

ТЕОРИЈСКА АНАЛИЗА ДИНАМИЧКИХ УТИЦАЈА 1Д МОДЕЛА ПОБУЂЕНОГ ДЕЈСТВОМ СПОЉАШЊИХ ПОМЕРАЊА

Илија М. Миличић¹

Милан Ј. Романић²

УДК: 624.042:519.6

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.043

Резиме: У раду се рачунарским моделирањем и симулацијама динамичким моделом третирају принудне, пригушене осцилације система са једним степеном слободне кретања. Спољашње принудно дејство моделирано је као функција померања чија је учестаност односа 3 – 9 – 27 десетина од вредности природних учестаности осцилација модела. На основу теоријске анализе, рачунарским симулацијама одзива динамичког модела показано је да имамо мале величине померања при највишим учестаностима спољашње побуде.

Кључне речи: Моделирање, симулација, динамички модел, амплитуда померања, учестаност осцилација.

1. УВОД

Статичка и динамичка тестирања конструкција је веома сложена активност у грађевинском конструкторству и изузетна је вештина стручног лица који се баве испитивањем конструкција. Правилно одабрано и нането пробно оптерећење у експерименту, односно теоријски еквивалентног дејства у теоријској анализи сасвим сигурно даје поуздане и релевантне податке о доношењу децидних закључака у погледу стања понашања конструкције у експлоатацији. Када је реч о динамичким дејствима, она су једна значајна и бројна група изузетно специфичних оперећења. Већином, лакше се при тестирању „сналазимо“ у доношењу статичког оптерећења, док динамичко пробно оптерећење није ни једноставно аплицирати, а поготову у експерименту одржати његов карактер дејства у највећем броју случајева. Због чега?

Због тога што **систем = носачи + пробно оптерећење + окружење**, при тестирању на динамичке утицаје интегрално чине јединствен систем, а у интеракцији са битним величина кореспондирају у рачунарској анализи динамичког одзива модела при описивању стварног понашања конструкције.

¹ Проф. др Илија М. Миличић, дипл.инж.грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, е – mail: milicic@gf.uns.ac.rs

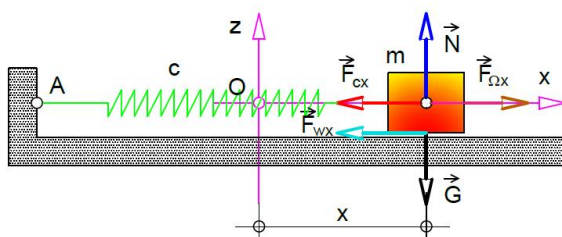
² Милан Ј. Романић, дипл.инж.грађ., Универзитет у Новом Саду, Грађевински факултет Суботица, Козарачка 2а, Суботица, Србија, тел: 024 554 300, е – mail: romanic@gf.uns.ac.rs

2. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ АНАЛИЗЕ 1Д ДИНАМИЧКОГ МОДЕЛА

Полазећи од физичког модела принудних пригушених осцилација, за кога се сматра да ће реалније описати стање понашања конструкције при динамичком дејству, а на основу математичког модела сл.1, долази се до диференцијалне једначине кретања са силом отпора подлоге (1). Ако се моделу намеће решење, да врши принудно пригушено осцилаторно кретање, тада је једначине кретања (2).

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F_0 \cdot \sin \Omega \cdot t \quad (1)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2)$$



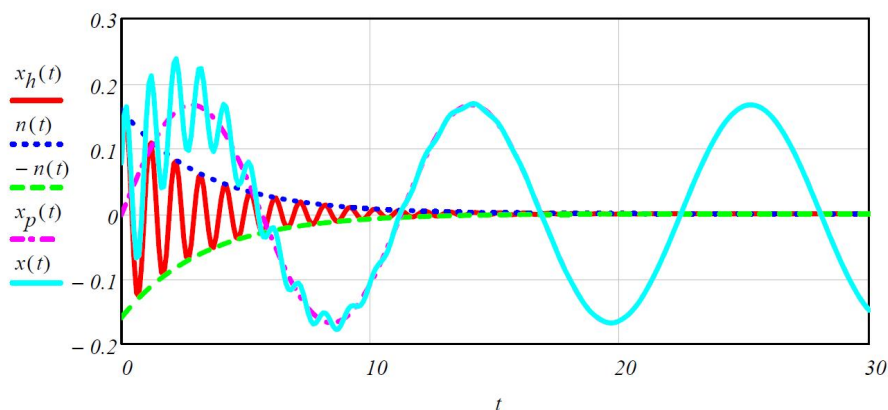
Слика 1 – Математички модел принудних осцилација са отпором подлоге

