ПРИЛОГ САВРЕМЕНОМ СРПСКОМ НЕИМАРСТВУ– Део 3/1: Лучне бране и теорија танких љуски

Мирко Д. Петковић [1]

УДК: 627.825:624.07
DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.106

Резиме: *"Зашто се званично скоро нигде у свету не помињу имена и доприноси Срба историји светског градитељства"? Да ли зато што осим епских прича и спорадичних случајева таквих доприноса заправо и нема или зато што је недостатак традиције у богатству и владању над другима онемогућио Србе да пређу пут од турских дунђера до савремених демијурга и тако остану забележени у историји светског градитељства? Другим речима, да буду и његови креатори, а не само мање приметни следбеници, вешти импровизатори или прости извршиоци туђих замисли и идеја. Без обзира каква да је истина презентирани рад кроз теорију танких 2К љуски и њену примену код лучних брана даје допринос сагледавању и памћењу њене лепше стране испуњене том потребном креативношћу - без које се не рађа љубав према градитељској струци и науци нити подстуичу опредељења за њу. Полазећи од еластичних 2К љуски у раду су презентирани начини формирања математичко-физичких модела лучних брана и анализиран начин на који се до њих дошло, као и тачност учињених претпоставки и унетих занемаривања. У склопу тога дат је и осврт на коришћен модел у домаћој пракси са применом поступка инж. Николе Хајдина. Имајући у виду да се пракса пројектовања и градње лучних брана није у ничему суштински променила за последњих пола века разматрана проблематика је обрађена са аспекта сазнања из 1981. када је и настао овај фундаментални рад из области примењене теорије љуски чији се сажетак у даљем тексту даје.*

Кључне речи: *Лучне бране, теорија љуски, претпоставке, модели, анализе, Хајдин*

1. УВОД

Својом несумњивом предношћу у погледу економичности, а с друге стране изузетном сложеношћу не само пројектовања и прорачунавања, већ и градње, лучне бране су се устоличиле у грађевинарској пракси као једна од најкомплекснијих група објеката, али и истовремено и веома примамљивих за стручњаке најразличитијих профила, били они теоретичари или практичари.
Свакако њихов најразличитији третман је постигнут у аналитичким методама прорачуна, на којима су посредно или непосредно радили не само прегаоци из домена грађевинарства већ такође и читава плејада механичара, физичара,

[1] KECO Invest Engineering GmbH i KG Int. Exp. Group, mirkopetkovic7@gmail.com, тел: 7 926 623 623 1

математичара и других, почевши од првих година XVII века па све до данас [10]. Хронолошки посматрано, развој тих метода се уствари одвијао у зависности од могућности сагледавања и решавања одговарајућег модела, при чему су поједини интуитивно-искуствени показатељи имали удела у његовом оформљењу. Но без обзира о ком моделу се радило, лучне бране су са аспекта теорије површинских носача биле и остале љуске, и сви исправни третмани ових структура, почевши од Westergaard-а, се базирају ипак на њиховом посматрању као љуски. У склопу тога налазе се бројни покушаји анализа лучних брана, па и покушај инж. Н. Хајдина идејно започет у Српској академији наука, а касније примењен у и домаћој пракси.
При свему томе без обзира на усвојени модел и примењени прорачун, почевши од коришћења најобичније котловске формуле па до најсавременијих елемената, њихових веза и метода унутар МКЕ поступака, и без обзира на расположиву снагу рачунара, посебан проблем причињавају тзв. контактни услови обзиром да квалитет тог дела решења директно одређује и квалитет целог прорачуна.
Полазећи од општих једначина еластичне теорије танких 2К љуски и Boussinesq-овог проблема, у раду су презентирани поступци формирања математичко-физичких модела лучних брана са ширим теоретско-практичним разматрањима начина на који се дошло до њих, тачности учињених претпоставки и коришћених занемаривања, као и показатеља на изведеним објектима - основног предуслова за доношење што исправнијег закључака о стварној вредности данас многобројних у свету присутних поступака и метода, као и величине њиховог доприноса у пракси.
И овај рад, као и претходни ауторови прилози савременом српском неимарству, је посвећен сећању на Милутина Миланковића - једног од најбољих теоретичара, али и практичара међу грађевинским инжењерима Аутроугарске монархије, великог родољуба и првог доктора техничких наука међу Србима. Добрим делом је настао на бази сазнања из *Методологије статичког прорачуна лучних брана – II*, 1981. и Прилога бр.1. [12][17]. који ни данас ништа нису изгубили од своје актуелности.

