The Fourier transform algorithm applying treated amplitude displacement in the frequency and time domain, respecting the proposed transfer function a mapping "response-excitation" (I.M.Miličić, 2015). The particularity of this research theoretical mechanics, the response analysis model from the viewpoint of the duration of the excitation. Computer simulations, it was confirmed that the behavior of the structure by the action of the load (calculation of influence in girders) depends on the time its duration.*

**Keywords:** *1D model, FFT and IFFT algorithm, transfer function, deflection.*