$$F_0 := 50 \quad m := 50 \quad h := \frac{F_0}{m} \quad T := 1 \quad \delta := 0.30 \quad \omega := \frac{2\pi}{T} \quad \alpha := \frac{\pi}{6}$$

$$\omega = 6.28 \quad \Omega := 0.56 \quad p := \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad R := \frac{1}{p} \quad C := \frac{h}{\sqrt{(\omega - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega^2}}$$

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad x_h(t) := R \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t + \alpha) \quad x_p(t) := C \cdot \sin(\Omega \cdot t - \theta)$$

$$x(t) := x_h(t) + x_p(t) \quad n(t) := R \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad t := 0, 0.1 \dots 30$$



Слика 2 – Симулација принудних пригушених осцилација са хармонијском побудом

Партикуларно решење зависи од десне стране j -не (1), при чему кретање по једначини хомогеног дела исчезава у времену, и систем надале осцилује са амплитудама у функције спољашње побуде сл.2. Због тога партикуларно решење принудних пригушених осцилација може се написати у функцији динамичког коефицијента који има практичну примену у теоријској – експерименталној анализи конструкција.

$$x_p(t) = \underbrace{\mu_D \cdot \delta_{st}}_C \cdot \sin \Omega \cdot t \quad (3)$$

где је:

- μ_D – динамички коефицијент
- $\delta_{st} = \frac{F_0}{c}$ – статичко издужење опруге (амплитуда статичког дејства – угиб)
- Ω – кружна учестаност принудних осцилација система

Према томе, динамички коефицијент карактерише однос две амплитуде осциловања (динамичке и статичке) система:

$$\mu_D = \frac{C}{C_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (4)$$

где је:

- ω – кружна учестаност слободних осцилација система
- $\psi = \frac{\Omega}{\omega}$ – коефицијент поремећаја

Амплитуда принудних осцилација (C) зависи од динамичког коефицијента, који је опет у функцији коефицијента поремећаја (ψ). За случај када је ($\Omega = \omega$) динамички коефицијент постаје бесконачно велика вредност као и амплитуда осциловања – то је стање резонанције, које сматрамо недопустивим за носаче у конструкцијама.

3. КОНЦЕПТ ФУНКЦИЈЕ ПРЕНОСА ОДЗИВ – ПОБУДА

Замислимо да стварна померања (одзив) и наметнута спољашња померања (побуда) заједно са масом, пригушењем и крутости модела чине интегрални осцилујући динамички систем. Тада је математички модел:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = c \cdot \Delta(t) \quad (5)$$

при чему је убрзање

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 \cdot x(t) = A \cdot \sin[\Omega \cdot t + (\theta - \pi)] \quad (6)$$

тада величина амплитуде убрзања је

$$A = \frac{1}{c} \cdot \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}} \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{m} \cdot \frac{\psi^2}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}} \quad (7)$$

У овом истраживању наметнута спољашња побуда сл. 3, третира се као законитост померања, десна страна j – не (5). Динамичке карактеристике 1Д модела при дејству спољашње побуде разматраће се дефинисањем функције преноса или функције учестаности одзив – побуда.

$$P(\psi) = \frac{x(t)}{\Delta(t)} \quad (8)$$

где је:

- $x(t)$ – одзив модела
- $\Delta(t)$ – побуда модела

Функција преноса између стабилног стања померања одзива $x(t)$ и стања побуде $\Delta(t)$ је и нормализована функција у односу на коефицијент поремећаја (ψ). Због тога, сада одзив 1Д модела кореспондира са вишестуко фреквентним амплитудама задатих померања (A_i),

$$x(t) = A_i \cdot P(\psi_i) \cdot \cos(\Omega_i \cdot t + \theta_i) \quad (9)$$

при чему решење (9), задовољава функција преноса

$$P(\psi) = \frac{1}{\sqrt{(1-\psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}} \quad (10)$$