2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЛУЧНИХ БРАНА

ТЕЛО БРАНЕ. Посматрајући елементарни делић лучне бране у облику изотропне љуске са двоструком кривином **(Слика 1.)**, постављајући услове равнотеже и ограничавајући се на тачност до малих величина другога реда, добија се:

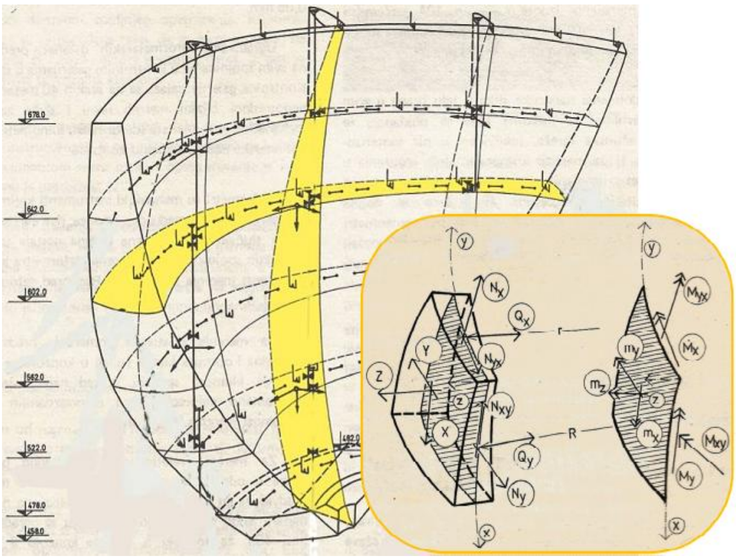
$$N_1^{(1)} + N_{12}^{(2)} - Q_1/R + X = 0 \qquad (1.1.)$$
$$N_{21}^{(2)} + N_2^{(2)} - Q_2/r + Y = 0 \qquad (1.2.)$$
$$Q_1^{(1)} + Q_2^{(2)} + N_1/R + N_2/r + Z = 0 \qquad (1.3.)$$
$$M_{21}^{(1)} + M_2^{(2)} - Q_2 = 0 \qquad (1.4.)$$
$$M_1^{(1)} + M_{12}^{(2)} - Q_1 = 0 \qquad (1.5.)$$
$$M_{12}/r - M_{21}/R + N_{21} - N_{12} = 0 \qquad (1.6.)$$

Сменом израза за Q_1 и Q_2, добијених из једначина (1.4.) и (1.5.), у првим трима једначинама, наведени систем прелази у:

$$N_1^{(1)} + N_{12}^{(2)} - 1/R(M_1^{(1)} + M_{12}^{(2)}) + X = 0 \qquad (2.1.)$$
$$N_2^{(2)} + N_{21}^{(1)} - 1/r\,(M_2^{(2)} + M_{21}^{(1)}) + Y = 0 \qquad (2.2.)$$
$$N_1/R + N_2/r + M_1^{(1,1)} + M_{12}^{(1,2)} + M_{21}^{(1,2)} + M_2^{(2,2)} + Z = 0 \qquad (2.3.)$$

Уведене ознаке:

N_1, N_2	- нормалне тангенцијалне силе (резултанте напона)
Q_1, Q_2	- трансверзалне смичуће силе
N_{12}, N_{21}	- тангенцијалне смичиће силе
M_1, M_2	- моменти савијања
M_{12}, M_{21}	- торзиони моменти
X, Y, Z	- компоненте спољног оптерећења у респективним правцима (1), (2) и (3)
μ	- Poisson-ов коефицијенат за бетон
$D_n = Eh/(1-\mu^2)$	- крутост на издужење
$D_m = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$	- крутост на савијање
u, v, w	- компоненте померања у респективним правцима (1), (2) и (3)
$R = R(1,2)$	- полупречник кривине љуске (бране) у правцу криволинијске осе (1)
$r = r(1,2)$	- полупречник кривине љуске (бране) у правцу криволинијске осе (2)
L_1	- опорачка контура бране која одговара линији додира средње површине бране и околног стенског масива
L_2	- слободна контура бране
$h = h(1,2)$	- дебљина бране
e_1, e_2	- специфична издужења
e_{12}, $\bar{e}_{12}$	- промене углова
ω_1, ω_2	- промене кривине
ω_{12}	- промене увртања
$()^{(i)} = \partial()/\partial(i)$, $\partial^{(i,j)} = \partial^2()/\partial(i)\partial(j)$; i,j=1,2	- ознаке за парцијална диференцирања по координатама (1) и (2)



Слика 1. Пресечне силе и моменти љуске дупле кривине и промењиве дебљине у оба правца са карактеристичним пресецима тела лучне бране Мратиње, H=220м

Сменом израза за Q_1 и Q_2, добијених из једначина (1.4.) и (1.5.), у првим трима једначинама, наведени систем прелази у:

$$N_1^{(1)} + N_{12}^{(2)} - 1/R(M_1^{(1)} + M_{12}^{(2)}) + X = 0 \qquad (2.1.)$$
$$N_2^{(2)} + N_{21}^{(1)} - 1/r\,(M_2^{(2)} + M_{21}^{(1)}) + Y = 0 \qquad (2.2.)$$
$$N_1/R + N_2/r + M_1^{(1,1)} + M_{12}^{(1,2)} + M_{21}^{(1,2)} + M_2^{(2,2)} + Z = 0 \qquad (2.3.)$$