с друге стране, и угао фазне разлике пригушених амплитуда зависи од поремећајног фактора и релативног пригушења.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-2 \cdot \xi \cdot \psi}{1 - \psi^2} \quad (11)$$

Размотримо (9) уз вођење рачуна на (10), тада су могућа три случаја, на основу којих функција преноса карактерише наметнуто кретање, односно ако је:

$$\Omega = 0 \quad P(\psi) = \frac{F_0}{c} = \frac{1}{c} \quad (12)$$

- одзив система (на ниске учестаности) контролише крутост.

$$\Omega = \omega \quad P(\psi) = \frac{1}{2 \cdot \xi} \quad (13)$$

- одзив система контролишу пригушења (стања резонанције).

$$\Omega = \infty \quad P(\psi) = \frac{1}{\Omega^2 \cdot m} \quad (14)$$

- одзив система контролише маса – инерција (у већој мери).

На крају, одзив третираног модела налазимо суперпозицијом појединих одзива:

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t + \theta_2) + X_3 \cdot \cos(\Omega_3 \cdot t + \theta_3) \quad (15)$$

$$X_i = \frac{c}{c} \cdot A_i \cdot P(\psi_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16)$$

4. РАЧУНАРСКА СИМУЛАЦИЈА ДИНАМИЧКОГ МОДЕЛА

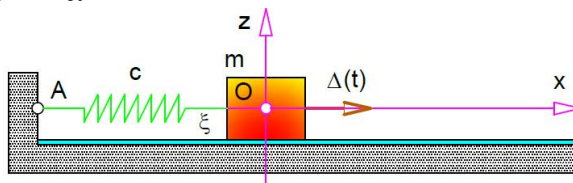
На основу теоријске анализе рачунарском симулацијом у програму MathCAD 15, анализирају се динамичке карактеристике 1Д динамичког модела принудних, пригушених осцилација са једним степеном слободе кретања.

Улазни подаци модела за симулацију

$$m := 640 \cdot \text{kg}$$

$$\xi := 0.1$$

$$c := 1.0 \cdot 10^5 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



срачунавање природне учестаности и физичког пригушење 1Д модела

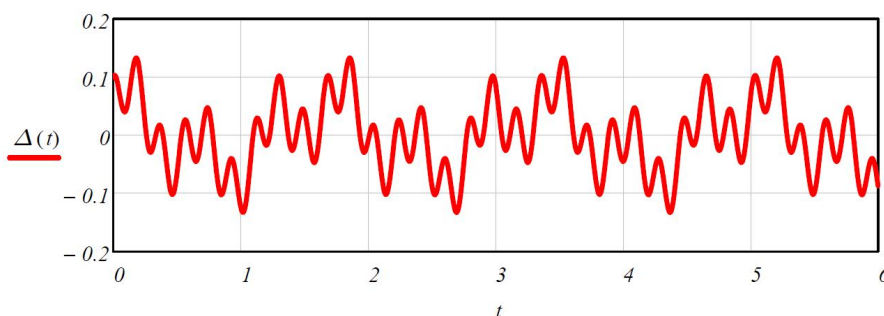
$$\begin{aligned} \omega &:= \sqrt{\frac{c}{m}} & \omega &= 12.5 \frac{1}{\text{s}} & f &:= \frac{\omega}{2 \cdot \pi} & f &= 1.99 \frac{1}{\text{s}} \\ b &:= 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi & b &= 1.6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}} & \omega_d &:= \omega \cdot \sqrt{(1 - \xi^2)} & \omega_d &= 12.44 \frac{1}{\text{s}} \\ f_d &:= \frac{\omega_d}{2 \cdot \pi} & T_d &:= \frac{1}{f_d} & T_d &= 0.505 \text{s} & \frac{T_d}{10} &= 0.0505 \text{s} \end{aligned}$$