Потпуна дефинисаност система (2.1.)-(2.3.)добија се усвајањем израза за деформацијске величине средње површи љуске (z=0) (σ_z=0) и то:
специфична издужења

$$e_1 = u^{(1)} + w/R \qquad (3.1.)$$
$$e_2 = v^{(2)} + w/r \qquad (3.2.)$$

промене углова

$$e_{12} = u^{(2)} + v^{(1)} \qquad (3.3.)$$

Користећи се сазнањем да је w-померање доминантно код лучних брана, да се исто значајно повећава у поступку диференцирања макар по једној од криволинијских координата и исвајајући промену кривина хоризонталних лукова само у вертикалном правцу [k=1/r=k(1)], а промену кривина вертикалних конзола само у хоризонталном правцу [K=1/R=K(2)], можемо за додатне величине искористити следеће изразе:
промене (умањења) кривина

$$\omega_1 = w^{(1,1)} + w/R^2 \qquad (3.4.)$$
$$\omega_2 = w^{(2,2)} + w/r^2 \qquad (3.5.)$$

промена увијања (од торзионих момената)

$$\omega_{12} = w^{(1,2)} \qquad (3.6.)$$

Користећи се *Hooke*-овим законом везе између напона и деформација, општим изразима за пресечне силе и моменте, имајући при том у виду да деформације нису у функцији дебљине љуске и вршећи потребно интеграљење у границама -h/2 до +h/2, добија се:

$$N_1 = D_n[u^{(1)} + \mu v^{(2)} + w(1/R+\mu/r)] + D_m[w^{(1,1)} + w/R^2]\,(1/R-1/r) \qquad (4.1.)$$
$$N_2 = D_n[\mu u^{(1)} + v^{(2)} + w(1/r+\mu/R)] + D_m[w^{(2,2)} + w/r^2]\,(1/r-1/R) \qquad (4.2.)$$
$$N_{21} = D_n(1-\mu)/2[u^{(2)} + v^{(1)}] + D_m(1-\mu)/2(1/R-1/r)[w^{(1,2)} + v^{(1)}(1/R-1/r)] \qquad (4.3.)$$
$$N_{12} = D_n(1-\mu)/2[u^{(2)} + v^{(1)}] + D_m(1-\mu)/2(1/r-1/R)[w^{(1,2)} + u^{(1)}(1/r-1/R)] \qquad (4.4.)$$
$$M_1 = D_m[-1/r\,(u^{(1)} + \mu v^{(2)}) + w^{(1,1)} + \mu w^{(2,2)} + w/R(1/R-1/r)] \qquad (4.5.)$$
$$M_2 = D_m[-1/R(\mu u^{(1)} + v^{(2)}) + w^{(2,2)} + \mu w^{(1,1)} + w/r\,(1/r-1/R)] \qquad (4.6.)$$
$$M_{21} = D_m(1-\mu)/2[-1/Ru^{(2)} - v^{(1)}(2/r-1/R) + 2w^{(1.2)}] \qquad (4.7.)$$
$$M_{12} = D_m(1-\mu)/2[-1/\,rv^{(1)} - u^{(2)}(2/R-1/r) + 2w^{(1.2)}] \qquad (4.8.)$$

Сменом ових вредности у (2.1.)-(2.3.) добијају се диференцијалне једначине тела лучне бране посматране као изотропне љуске двоструке кривине, које представљају основ већине данашњих теорија љуски које су коришћене у практичним прорачунима ових конструкција.
Не узимајући у обзир могућност појаве лучних брана изразито закривљених облика тј., усвајајући да је R=∞ (или да R → ∞) добија се:

$$N_1^{(1)} + N_{12}^{(2)} + X = 0 \tag{5.1.}$$
$$N_2^{(2)} + N_{21}^{(1)} - 1/r\,(M_1^{(1)} + M_{12}^{(2)}) + Y = 0 \tag{5.2.}$$
$$N_2/r + M_1^{(1,1)} + M_{12}^{(1,2)} + M_{21}^{(1,2)} + M_2^{(2,2)} + Z = 0 \tag{5.3.}$$

$$N_1' = D_n(u^{(1)} + \mu v^{(2)} + w\mu/r) + D_m w^{(1,1)}(-1/r) \tag{6.1.}$$
$$N_2' = D_n(\mu u^{(1)} + v^{(2)} + w/r) + D_m/r\,(w^{(2,2)} + w/r^2) \tag{6.2.}$$
$$N_{21}' = D_n(1-\mu)/2[u^{(2)} + v^{(1)}] + D_m(1-\mu)/2(1/r^2)[v^{(1)} - rw^{(1,2)}] \tag{6.3.}$$
$$N_{12}' = D_n(1-\mu)/2[u^{(2)} + v^{(1)}] + D_m(1-\mu)/2(1/r^2)(u^{(2)} + rw^{(1,2)}) \tag{6.4.}$$
$$M_1' = D_m\,[-1/r\,(u^{(1)} + \mu v^{(2)}) + w^{(1,1)} + \mu w^{(2,2)}] \tag{6.5.}$$
$$M_2' = D_m\,[w^{(2,2)} + \mu w^{(1,1)} + w/r^2] \tag{6.6.}$$
$$M_{21}' = D_m(1-\mu)(w^{(1,2)} - v^{(1)}/r) \tag{6.7.}$$
$$M_{12}' = D_m(1-\mu)/2[-v^{(1)}/r + u^{(2)}/r + 2w^{(1.2)}] \tag{6.8.}$$

а сменом израза за пресечне силе и моменте (6.1.)-(6.8.) у једначине (5.1.)-(5.3.) добијају се познате Flügge-ове диференцијалне једначине из 1934. које довољно тачно описују услове равнотеже лучне бране посматране са аспекта класичне теорије танке изотропне цилиндричне љуске и њених усвојених претпоставки.

$$u^{(1,1)} + (1-\mu)/2u^{(2,2)} + \mu/rw^{(1)} + (1+\mu)/2v^{(1,2)} + k[(1-\mu)/2u^{(2,2)} - rw^{(1,1,1)} + (1-\mu)/2rw^{(1,2,2)}] + X/D_n = 0 \tag{7.1.}$$
$$(1+\mu)/2u^{(1,2)} + v^{(2,2)} + (1-\mu)/2v^{(1,1)} + w^{(2)}/r + 3(1-\mu)/2kv^{(1,1)} - (3-\mu)/2krw^{(1,1,2)} + Y/D_n = 0 \tag{7.2.}$$
$$\mu/u^{(1)} + v^{(2)}/r + w/r^2 + k[(1-\mu)/2ru^{(1,2,2)} - ru^{(1,1,1)} - (3-\mu)/2rv^{(1,1,2)} + a^2w^{(1,1,1,1)} + 2a^2w^{(1,1,2,2)} + a^2w^{(2,2,2,2)} + 2w^{(2,2)} + w/r^2] + Z/D_n = 0 \tag{7.3.}$$

Због потребе практичног решавања разних инжењерских проблема, може се одустати и од ове формулације и применити додатно поједностављење путем увођења разних претпоставки, од којих су поједине не само теоретског већ и интуитивно-искуственог карактера.

Тако например, уколико се при разматрању проблема лучних брана занемари утицај Poisson-овог коефицијента, даље претпостави да је вредност *w*-померања занемарљиво мала у односу на квадрат полупречника кривине, као и вредност првих извода *u* и *v* померања у односу на полупречник кривине љуске, изузимајући вредност првог извода *u* померања у правцу осе (1) у изразу за M_1, тј., усвајајући $\mu=0$, $w/r^2 \rightarrow 0$, $u^{(1)}/r^2 \rightarrow 0$, $v^{(1)}/r \rightarrow 0$, $u^{(2)}/r \rightarrow 0$, добијају се следећи изрази за пресечне силе и моменте:

$$N_1' = D_n u^{(1)} - D_m w^{(1,1)}/r = D_n e_1' - D_m \omega_1'/r \tag{8.1.}$$
$$N_2' = D_n(v^{(2)} + w/r) + D_m/r\,w^{(2,2)} = D_n e_2 + D_m \omega_2/r \tag{8.2.}$$
$$N_{21}' = D_n/2[u^{(2)} + v^{(1)}] - D_m/(2/r)w^{(1,2)} = D_n/2e_{12} - D_m/(2/r)\omega_{12} \tag{8.3.}$$
$$N_{12}' = D_n/2[u^{(2)} + v^{(1)}] + D_m/(2/r)w^{(1,2)} = D_n/2e_{12} + D_m/(2/r)\omega_{12} \tag{8.4.}$$
$$M_1' = D_m\,[w^{(1,1)} - u^{(1)}/r] = D_m\,[-e_1'/r + \omega_1'] \tag{8.5.}$$
$$M_2' = D_m\,[w^{(2,2)} + w/r^2] = D_m\,\omega_2 \tag{8.6.}$$
$$M_{21}' = D_m w^{(1,2)} = D_m \omega_{12} \tag{8.7.}$$
$$M_{12}' = D_m w^{(1.2)} = D_m \omega_{12} \tag{8.8.}$$

Њиховим уношењем у једначине равнотеже (5) (са променљивом дебљином љуске у правцу (1)-осе) добија се систем диференцијалних једначина које се, са одговарајућим контурним условима, у пракси задовољавајуће тачно може решити методом коначних разлика или неком сличном диференцним методом.

Нешто једноставније практично упрошћење се заснива на коришћењу добро познате *Love*-ове претпоставке да је однос дебљине зида љуске према полупречнику занемарљиво мали у поређењу са јединицом (h/r<< 1), уз истовремено занемаривање утицаја *Poisson*-овог коефицијента и вредности *u* померања. Решења резултујућег система парцијалних диференцијалних једначина:

$$D_n/2v^{(1,2)} -1/r(D_m w^{(1,1)})^{(1)} + 1/(2r)D_m w^{(1,2,2)} + X = 0 \tag{9.1.}$$

$$D_n v^{(2,2)} + 1/2(D_n v^{(1)})^{(1)} + D_n/rw^{(2)} - 3/(2r)(D_m w^{(1,2)})^{(1)} + Y = 0 \tag{9.2.}$$

$$D_n/rv^{(2)} + D_n/r^2 w + 2D_m/r^2 w^{(2,2)} + D_m w^{(2,2,2,2)} + (D_m w^{(1,1)})^{(1,1)} + +2(D_m W^{(1,2)})^{(1.2)} + Z = 0 \tag{9.3.}$$

добивена применом методе коначних разлика су почетком 60-их година, у време слабих рачунских машина, била успешно искоришћена за анализу више лучних брана висине до 166м [18], при чему је употребљено 10 пута мање инжењерских сати рада него за популарни и широко прихваћени trial load метод [1][2].