вишефреквентни улазни подаци модела

$$\begin{aligned} A_1 &:= 0.05 \cdot m & A_2 &:= 0.05 \cdot m & A_3 &:= 0.05 \cdot m \\ \Omega_1 &:= \frac{3}{10} \cdot \omega & \Omega_2 &:= \frac{9}{10} \cdot \omega & \Omega_3 &:= \frac{27}{10} \cdot \omega \end{aligned}$$

побуда модела

$$\Delta(t) := A_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t) + A_3 \cdot \cos(\Omega_3 \cdot t)$$

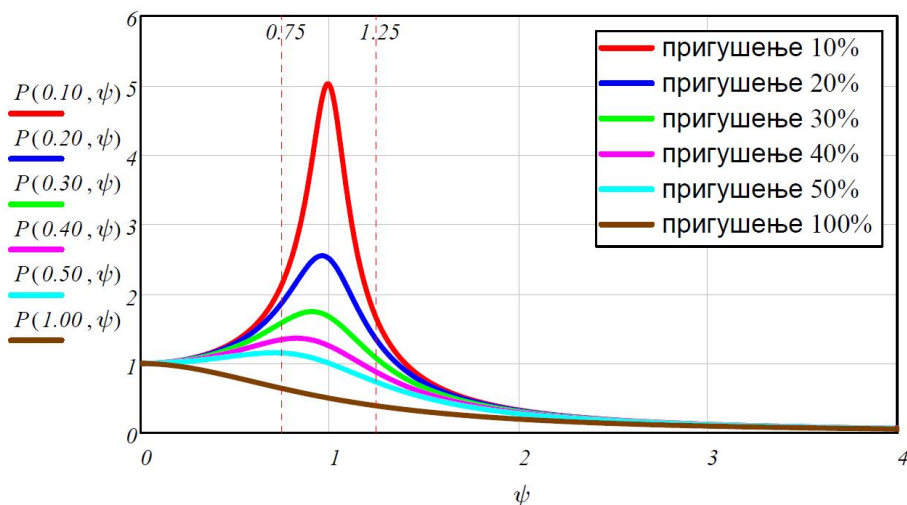


Слика 3 – Спољашње померање динамичког модела – побуда

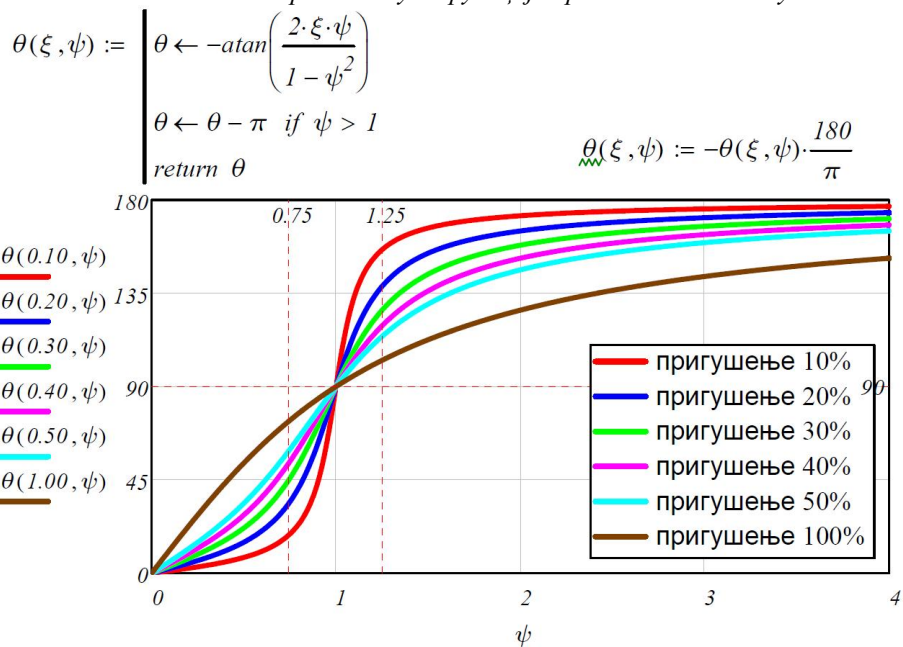
Фреквентни опсег амплитуда и фазни угао одзива функције преноса је