Занемаривањем вредности првог извода *v*-померања у правцу (1)-осе може се повратити утицај $D_m w/r^4$ члана у једначини z-еквилибријума, тако да изрази за пресечне силе и моменте добијају облик (μ=0, u=0, $v^{(1)}$=0) :

$$N_1' = -D_m/r\, w^{(1,1)} = - D_m/r\, \omega_1' \qquad \omega_1'=w^{(1,1)} \text{ и сл.} \tag{10.1.}$$

$$N_2' = D_n(v^{(2)} + w/r) + D_m/r\,(w^{(2,2)} + w/r^2) = D_n e_2 + D_m \omega_2 (1/r) \tag{10.2.}$$

$$N_{21}' = -D_m/(2r) w^{(1,2)} = - D_m/(2r)\omega_{12} \tag{10.3.}$$

$$N_{12}' = D_m/(2r) w^{(1,2)} = D_m/(2r)\omega_{12} \tag{10.4.}$$

$$M_1' = D_m w^{(1,1)} = D_m \omega_1' \tag{10.5.}$$

$$M_2' = D_m (w^{(2,2)} + w/r^2) = D_m \omega_2 \tag{10.6.}$$

$$M_{21}' = D_m w^{(1,2)} = D_m \omega_{12} \tag{10.7.}$$

$$M_{12}' = D_m w^{(1,2)} = D_m \omega_{12} \tag{10.8.}$$

а одговарајуће једначине равнотеже по померањима ($D_{n,m}=D_{n,m}(1)$)

$$-1/r(D_m w^{(1,1)})^{(1)} + 1/(2r)D_m w^{(1,2,2)} + X = 0 \tag{11.1.}$$

$$D_n v^{(2,2)} + D_n/rw^{(2)} - 3/(2r)(D_m w^{(1,2)})^{(1)} + Y = 0 \tag{11.2.}$$

$$D_n/rv^{(2)} + D_n/r^2 w + 2D_m/r^2 w^{(2,2)} + D_m/r^4 w + D_m w^{(2,2,2,2)} + + (D_m w^{(1,1)})^{(1,1)} + 2(D_m W^{(1,2)})^{(1.2)} + Z = 0 \tag{11.3.}$$

Тиме се долази до препознатљивих и инжењерски широко коришћених *Lombardi*-евих поједностављења *Flügge*-ових диференцијалних једначина за прорачун лучних брана, која су истовремено прилагођена примени *Ritz*-овог варијационог метода и *Gauss*-овог метода најмањих квадрата за њихово решавање [9]. Посебна вредност овог поступка је, као и код trial-load методе, у расподељењу оптерећења тела бране на лукове и конзоле са узимањем у обзир и ефеката торзионих момената тј., у инжењерском осећању проблема и самог начина рада конструкције. На другој страни у делу примењене теорије површинских носача за решавање једноставнијих инжењерских проблема ван лучних брана, а која такође полазе од разматрања *Flügge*-ових једначина, присутна су и нешто другојачија упрошења. Тако например, полазећи поново од *Love*-ове претпоставке да је однос дебљине зида љуске према полупречнику занемарљиво мали у поређењу са јединицом (h/r<< 1), занемарујући утицај трансверзалне смичуће силе Q_2 у једначини Y-

[2] То важи и данас стим што је поступак остао скоро исти, а знатно моћнији рачунари скратили време.

еквилибријума и користећи се образложењем које се базира на, путем основних претпоставки, унапред унетој нетачности (*Hildebrand, Reissner, Thomas, Green, Zerna, Kuhelj, Girkmann i dr.* [4]) може се у изразу (6.5.) за вредност M_1- момента извршити занемаривања члана w у поређењу са $w^{(2,2)}$, и свих са D_m помножених чланова у изразима за пресечне силе (6.1.)-(6.4.), као и занемаривање свих извода промењљивих *u* и *v* у изразима за моменте (6.5.)-(6.8.).
Другим речима, поред занемаривања Q_2 усвајају се и следеће претпоставке у изразима за силе и моменте:
$w/r^2 << w^{(2,2)}$ тј., заправо, $[(w/r^2+w^{(2,2)})^{(i,j)}]_{(1,j)=0,1,2} \rightarrow (w^{(2,2)})^{(i,j)}$ и слично,
$(h/r)(h^2)w^{(1,1)} = 0$, $(h/r)(h^2)(w/r^2 + w^{(2,2)}) = 0$,
$(h/r)(h^2)(v^{(1)}-w^{(1,2)}) = 0$,
$(h/r)(h^2)(u^{(2)}/r+w^{(1,2)}) = 0$,
$(h/r)(h^2)u^{(1)} = 0$, $(h/r)(h^2)v^{(1)} = 0$, $(h/r)(h^2)(u^{(2)}-v^{(1)}) = 0$,
На тај начин изрази за пресечне силе и моменте добијају следећи облик:

$$N_1'' = D_n(u^{(1)} + \mu v^{(2)} + w\mu/r) = D_n(e_1' + \mu e_2) \qquad (e_1' = u^{(1)},\ e_2 = v^{(2)} + w/r) \qquad (12.1.)$$
$$N_2'' = D_n(\mu u^{(1)} + v^{(2)} + w/r) = D_n(\mu e_1' + e_2) \qquad (12.2.)$$
$$N_{21}'' = D_n(1-\mu)/2(u^{(2)} + v^{(1)}) = D_n(1-\mu)/2e_{12} \qquad (e_{12} = v^{(2)} + u^{(1)}) \qquad (12.3.)$$
$$N_{12}'' = D_n(1-\mu)/2(u^{(2)} + v^{(1)}) = D_n(1-\mu)/2e_{12} \qquad (12.4.)$$
$$M_1'' = D_m(w^{(1,1)} + \mu w^{(2,2)}) = D_m(\omega_1' + \mu\omega_2') \qquad (\omega_1' = w^{(1,1)},\ \omega_2' = w^{(2,2)}) \qquad (12.5.)$$
$$M_2'' = D_m(w^{(2,2)} + \mu w^{(1,1)}) = D_m(\mu\omega_1' + \omega_2') \qquad (12.6.)$$
$$M_{21}'' = D_m(1-\mu)w^{(1,2)} = D_m(1-\mu)\omega_{12} \qquad (\omega_{12} = w^{(1,2)}) \qquad (12.7.)$$
$$M_{12}'' = D_m(1-\mu)w^{(1.2)} = D_m(1-\mu)\omega_{12} \qquad (12.8.)$$

а одговарајуће једначине еквилибријума изражене путем сила,

$$N_1''^{(1)} + N_{12}''^{(2)} + X = 0 \qquad (13.1.)$$
$$N_2''^{(2)} + N_{12}''^{(1)} + Y = 0 \qquad (13.2.)$$
$$N''_2/r + M_1''^{(1,1)} + 2M_{12}''^{(1,2)} + M_2''^{(2,2)} + Z = 0 \qquad (13.3.)$$

или исте изражене путем померања

$$[D_n(u^{(1)} + \mu v^{(2)} + w\mu/r)]^{(1)} + [D_n(1-\mu)/2(u^{(2)} + v^{(1)})]^{(2)} + X = 0 \qquad (14.1.)$$
$$[D_n(\mu u^{(1)} + v^{(2)} + w/r)]^{(2)} + [D_n(1-\mu)/2(u^{(2)} + v^{(1)})]^{(1)} + Y = 0 \qquad (14.2.)$$
$$[D_n(\mu u^{(1)} + v^{(2)} + w/r)]/r + [D_m(w^{(1,1)} + \mu w^{(2,2)})]^{(1,1)} + 2[D_m(1-\mu)w^{(1.2)}]^{(1,2)} +$$
$$+ [D_m(w^{(2,2)} + \mu w^{(1,1)})]^{(2,2)} + Z = 0 \qquad (14.3.)$$

Као такав, проблем савијања танких цилиндричних љуски био је разматран још 1934. године од стране *Donnell*-а у време појаве *Flügge*-ове теорије љуски, да би одмах заатим био предмет пажње *Власов-а,* 1936., *Муштари-ја* 1938., *Новожилов-а* 1946. и др., тако да се често у литератури помиње у склопу тзв. техничке теорије љуски или слабо закривљених ("плитких") танких љуски ([10], [20]).
Иако таква теорија, каом например *Donnell*-ова, представља упрошћену варијанту теорије танких цилиндричних љуски она се често пута показала корисном за аналитичко решавање задатака од практичног значаја као нпр., извијање танких цилиндара, савијање бачвастих кровова и сл. ([4], [10]).
Њена могућа и дискутабилна примена код лучних брана је, у случају посебних облика и геометријских карактеристика тела бране, најчешће повезана са коришћењем раније споменутих диференцних поступака при чему, уколико се примени метод коначних разлика, онда се условно потребна ефикасност постиже са коришћењем чланова вишега реда. У свему томе решавање система се може

математички поједноставити усвајањем недиференцијабилних крутости на издужење и савијање по правцима (1) и (2), као и разматрањем само оптерећења од хидростатичког притиска воде чиме последње једначине прелазе у:

$$u^{(1,1)} + (1-\mu)/2u^{(2,2)} + \mu/rw^{(1)} + (1+\mu)/2v^{(1,2)} = 0, \quad (X/D_n = 0) \qquad (15.1.)$$

$$(1+\mu)/2u^{(1,2)} + v^{(2,2)} + (1-\mu)/2v^{(1,1)} + w^{(2)}/r = 0, \quad (Y/D_n = 0) \qquad (15.2.)$$

$$12/(rh)^2[\mu r/u^{(1)} + rv^{(2)} + w] + w^{(1,1,1,1)} + 2w^{(1,1,2,2)} + w^{(2,2,2,2)} + Z/D_n =$$
$$= 12/(rh)^2[\mu r/u^{(1)} + rv^{(2)} + w] + \nabla^4 w + Z/D_n = 0 \qquad (15.3.)$$