$$P(\xi, \psi) := \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}} \quad \text{највећа амплитуда } P(\xi, 1) = 5$$

$$\frac{1}{2 \cdot \xi} = 5$$



Слика 4 – Спектар амплитуда функције преноса одзив – побуда



Слика 5 – Спектар фазне разлике функције преноса одзив – побуда

Симулација динамичког модела

Општи облик једначина кретања модела

$$x(t) = A_i \cdot P(\psi_i) \cdot \cos(\Omega_i \cdot t + \theta_i)$$

суперпозиција појединачних одзива

$$x(t) = X_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t + \theta_2) + X_3 \cdot \cos(\Omega_3 \cdot t + \theta_3)$$

амплитуда одзива: $X_i = \frac{c}{c} \cdot A_i \cdot P(\psi_i)$

кофицијент поремећаја: $\psi_i = \frac{\Omega_i}{\omega} \quad i = 1, 2, 3$

$$P(\psi) := \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}} \quad \theta(\psi) := \begin{cases} \theta \leftarrow -\text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \psi}{1 - \psi^2}\right) \\ \theta \leftarrow \theta - \pi \text{ if } \psi > 1 \\ \text{return } \theta \end{cases}$$

први одзив: $\psi_1 := \frac{\Omega_1}{\omega} \quad \psi_1 = 0.3$

$$P(\psi_1) = 1.097 \quad \theta_1 := \theta(\psi_1)$$

$$X_1 := \frac{c}{c} \cdot A_1 \cdot P(\psi_1) \quad X_1 = 0.0548m \quad \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} = -3.7723$$

други одзив: $\psi_2 := \frac{\Omega_2}{\omega} \quad \psi_2 = 0.9$

$$P(\psi_2) = 3.821 \quad \theta_2 := \theta(\psi_2)$$

$$X_2 := A_2 \cdot P(\psi_2) \quad X_2 = 0.1910m \quad \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} = -43.4518$$

трећи одзив: $\psi_3 := \frac{\Omega_3}{\omega} \quad \psi_3 = 2.7$

$$P(\psi_3) = 0.158 \quad \theta_3 := \theta(\psi_3)$$

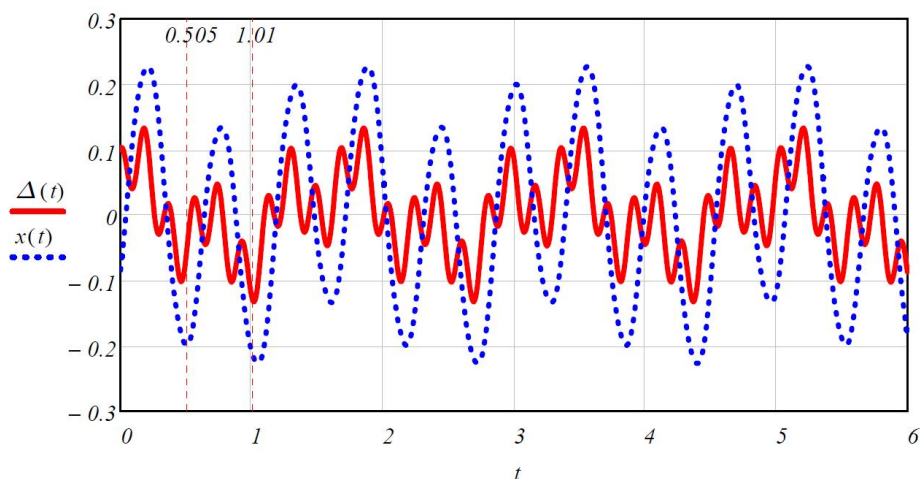
$$X_3 := A_3 \cdot P(\psi_3) \quad X_3 = 0.0079m \quad \theta_3 \cdot \frac{180}{\pi} = -175.0932$$