Уколико се даље поред занемаривања X и Y – компонената спољног оптерећења додатно претпостави промена дебљине бране само у правцу *u*-померања, дакле као код *Lombardi*-а, а потом, као и у једначинама (9), занемари утицај Poisson-овог коефицијента, горњи систем (15), који одговара поједностављеним *Donnell* – овим једначинама, прелази у облик:

$$(D_n u^{(1)})^{(1)} + D_n/2(u^{(2)} + v^{(1)})^{(2)} = 0 \qquad (16.1.)$$

$$D_n v^{(2,2)} + D_n/rw^{(2)} + (D_n u^{(2)} + D_n v^{(1)})^{(1)}/2 = 0 \qquad (16.2.)$$

$$(D_m w^{(1,1)})^{(1,1)} + 2(D_m w^{(1,2,2)})^{(1)} + D_m w^{(2,2,2,2)} + D_n/rv^{(2)} + D_n/r^2 w + Z = 0 \qquad (16.3.)$$

Јасно је да све оно што је напред речено за моделе танких цилиндричних љуски и поступке њиховог решавања важи и у овом случају, тако да се уз одговарајуће контурне услове може већином од споменутих метода ефикасно решити. Например, методом коначних разлика, исто онако као и сложенији систем (9) и то са још мањим утрошком инжењерских сати.

Међутим, у домаћој пракси систем (16) је додатно упрошћен. Разлог томе је долажење до таквог облика изведених једначина који омогућава примену поступка *Н. Хајдина* за нумеричко решавање одређених контурних проблема, а који се заснива на примени метода Теорије конструкција путем коришћења формалне аналогије.

У том циљу користи се и добро познати математички поступак решавања диференцијалних једначина путем њиховог претходног трансформисања у одговарајуће интегралне једначине, а горњи систем додатно поједностављује путем занемаривања члана $(D_n u^{(2)})^{(1)}/2$ у једначини (16.2.) тј., $D_n u^{(2)})^{(1)}/2 \rightarrow 0$, чиме он добија облик:

$$(D_n u^{(1)})^{(1)} + D_n/2(u^{(2)} + v^{(1)})^{(2)} = 0 \qquad (17.1.)$$

$$D_n v^{(2,2)} + D_n/rw^{(2)} + (D_n v^{(1)})^{(1)}/2 = 0 \qquad (17.2.)$$

$$(D_m w^{(1,1)})^{(1,1)} + 2(D_m w^{(1,2,2)})^{(1)} + D_m w^{(2,2,2,2)} + D_n/rv^{(2)} + D_n/r^2 w + Z = 0 \qquad (17.3.)$$

Као такав тј., систем условног еквилибријума је коришћен за статичке прорачуне и контроле прво бране Отавица (Младост), затим Бук Бијела, Гранчарева, Глажње, Отиловића, да би свој врхунац достигао 70-их година у статичкој анализи 220-метарске лучне бране на реци Пиви – поносу српског, а стицајем одређених и не често спомињаних околности, и туђег градитељства.

3. КОНТУРНИ УСЛОВИ

Потпуна дефинисаност система се, као и код сваког контурног проблема, постиже путем познавања одговарајућих контурних услова, Код лучних брана то су услови на слободној контури који се задају по силама, и на опорачкој контури тј., на делу контакта лучне бране са околним стенским масивом, а који се уобичајено задају по померањима. При томе треба споменути да се скоро у свим случајевима поступци за одређивање услова на опорачкој контури у суштини базирају на практичној примени инжењерски разрађених Vogt-ових или сличних решења класичног Boussinesq-овог проблема (*Kirn, Houk, Savage, Можевитинов, Bosshard, Tölke, Henke, Млађеновић, Press, Jurecka, Naimi, Lombardi, Oberti, Swaminathan, Hayashi, Петковић и др.* [16]).