однос амплитуда, одзив - побуда

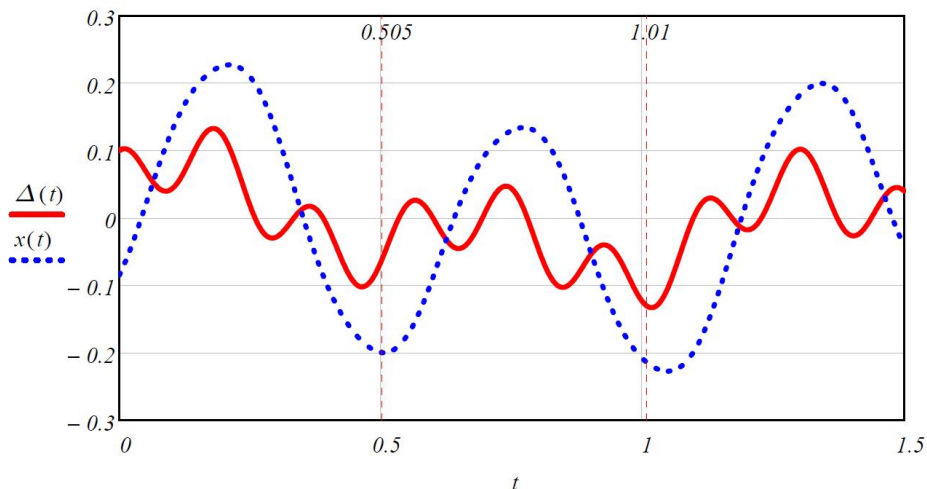
$$\frac{X_1}{A_1} = 1.097 \quad X_1 > A_1 \quad \frac{X_2}{A_2} = 3.821 \quad X_2 > A_2 \quad \frac{X_3}{A_3} = 0.158 \quad X_3 < A_3$$

Једначина кретања модела

$$x(t) := X_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t + \theta_1) + X_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t + \theta_2) + X_3 \cdot \cos(\Omega_3 \cdot t + \theta_3)$$



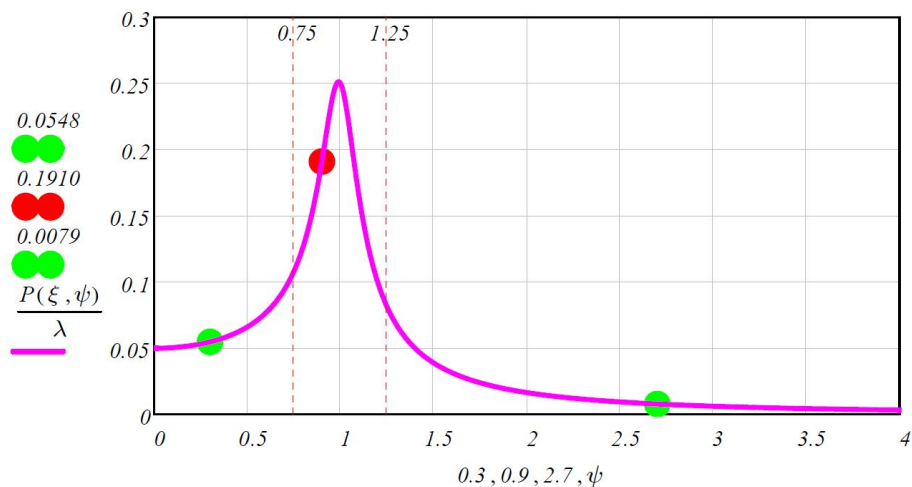
Слика 6 – Кретање интегралног оцилујућег система побуда – одзив