4. УМЕСТО ЗАКЉУЧКА

Јасно је да, као и код свих ранијих система једначина, тако и овде, теоретско упрошћење математичког описа проблема у циљу његовог прилагођавања одређеном поступку решавања последично доводи и до одговарајућих аномалија, па и недоследности. У последњем систему (17), са или без контурних услова, далеко највише, толико да се на први поглед чини да кад би се остаци полазног еквилибријума који се налазе у њему вратили назад у полазни физички модел добила би се, *једна путем ваљка мање кривине од кривине саме бране, "ненормално истањена", "унакрсно уваљана", па чак и по мало "згужвана љуска", која показује чудну склоност, не да мирује као и сви статички модели, већ напротив да ротира око z-осе, чиме се нарушавају основни услови равнотеже без обзира на примењене математичке, али не и механичке принципе* [11].
Свакако да такав опис поприлично одступа од уобичајених у домаћој пракси и стручној литератури и стога он, заједно са изложеним поступцима који се ретко где могу наћи у том обиму, а без којих је, као и без познавања технологије градње и класичних гредних система, пројектант лишен инжењерског осећаја самог проблема и рада конструкције, даје полазни основ за детаљнију анализу не само тог, већ и свих споменутих система, начина њиховог постанка и одрживости, али и одговор на нека питања која одатле и произилазе, без обзира којим математичким и рачунским помагалима ти модели били решавани, обичним калкулаторима и таблицама -као што то и дан-данас у пракси многи искусни инжењери, контролори и ревизори раде контролишући пројекте и рад својих сарадника - или најмоћнијим машинама са најсавременије креираним и готовим програмским пакетима.

ЛИТЕРАТУРА[3] (основна)

[1] *Boulder Canyon Project Final Reports, Part V, Bulletin*, Trial load method of analyzing arch dams, Bureau of Reclamation, U. S. Dept. of Interior, Denver, Colorado, **1938.**
[2] FLÜGGE, W., *Statik und Dynamik der Schalen,* Berlin, Springer., 2. Aufl., **1957.**
[3] ГАНЕВ, Х.Г., *Обща аналитична и синтетична теория на дъговите язовирни стени,* Българската Академия на Науките, София, **1978.**

[3] У раду је наведена само основна тј., фундаментална литература од преко 280 коришћених публикација и извода што је у то време у домаћој пракси представљало далеко највећи број коришћене литературе.

[4] GIRKMANN,K., *Flächentragwerke*, Springer-V., Wien, 1959. (Превод "Грађевинска књига" – Београд, **1965**)
[5] ГРИГОРЕНКО, Я., ВАСИЛЕНКО, А.Т., *Теория оболочек переменной жесткости*, Академия Наук Украинской ССР, Киев, **1981.**
[6] LOMBARDI, J., *Les barrages en voûte mince sur l'effet de torsion*, Lausanne, **1955.**
[7] PETKOVIĆ, M., *Prilog metodologiji statičkog proračuna lučnih brana, Deo II*, Građevinski fakultet u Nišu, Рад посвећен инж. Браниславу Кујунџићу, Niš, **1981**. стр. 56-79, 118-141, 198-257, *Prilog 1.,* стр. 305-323 (необјављено)
[8] PETKOVIĆ, M., "Analiza održanja uslova primenljivosti određenih teorija ljuski za rešavanje naponsko-deformativnog stanja lučnih brana", *Materijali i konstrukcije, 25 (1),1 -6,* **1982.**
[9] PETKOVIĆ, M., "Jednoznačnosti rešenja dvostruko krivih ljuski putem određivanja smanjenog broja uticaja", **1982.** (необјављено), [Напомена: накнадно објављено у: *Materijali i konstrukcije, 26 (1), 5-9,* (1983)]
[10] PETKOVIĆ, M., *Metodologija određivanja kontaktnih uslova kod lučnih brana na bazi rešavanja Boussinesq-ovog problema*, **1982**, str. 37-61 (необјављено)
[11] PETKOVIĆ, M., "Consideration of Hajdin's integral equations method for arch dam analysis" (Analiza Hajdin-ove metode integralnih jednačina za statički proračun lučnih brana), **1982.** (необјављено)
[12] PRIŞCU, R., *Constructii Hidrotehniče - Vol. I*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, **1974**, str.326-342
[13] TÖLKE, F., *Talsperren, staudamme und staumauerr*, (LUDIN, A., Wasserkraftan lagen-2. Hälfte, 1, Teil: Talsperen, стр. 492 и даље), Springer-Verlag, Berlin, **1938.**
[14] ВЛАСОВ, В. З., *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, *Изабрани труди,* Академия Наук СССР, Часть 1, Москва, **1962.**

CONTRIBUTION OF SERBS IN MODERN BUILDING PRACTICE – Part 3/1: Theory of shells and arch dams

Summary: *Why are officially almost anywhere in the world, do not mention the names of Serbian builders and their contribution to the world of construction? Is it because, besides the epic stories and sporadic cases, the lack of a tradition in wealth and authority disables the Serbs to cross the path from the ancient wageworkers and medieval bricklayer to the modern demiurge and so to be registered in the world of construction? In other words, to be its creators, not just less noticeable followers, skilled improvisers or simply executors.*

No matter what the truth is the presented paper contributes to the perception and memory of its bright side through the classical theory of shells and its application for arch dam analysis in construction practice. Starting from the general equations of the theory of thin shells of double curvature there are presented the procedure of forming the classic mathematical and physical models of arch dam with broader consideration of the accuracy of the assumptions that were done from theoretical and practical point of view. Together with there is also presented an analysis of Hajdin's model of arch dam and an integral equation method with regard to the state of the art in that area before and at the time of its application in local Serbian practice.

Keywords: *Arch dam, theory of shells, assumptions, models, analysis, N. Hajdin*