Слика 7 – Увећани део са слике 6, кретања интегралног оцилујућег система

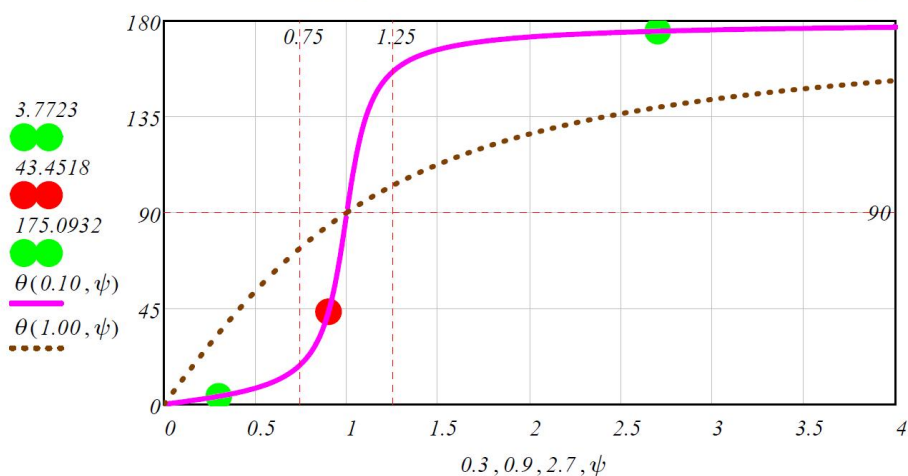
Амплитуде и фазни углови одзива модела:

амплитуда $P(\xi, \psi) := \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \psi)^2}}$ фактор скалирања $\lambda := \frac{1}{A_I}$



Слика 8 – Амплитуде одзива динамичног модела побуђен спољашњим померањима

фазни угао $\theta(\xi, \psi) := \begin{cases} \theta \leftarrow -\text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \psi}{1 - \psi^2}\right) \\ \theta \leftarrow \theta - \pi \text{ if } \psi > 1 \\ \text{return } \theta \end{cases}$ $\theta(\xi, \psi) := -\theta(\xi, \psi) \cdot \frac{180}{\pi}$



Слика 9 – Фазни угао одзива динамичног модела побуђен спољашњим померањима

5. ЗАКЉУЧАК

На основу приказане теоријске анализе и симулација 1Д динамичког модела система принудних пригушених осцилација са једним степеном слободе кретања побуђеног спољашњим померањима дају се одређени закључци:

- одзив модела показује да имамо мала померање при највишим побуђеним учестаностима, сл. 6 и сл. 7.
- постоји појачање кретања са другом учестаности ($\Omega_2 \sim \omega$), сл. 7.
- амплитуда одзива за највећу учестаност је ослабљена, сл. 8.
- амплитуде за прве две учестаности се појачавају, нарочито за Ω_2 која је блиска природној учестаности, сл. 8.
- функција преноса је могућа кореспондентна релација одзив – побуда.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Vlajić, Lj. M., Miličić, I.M., Prokić, A. D.: Eksperimentalna analiza dinamičkih uticaja spregnute konstrukcije u fabrici "Banini a.d." u Kikindi, DOI:10.14415/konferencijaGFS 2014.013, Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Međunarodna konferencija "Savremena dostignuća u građevinarstvu", 2014.god., str. 107-116
- [2] Prokić, A., Lukić, D., and Miličić, I.: Free Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Thin-Walled Beams with Open Cross Sections: Exact Solution. ASCE Journal of Structural Engineering , ISSN 0733-9445, 2013, Vol. 139, No. 4: pp. 623-629.
- [3] Prokić, A., Folić, R., Miličić, I.: A closed – form approximate solution for coupled vibrations of composite thin – walled beams with mid – plane symmetry, Tehnički vjesnik, Slavonski Brod, Croatia, ISSN 1330-3651, 2013, Vol. 20, No 5, pp. 883-890.
- [4] Milašinović, D.D.: The Finite Strip Method in Computational Mechanics, Faculty of Civil Engineering Subotica, University of Novi Sad, Birografika Subotica, 1997.

THEORETICAL ANALYSIS OF DYNAMIC EFFECTS 1D MODEL INDUCED BY THE ACTION OF EXTERNAL DISPLACEMENT

Summary: *In this paper computer modeling and simulation of dynamic model treated forced, damped oscillations of a single degree of freedom of displacement. External forced fact modeled as a function of displacement whose frequency ratio is 3 – 9 – 27 tenth of the value of the natural frequency of oscillation model. Based on the theoretical analysis, computer simulations of the dynamic response model has been shown to have a small size displacement at the highest frequencies of external excitation.*

Keywords: *Modelling, simulation, dynamic model, the amplitude, frequency oscillations.*